Introdução à Física Nuclear
Resolução de exercícios

9 de agosto de 2012

Capítulo 1

1.4 Justifique a afirmação feita no texto de que a equação (1.32) é rigorosamente válida no sistema do centro de massa desde que E seja a energia cinética nesse sistema, ou seja, $E = m_r v^2/2$ (v : velocidade relativa, $m_r = m_1 m_2/(m_1 + m_2)$).

Solução:

A equação (1.32) foi obtida considerando-se que a massa do centro dispersor era muito maior do que a massa do projétil, de modo que os referenciais do centro de massa e do laboratório poderiam coincidir. Mas se for considerado que a massa do alvo não é muito superior à do projétil, deve-se escrever as equações do movimento para esse sistema na formulação do problema de dois corpos. Então, temos

$$m_1 \ddot{\vec{r}}_1 = \vec{F}_1^i + \vec{F}_1^e \tag{1a}$$

$$m_2 \ddot{\vec{r}}_2 = \vec{F}_2^i + \vec{F}_2^e \tag{1b}$$

e ainda

$$\begin{aligned}\vec{R} &= \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2} \\ \vec{r} &= \vec{r}_1 - \vec{r}_2\end{aligned} \tag{2}$$

onde $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$ e $\vec{R}$ são as posições das partículas 1 e 2 e do centro de massa, respectivamente com respeito ao referencial do laboratório. Os sobrescritos i e e denotam, respectivamente, as forças internas ao sistema e as forças externas. Sabemos ainda que $\vec{F}_1^i = -\vec{F}_2^i$. A partir de (2), temos

$$\begin{aligned}\vec{r}_1 &= \vec{R} + \frac{m_2}{m_1 + m_2}\vec{r} \\ \vec{r}_2 &= \vec{R} - \frac{m_1}{m_1 + m_2}\vec{r}\end{aligned} \tag{3}$$

Das equações (2) e (3), temos

$$\begin{aligned} \vec{V} = \dot{\vec{R}} = \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2} \\ \vec{v} = \dot{\vec{r}} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2 \end{aligned} \tag{4}$$

de onde tiramos

$$\begin{aligned} \vec{v}_1 = \vec{V} + \frac{m_r}{m_1}\vec{v} \\ \vec{v}_2 = \vec{V} - \frac{m_r}{m_2}\vec{v} \end{aligned} \tag{5}$$

onde $m_r = \dfrac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ é a massa reduzida do sistema.
A energia cinética total deverá, então, ser

$$
\begin{aligned}
E &= \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2 \\
&= \frac{1}{2} M V^2 + \frac{1}{2} m_r v^2
\end{aligned}
\tag{6}
$$

onde $M = m_1 + m_2$.
No referencial do centro de massa $V = 0$, de modo que

$$
E = \frac{1}{2} m_r v^2 \tag{7}
$$

1.6 Obtenha a condição para que se tenha dispersão simples.

Solução:

Para que haja dispersão simples, deve-se ter $C > 0$ (caso repulsivo) e $A > -mC/l^2$. O caso $A < -mC/l^2$ não é possível, pois de acordo com (1.16), os raios possíveis da órbita seriam ambos negativos. Aplicando essas condições à equação (1.19), temos

$$\sqrt{\frac{m^2C^2}{l^4} + \frac{2mE}{l^2}} > -\frac{mC}{l^2} \Rightarrow E > 0 \tag{8}$$

Capítulo 3

3.1 Defina $R(r) = \dfrac{u(r)}{r}$, substitua na equação radial (3.42) e obtenha a equação para $u(r)$. Compare com a equação de Schrödinger para o problema unidimensional. Qual o significado físico do termo $\dfrac{l(l+1)\hbar^2}{2mr^2}$?

Solução:

Da igualdade (3.43) segue que

$$\frac{dR}{dr} = \frac{1}{r}\frac{du}{dr} - \frac{1}{r^2}u \tag{9}$$

e, portanto

$$\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right) = r\frac{d^2u}{dr^2} \tag{10}$$

Substituindo este resultado na equação radial, obtemos

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \left\{\frac{2m}{\hbar^2}\left[E - V(r)\right] - \frac{\lambda^2}{r^2}\right\}u = 0 \tag{11}$$

Problema unidimensional: $\dfrac{d^2u}{dx^2} + \left\{\dfrac{2m}{\hbar^2}\left[E - V(x)\right]\right\}u = 0$

- A função de onda de uma partícula sujeita a um potencial simetricamente esférico $V(r)$ é dada por

$$\psi(\mathbf{x}) = (x + y + 3z)f(r) \tag{12}$$

(a) ψ é autofunção de $\mathbf{L}^2$? Se sim, qual o valor de l? Se não, quais os possíveis valores de l que podemos obter quando $\mathbf{L}^2$ é medido?

(b) Quais as probabilidades de a partícula ser encontrada nos vários estados m_l?

Solução:

(a)

Reescrevendo ψ em coordenadas esféricas, temos

$$\psi = (sen\theta\, cos\varphi + sen\theta\, sen\varphi + 3cos\theta)\, r\, f(r) \tag{13}$$

Temos que,

$$\begin{aligned} Y_{11} &= -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} sen\theta\, e^{i\varphi} \\ Y_{1-1} &= \sqrt{\frac{3}{8\pi}} sen\theta\, e^{-i\varphi} \\ Y_{10} &= \sqrt{\frac{3}{4\pi}} cos\theta \end{aligned} \tag{14}$$

Como $e^{\pm i\varphi} = cos\varphi \pm isen\varphi$
ψ é autofunção pois os harmônicos esféricos são autofunções de $\mathbf{L}^2$. Neste caso $l = 1$.

(b)

Escrevemos

$$
\begin{aligned}
& sen\theta\, cos\varphi + sen\theta\, sen\varphi + 3cos\theta \\
& = sen\theta \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2} + sen\theta \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i} + 3cos\theta \\
& = \left(\frac{4\pi}{3}\right)^{1/2} \left[\frac{(i-1)Y_{11}}{\sqrt{2}} + \frac{(1+i)Y_{1-1}}{\sqrt{2}} + 3Y_{10}\right]
\end{aligned}
\tag{15}
$$

$$
\begin{aligned}
m_l = 0 \Rightarrow P_0 &= \frac{9}{11} \\
m_l = 1 \Rightarrow P_1 &= \frac{1}{11} \\
m_l = -1 \Rightarrow P_{-1} &= \frac{1}{11}
\end{aligned}
\tag{16}
$$