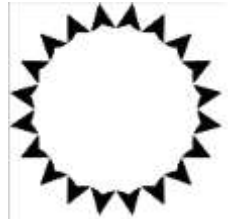




*PEF2602*  
*Estruturas na Arquitetura I I - Sistemas Reticulados*  
*2º Semestre 2018*



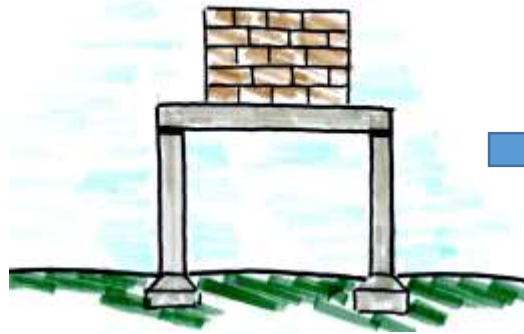
*Aula 2 - 27/08/2018*

*Resistência, Estabilidade, Segurança,*  
*Verificação, Dimensionamento*

*Professores*

*Ruy Marcelo O. Pauletti , Leila Meneghetti Valverdes, Luís Antônio Bitencourt Jr.*

# O Processo de Análise Estrutural



Estrutura  
("Real" / "Concreto")



Modelo Estrutural:

Carregamentos

+

Equações de Equilíbrio

+

Equações de  
Compatibilidade



Esforços Solicitantes



Tensões

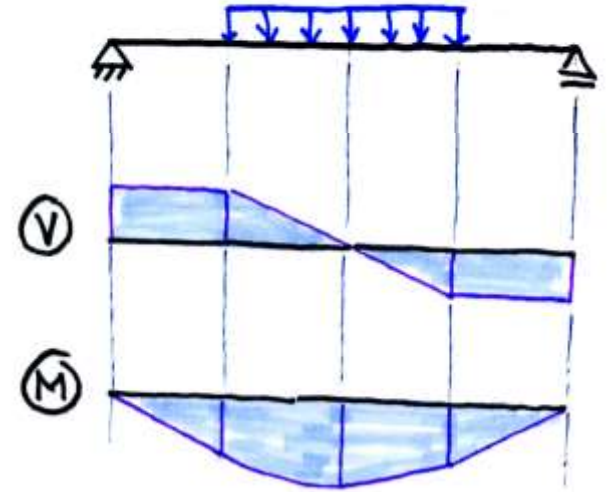


Deformações

Segurança x Desempenho

∴

Economia; Durabilidade; Funcionalidade



# Problemas Básicos do Projeto e da Análise das Estruturas

- 1) **DIMENSIONAMENTO** (Problema Direto):  
Determinar os materiais, as dimensões e outros parâmetros, para atender a critérios de projeto;
- 2) **VERIFICAÇÃO** (Problema Inverso):  
Verificar se uma dada estrutura, de parâmetros já definidos, atende aos critérios de projeto.

# Métodos de Cálculo

Conforme a Natureza dos Modelos e Métodos

## Determinísticos:

valores fixos para carregamentos e propriedades dos materiais

## Probabilísticos:

valores estatísticos para carregamentos e propriedades dos materiais

Conforme os Critérios de Projeto e Verificação

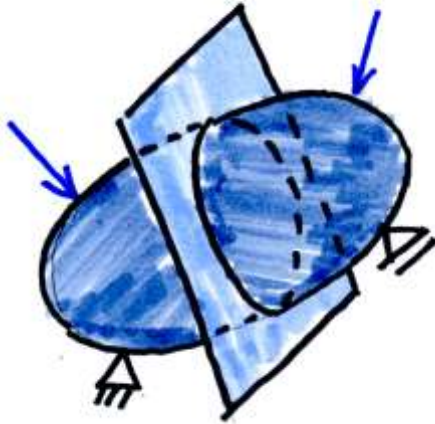
Tensões Limites (Método Clássico)

Estados Limites (Método Moderno)

- Atualmente, as normas foverecem a combinação de critérios baseados em estados limites e métodos probabilísticos;
- Para uma primeira exposição simplificada do assunto, em PEF2602 adotamos critérios clássicos e métodos determinísticos;
- PEF2604 aprofunda o assunto!

# Esforços Solicitantes (vistos em PEF2601):

Um sólido em equilíbrio:



Esforços Solicitantes:



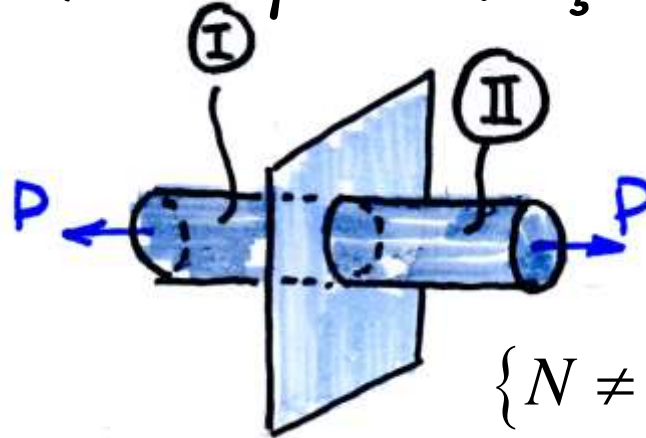
## Problema:

Conhecidos os Esforços Solicitantes  $\{N, V, M\}$ , ao longo da estrutura, como determinar sua segurança?

Caso mais simples:

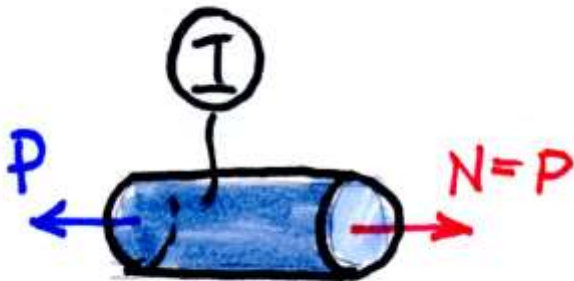
# Tração / Compressão

Consideramos inicialmente o caso da barra tracionada, para o qual existe apenas força normal  $N$



$$\{N \neq 0 \ ; \ V = 0 \ ; \ M = 0\}$$

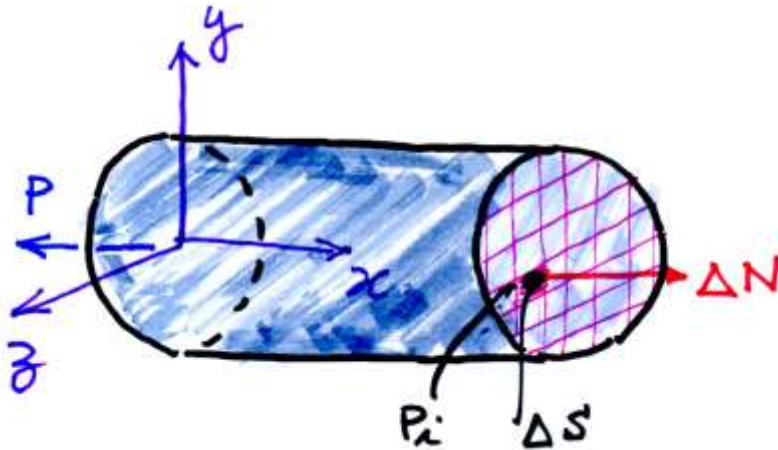
O equilíbrio da parte I da barra fornece:



$$N = P$$

$$\begin{cases} N > 0 \quad \therefore \text{Tração} \\ N < 0 \quad \therefore \text{Compressão} \end{cases}$$

# Tensão Normal



Área da Seção Transversal:

$$A = \int_S ds = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \Delta S_i$$

Força Normal:

$$N = \int_S dN = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \Delta N_i$$

Define-se a Tensão Normal no ponto  $P_i$ :  $\sigma_x = \lim_{\Delta S_i \rightarrow 0} \frac{\Delta N_i}{\Delta S_i} = \frac{dN}{dS}$

$$\therefore dN = \sigma_x dS \quad \therefore N = \int_S \sigma_x dS$$

# Tensão Normal

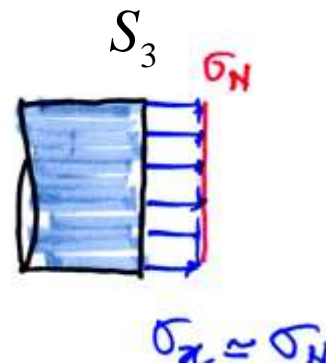
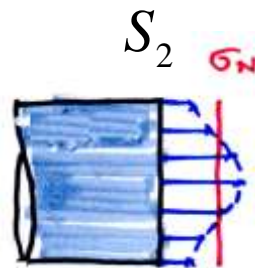
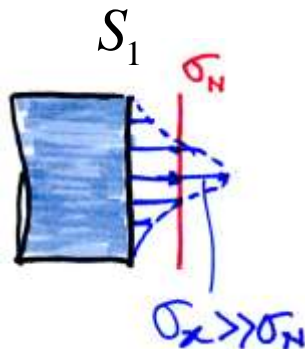
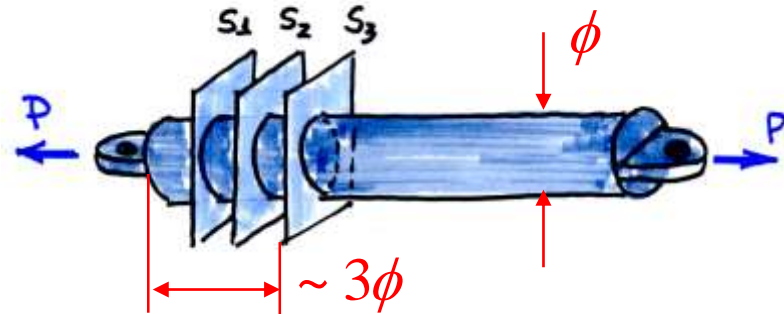
Admitindo uma distribuição uniforme de tensões:  $\sigma_x = \sigma_N$

$$N = \int_S \sigma_x dS = \int_S \sigma_N dS = \sigma_N \int_S dS = \sigma_N A$$

Onde se define a tensão normal média

$$\sigma_N = \frac{N}{A}$$

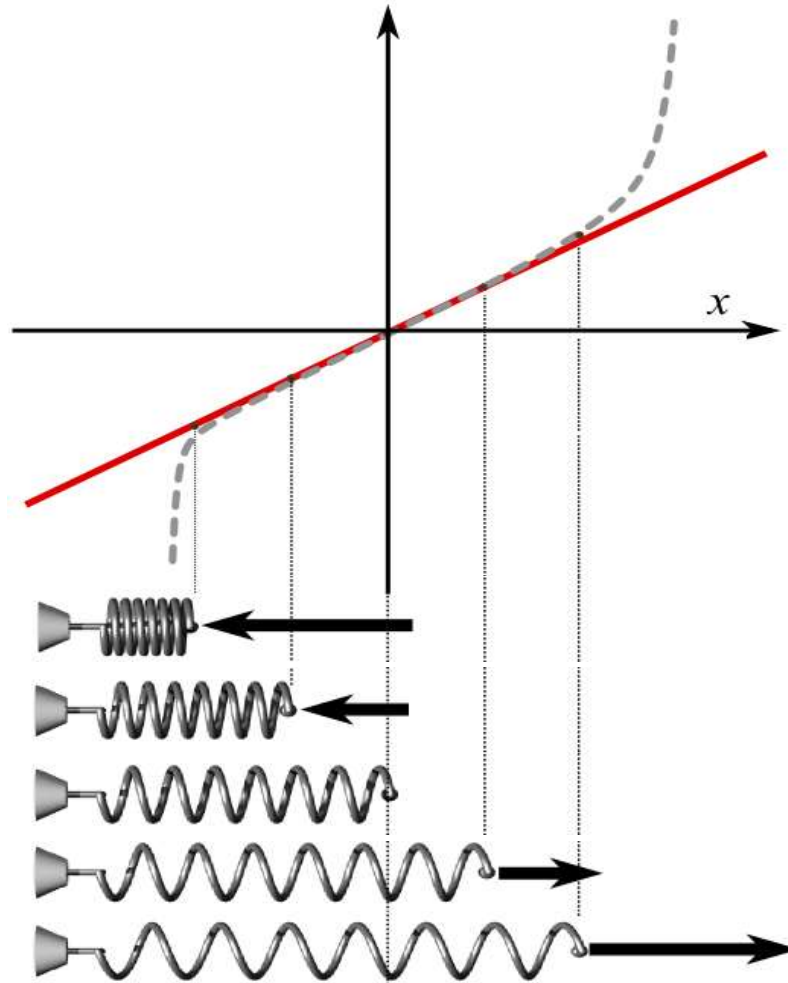
A tensão normal média aproxima bem as tensões normais, exceto nas extremidades da barra:





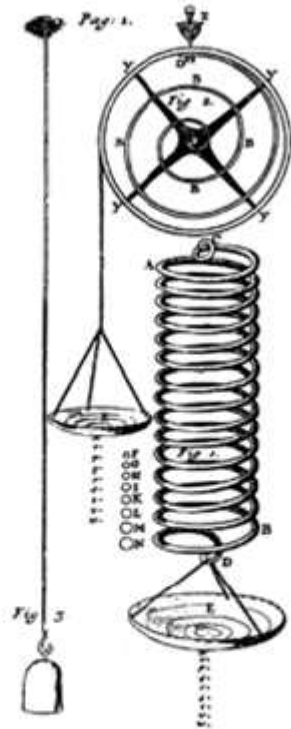
# Lei de Hooke

'Ut tensio, sic vis' ('como a deformação, assim a força')



# Lei de Hooke

'Ut tensio, sic vis' ('como a deformação, assim a força')



ceiinossttuv

ut tensio sic vis

To fill the vacancy of the ensuing page, I have here added a *decimate* of the *centesimo* of the Inventions I intend to publish, though possibly not in the same order, but as I can get opportunity and leasure; most of which, I hope, will be as useful to Mankind, as they are yet unknown and new.

1. A way of *Regulating* all sorts of Watches or Time-keepers, so as to make any way to equalize, if not exceed the Pendulum-Clocks now used.

2. The true *Mathematical* and *Meechanical* form of all manner of Arches for Building, with the true butment necessary to each of them. A Problem which no *Architectonick* Writer hath ever yet attempted, much less performed. abccc ddeeeee fgg iiiiiii lllmmnnnnnoopr ssstt:ttuuuuuuux.

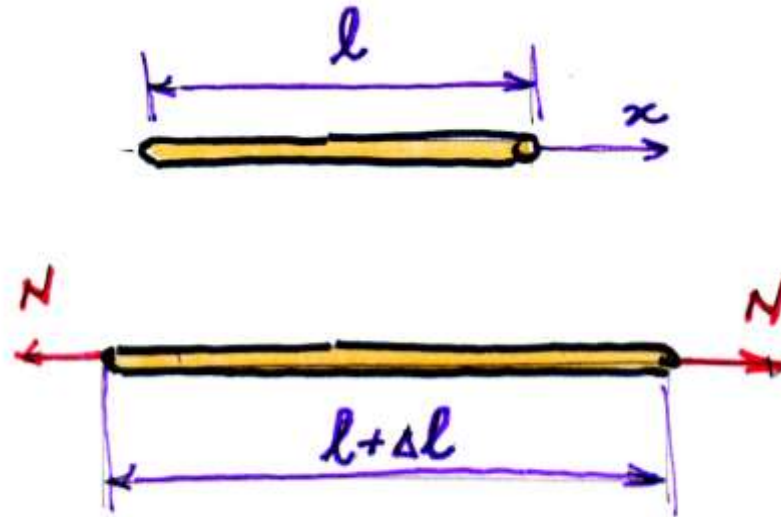
3. The true Theory of Elasticity or Springiness, and a particular Explication thereof in several Subjects in which it is to be found: And the way of computing the velocity of Bodies moved by them. ceiinossttuv. ut vis, sic tensio

4. A very plain and practical way of counterpoising Liquors, of great use in Hydraulicks. Discovered.

5. A new sort of Object-Glasses for Telescopes and Microscopes, much outdoing any yet used. Discovered.

Robert Hooke (1635-1703), *Lectiones Cutlerianæ, or A collection of lectures: physical, mechanical, geographical, & astronomical*. London: Printed for John Martyn, 1679.

# Deformação:



Deformação Longitudinal  $\epsilon_x = \frac{\Delta l}{l}$  (adimensional!)

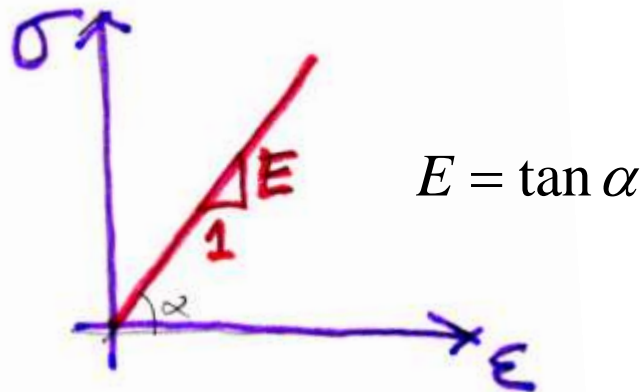
# Lei de Hooke

Para cada material, existe uma proporcionalidade entre a deformação longitudinal  $\varepsilon_x$  e a tensão normal  $\sigma_x$  :

$$\sigma_x = E \varepsilon_x$$

$E$  : Módulo de Elasticidade do Material

(Dimensão:  $N/m^2$ )



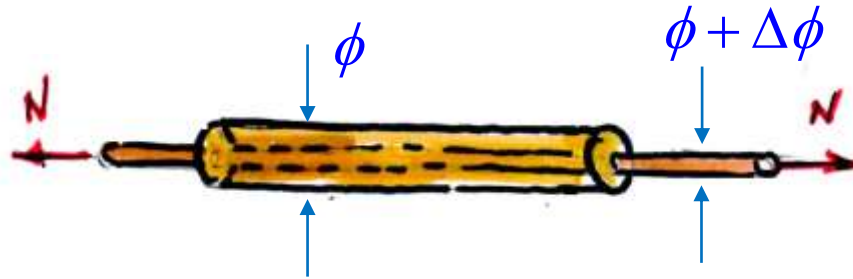
# Módulo de Elasticidade

Material	E (GPa)	$\nu$
Aço	210	0,3
Alumínio	70	0,25
Concreto	25	0,15
Madeira	10	?
Nylon	~2	0,42

$\nu$  : *coeficiente de Poisson*

(*relaciona a deformação longitudinal com a deformação transversal*)

# Deformação Transversal



$$\varepsilon_x = \frac{\Delta l}{l}$$



$$\varepsilon_t = \frac{\Delta\phi}{\phi}$$

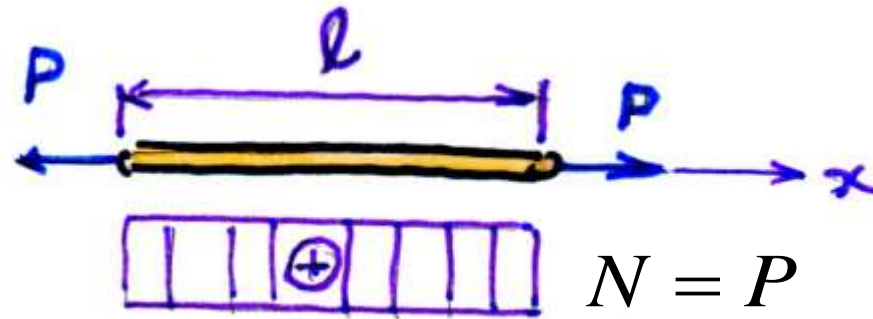
$$\Delta\phi < 0 \quad \therefore \quad \varepsilon_t < 0$$

Verifica-se experimentalmente que

$$\varepsilon_t = -\nu\varepsilon_x$$

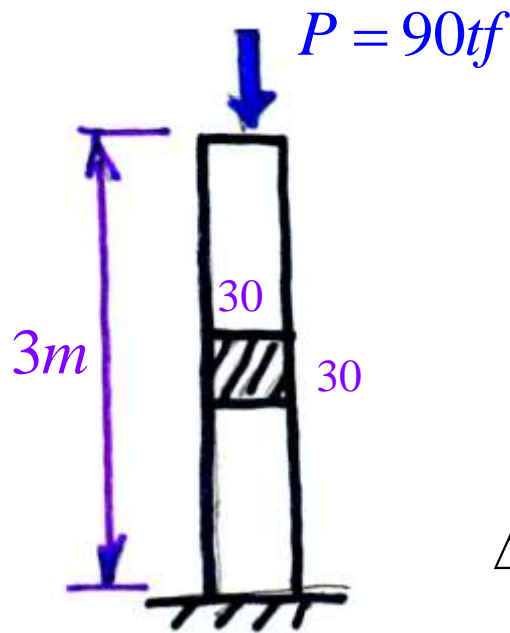
# Barra prismática sujeita à tração / compressão simples:

Conhecidos o material e as dimensões de uma barra prismática, é possível prever o seu alongamento (ou encurtamento) quando submetida a uma tração uniforme:



$$\left. \begin{array}{l} \sigma_x = \frac{N}{A} \quad (\text{definição}) \\ \varepsilon_x = \frac{\Delta l}{l} \quad (\text{definição}) \\ \varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} \quad (\text{experimental}) \end{array} \right\} \frac{\Delta l}{l} = \frac{\sigma_x}{E} \quad \left. \vphantom{\left. \begin{array}{l} \sigma_x = \frac{N}{A} \\ \varepsilon_x = \frac{\Delta l}{l} \\ \varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} \end{array} \right\}} \right\} \Delta l = \frac{Nl}{EA}$$

Exemplo: calcular o encurtamento do pilar de concreto:



$$N = -P = -90tf = -90 \times 10^4 N$$

$$A = 0,3 \times 0,3 = 9 \times 10^{-2} m^2$$

$$E = 25GPa = 25 \times 10^9 \frac{N}{m^2}$$

$$\Delta l = \frac{Nl}{EA} = \frac{(-90 \times 10^4 N) \times 3m}{25 \times 10^9 \frac{N}{m^2} \times 9 \times 10^{-2} m^2} = -1,2 \times 10^{-3} m$$

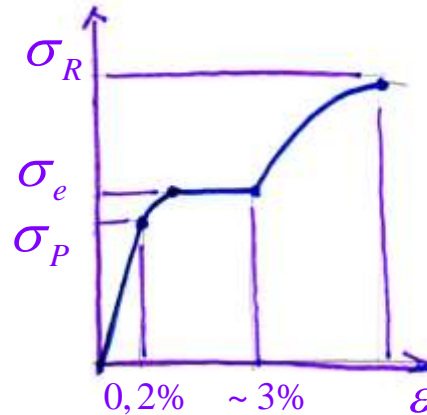
$$\Delta l = -1,2 mm$$



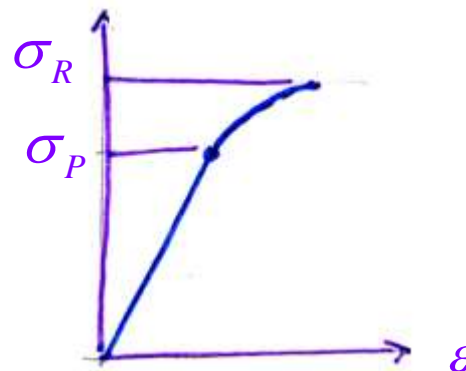
# Ensaio de tração

A Lei de Hooke tem validade restrita a deformações relativamente pequenas:

Material Dútil:  
(por exemplo, aço)

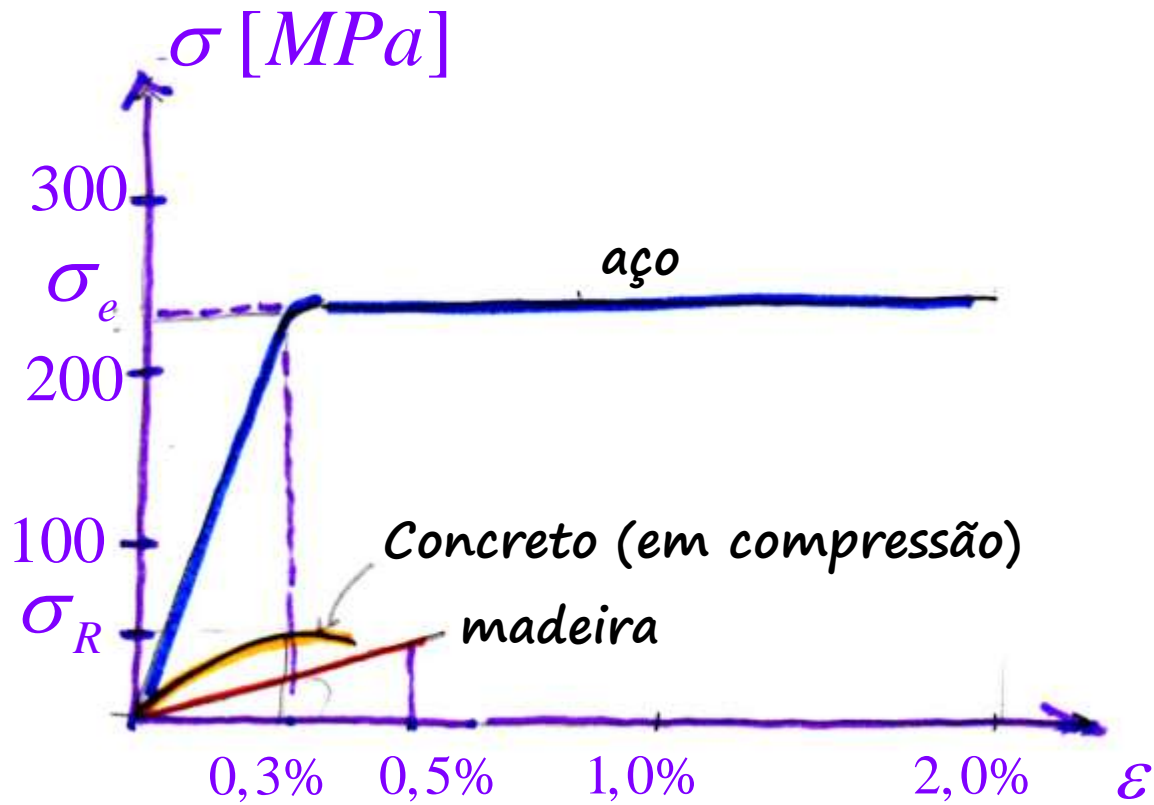


Material Frágil:  
(por exemplo, concreto)



# Ensaio de tração

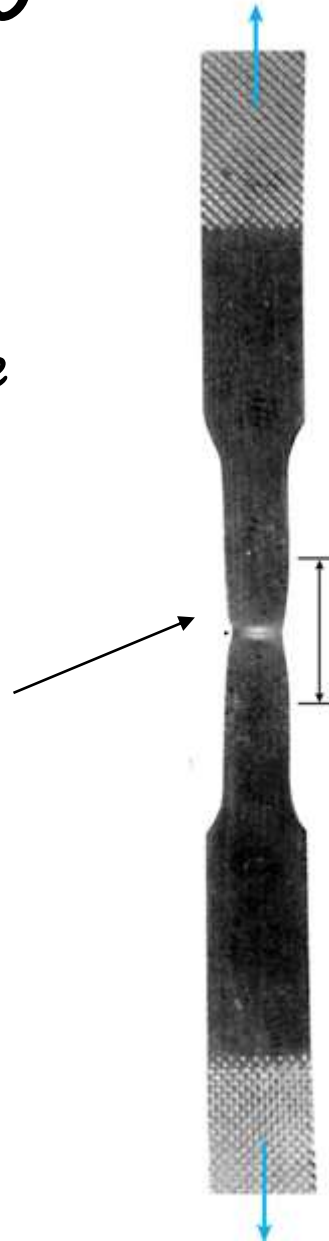
Comparação aço - concreto - madeira:



# Ensaio de tração

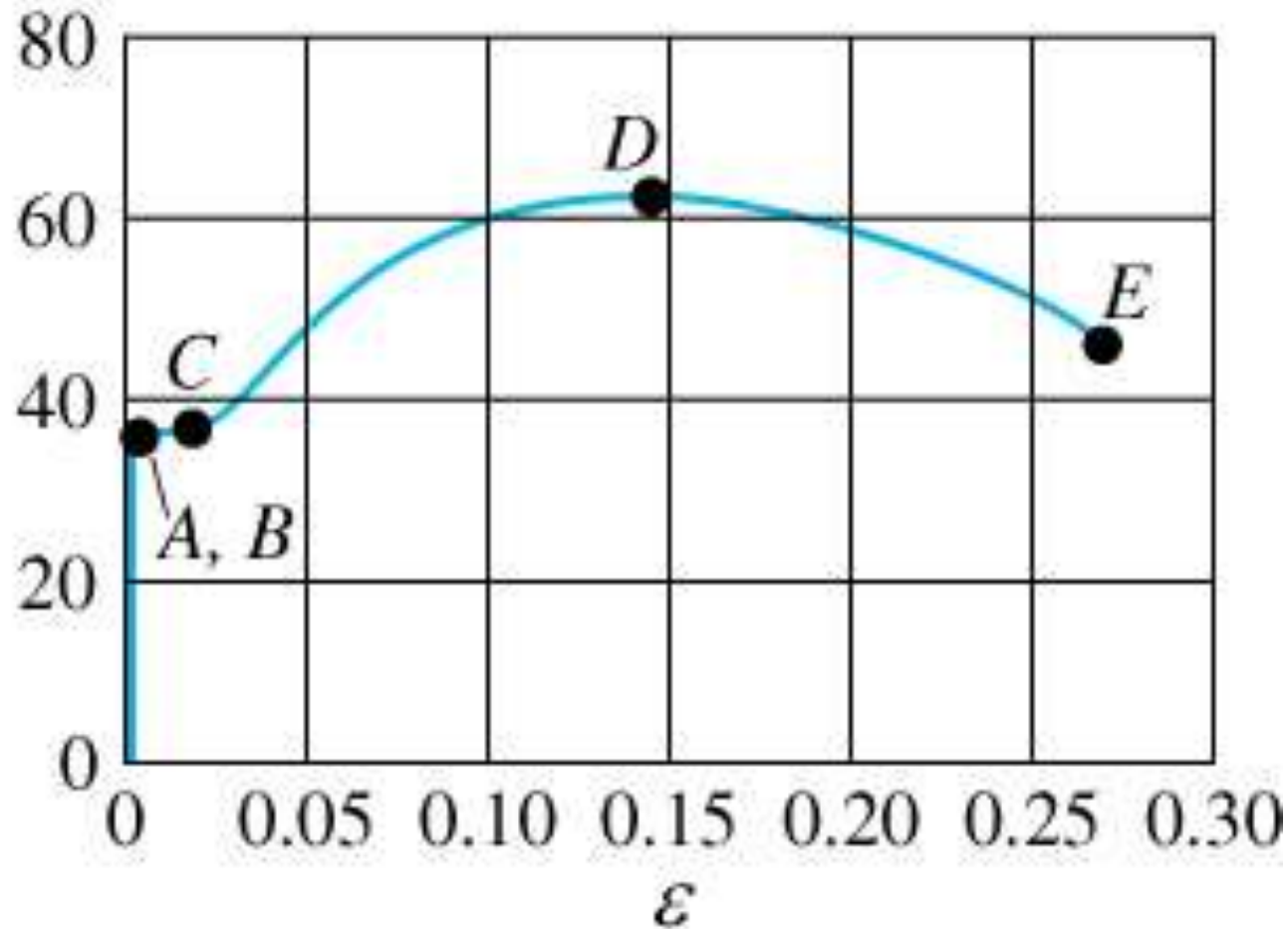
Exemplo de um ensaio de tração – aço estrutural.

Região de ruptura



Região de estricção  
C a E do diagrama

$\sigma$  (ksi)     $\sigma = 551.581 \text{ MPa}$



*Diagrama tensão-deformação típico de aço estrutural em tração, desenhado em escala*

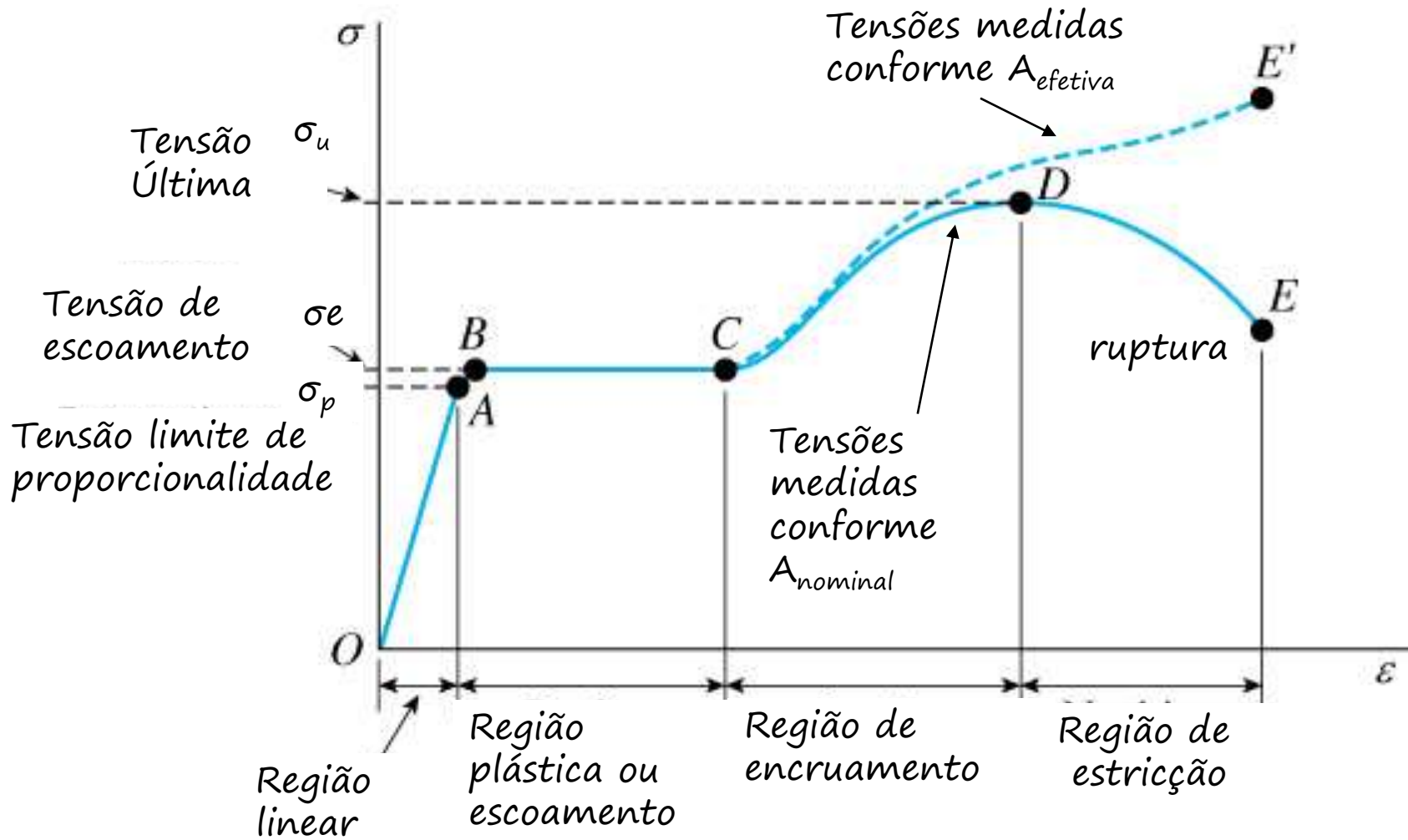
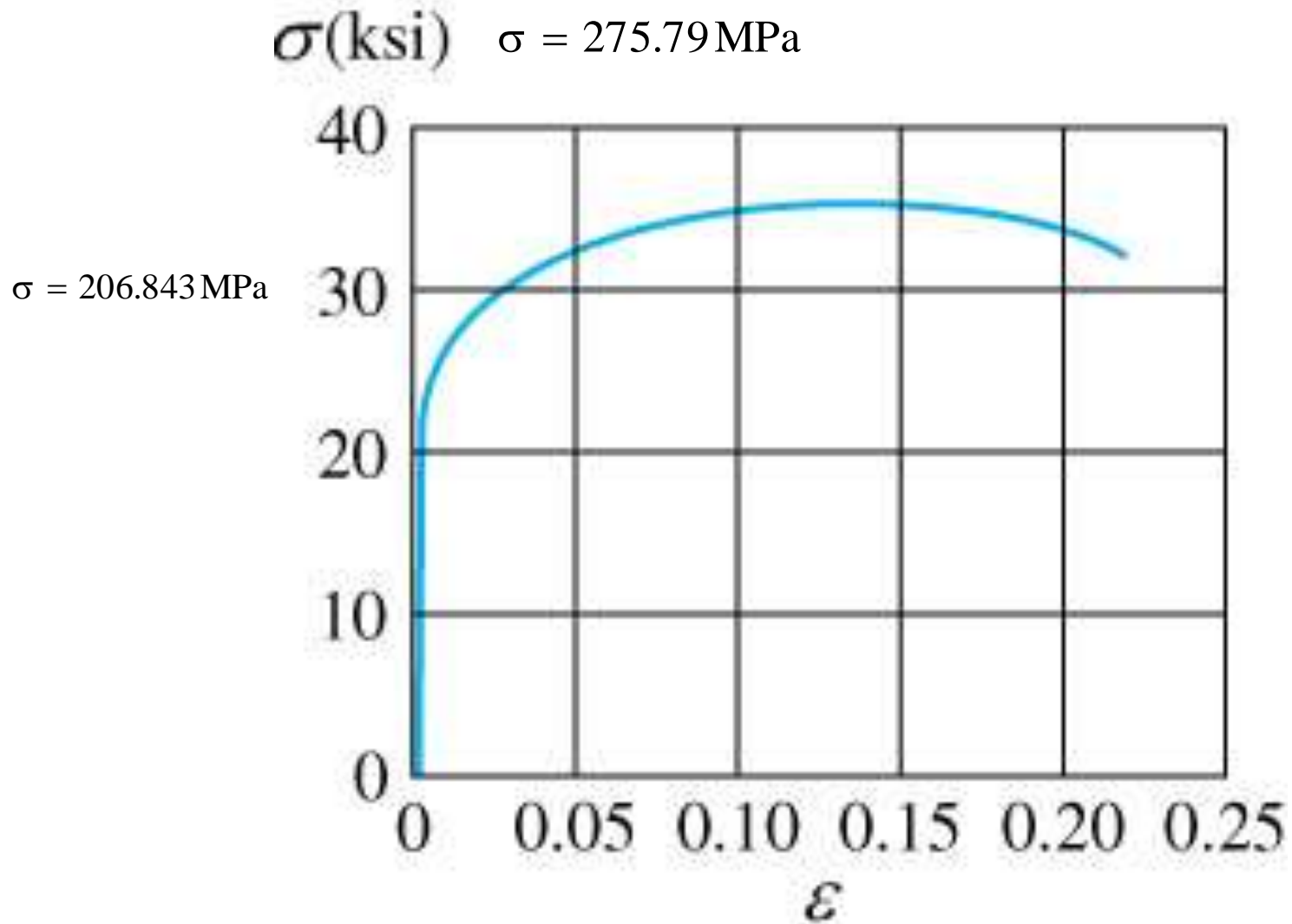
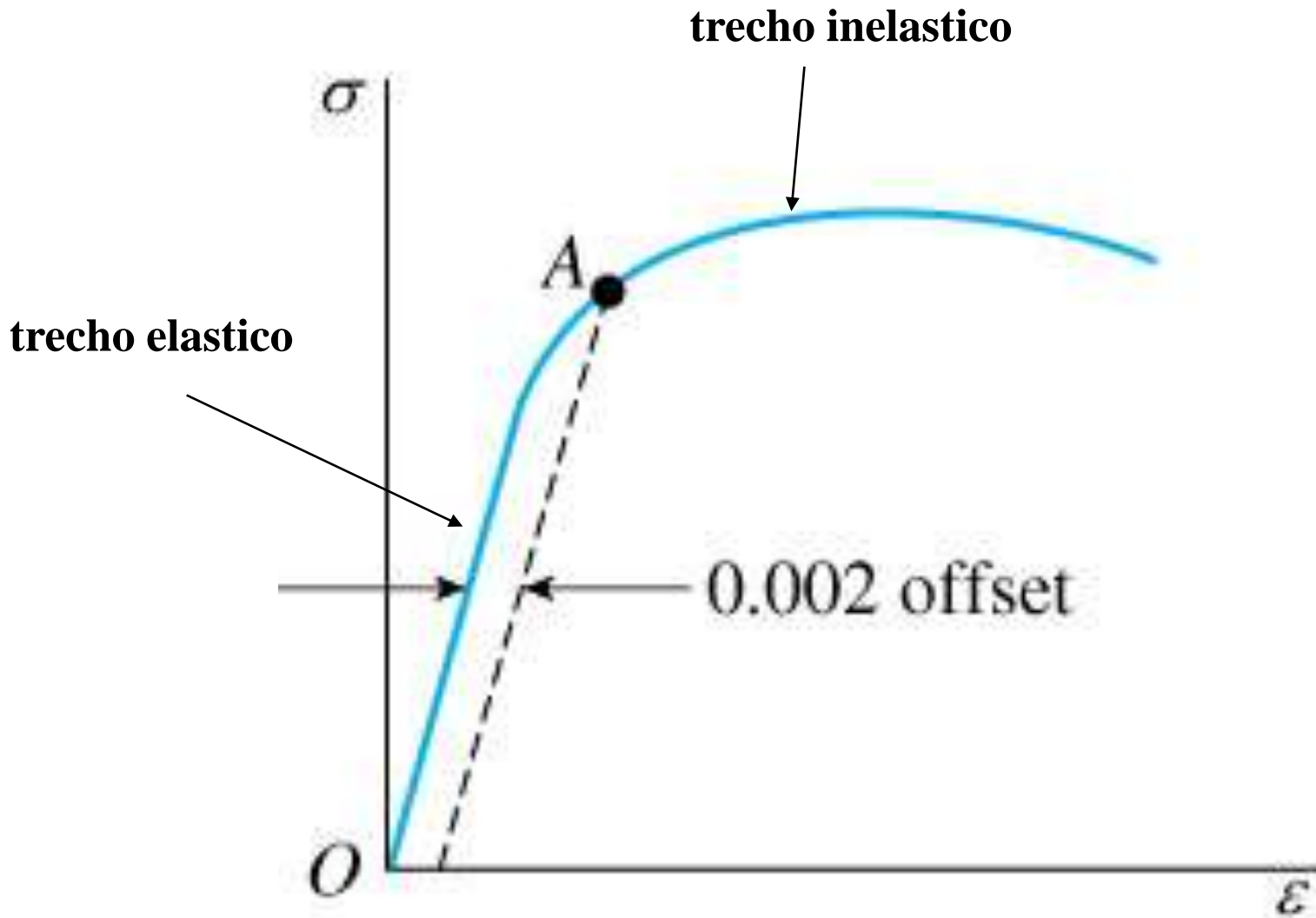


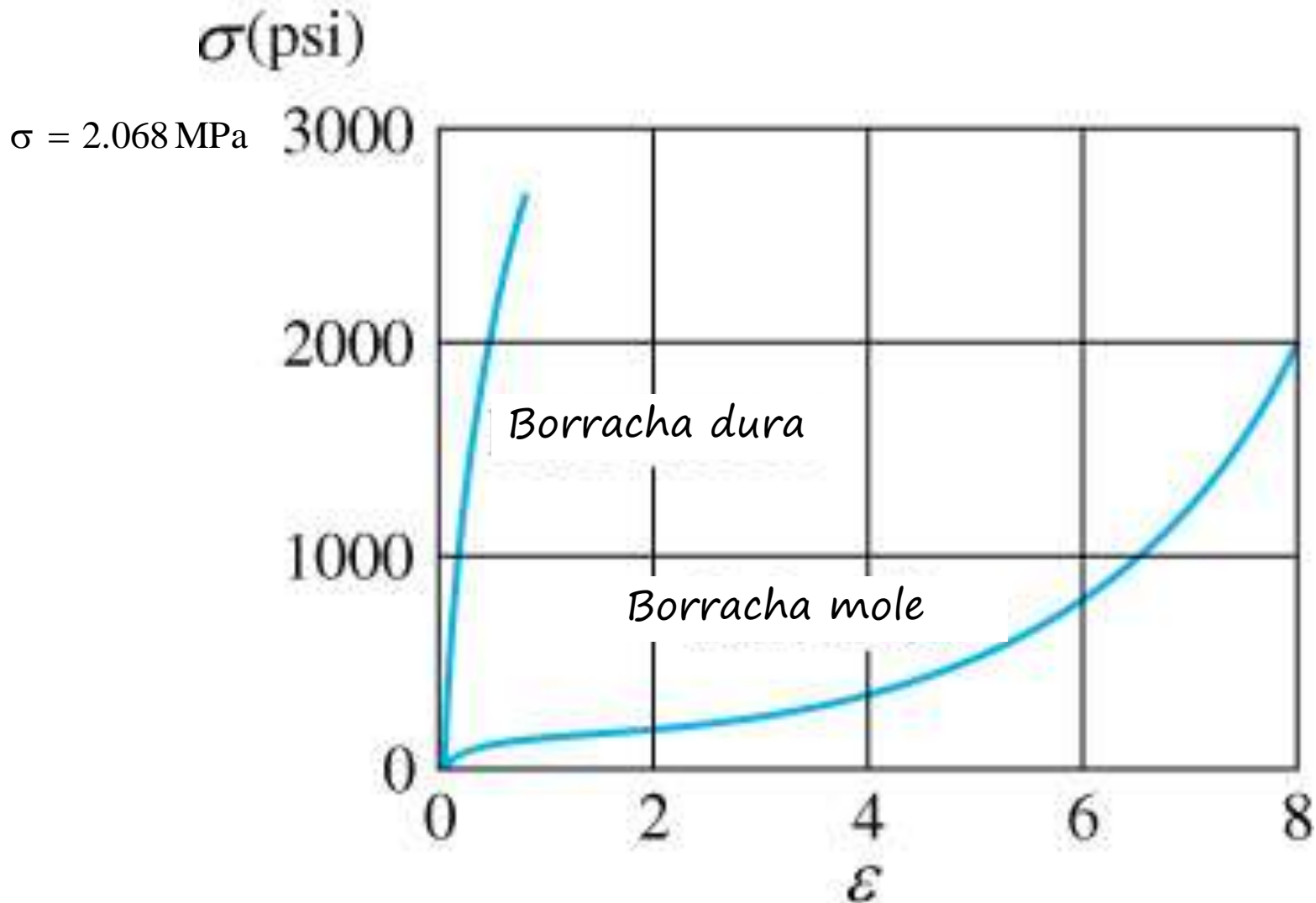
Diagrama tensão-deformação típico do aço estrutural de baixo carbono (ASTM 36) determinado a tração (fora de escala).



*Diagrama tensão-deformação típico para uma liga de alumínio*



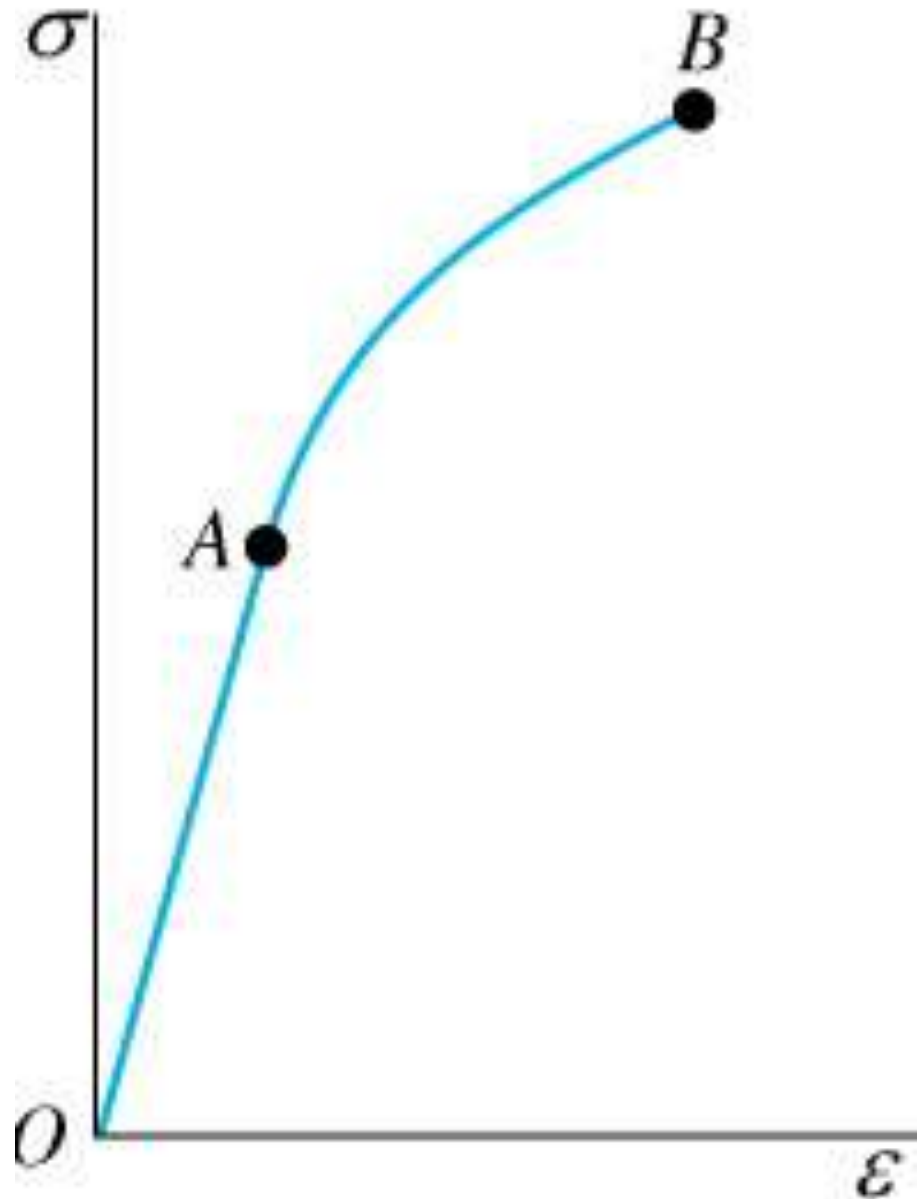
*Determinação da tensão de escoamento  $\sigma_y$  nominal*



Diagramas tensão-deformação a tração para dois tipos de borracha



Diagrama tensão-  
deformação para  
material frágil, com  
limite de  
proporcionalidade elástica  
em A e ruptura em B  
(com baixa ductilidade)



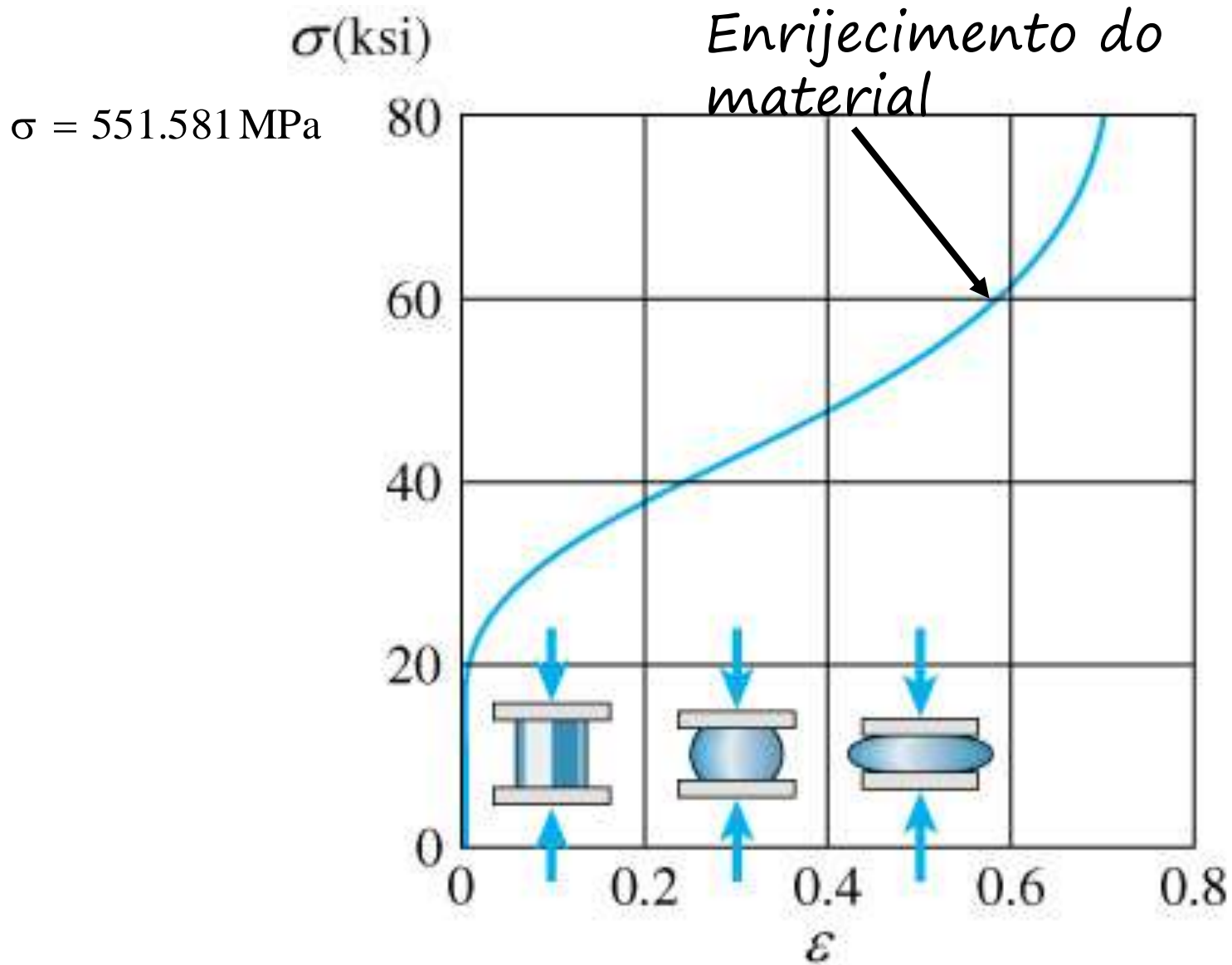
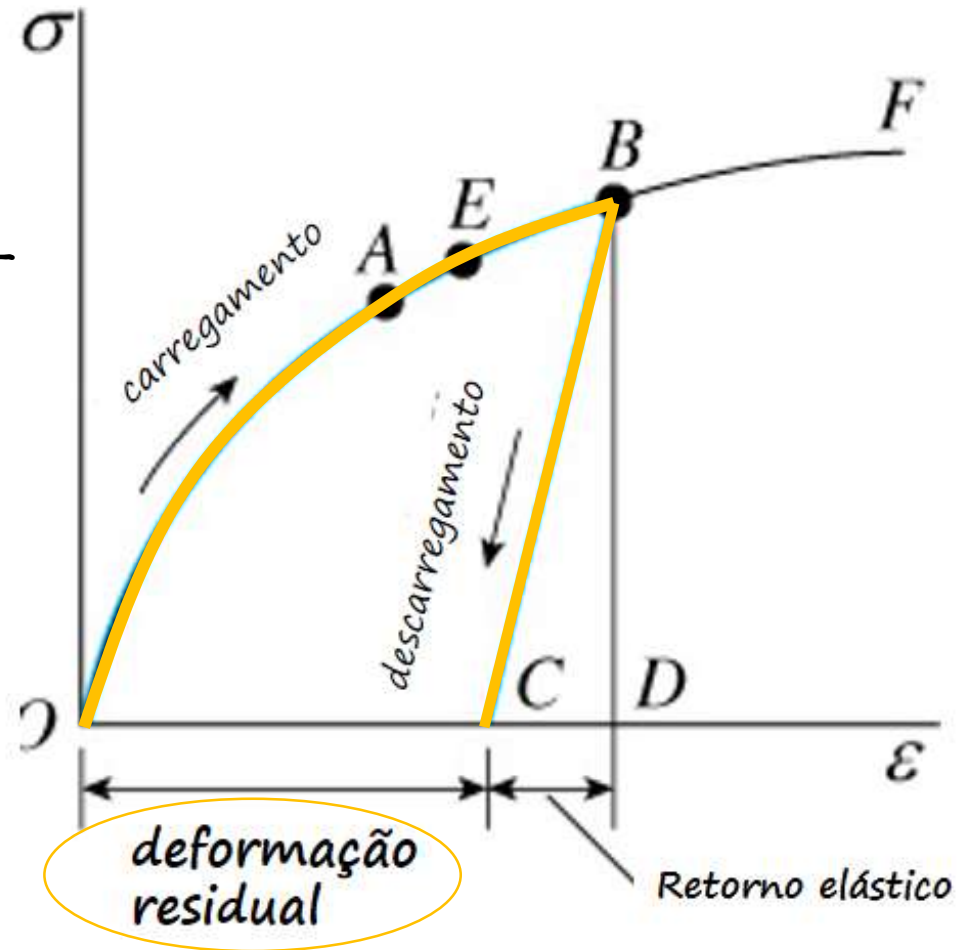


Diagrama tensão-deformação à compressão para o cobre.

# Encruamento

Diagrama tensão-deformação ilustrando um comportamento elastoplástico



# Encruamento

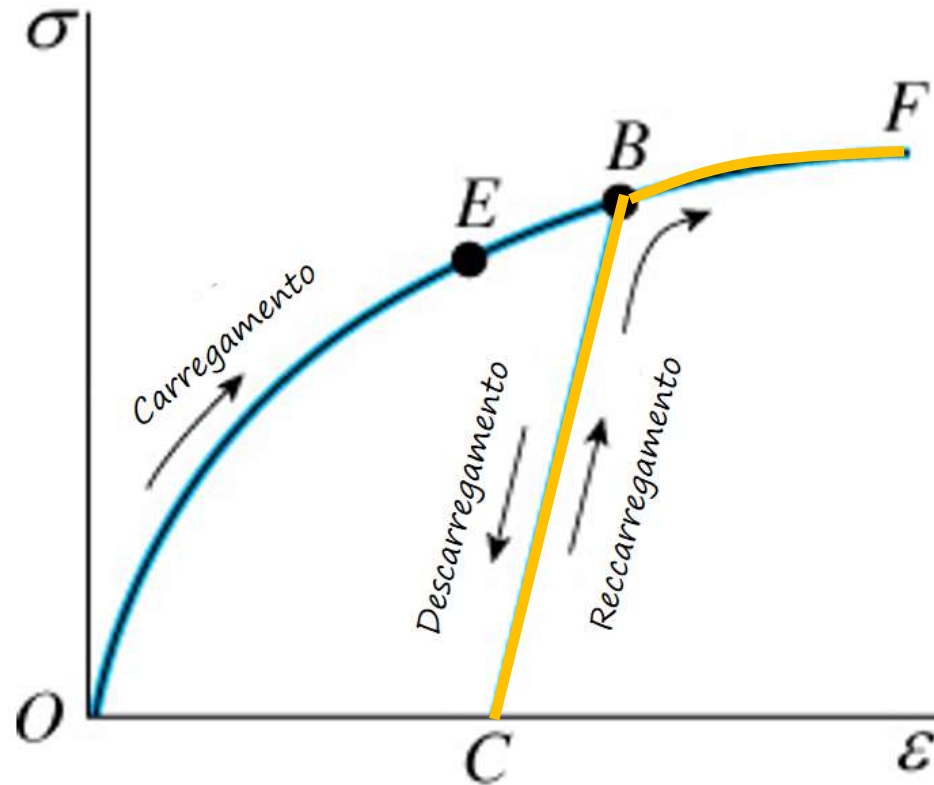


Diagrama tensão-deformação com recarregamento do material para elevação do limite elástico (tensão de escoamento)

# Tensão Limite

A máxima tensão suportada por um material frágil é  $\sigma_R$   
('tensão de ruptura')

Para materiais dúteis, admite-se que a resistência se esgote ao se atingir a tensão de escoamento  $\sigma_e$

Para considerar estes dois tipos de comportamento com um único critério, define-se a tensão limite

$$\sigma_{\text{lim}} = \begin{cases} \sigma_e & \text{(materiais dúteis)} \\ \sigma_R & \text{(materiais frágeis)} \end{cases}$$

# Segurança

Ao se projetar uma estrutura, deve-se prover uma reserva de segurança, isto é, as tensões sobre a estrutura devem ser minoradas, em relação à  $\sigma_{\text{lim}}$ , considerando um fator de segurança  $s > 1$

Define-se a tensão admissível  $\bar{\sigma} = \frac{\sigma_{\text{lim}}}{s}$

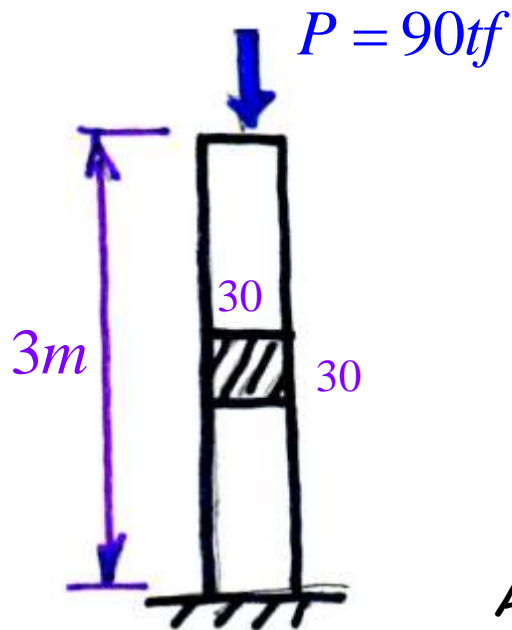
Valores típicos  $\begin{cases} s = 1,5 & (\text{aço}) \\ s = 2,0 & (\text{concreto}) \end{cases}$

Deve-se verificar que  $\sigma_{\text{max}} \leq \bar{\sigma}$ , em toda estrutura

Nota: na prática de projeto o assunto é mais elaborado, sendo os coeficientes de segurança divididos entre coeficientes de majoração das cargas e coeficientes de minoração das resistências, e recebem um tratamento probabilístico, como será visto em PEF2604.

Exemplo: Verificar o pilar para  $s=2$ , sendo  
Redimensionar, se necessário!

$$\sigma_R = 15 \text{ MPa}$$



$$\bar{\sigma} = \frac{\sigma_R}{s} = \frac{15}{2} = 7,5 \text{ MPa}$$

$$\sigma_x = \frac{N}{A} = -\frac{90 \times 10^4}{9 \times 10^{-2}} = -10 \times 10^6 \frac{N}{\text{m}^2} = -10 \text{ MPa}$$

$$|\sigma_x| < \sigma_R \quad \therefore \text{n\~{o} rompe!}$$

$$|\sigma_x| > \bar{\sigma} \quad \therefore \text{"n\~{o} passa!"}$$

Área mínima:  $|\sigma_x| = \frac{|N|}{A} \leq \bar{\sigma} \quad \therefore \frac{|N|}{A_{\min}} = \bar{\sigma}$

$$A_{\min} = \frac{|N|}{\bar{\sigma}} = \frac{90 \times 10^4}{7,5 \times 10^6} = 12 \times 10^{-2} \text{ m}^2$$

Lado mínimo:  $a_{\min} = \sqrt{A_{\min}} = \sqrt{12 \times 10^{-2}} = 0,346 \text{ m}$

$$a = 35 \text{ cm}$$

# Estabilidade do Equilíbrio



Bill Dan



Equilíbrio  
Estável



Equilíbrio  
Instável

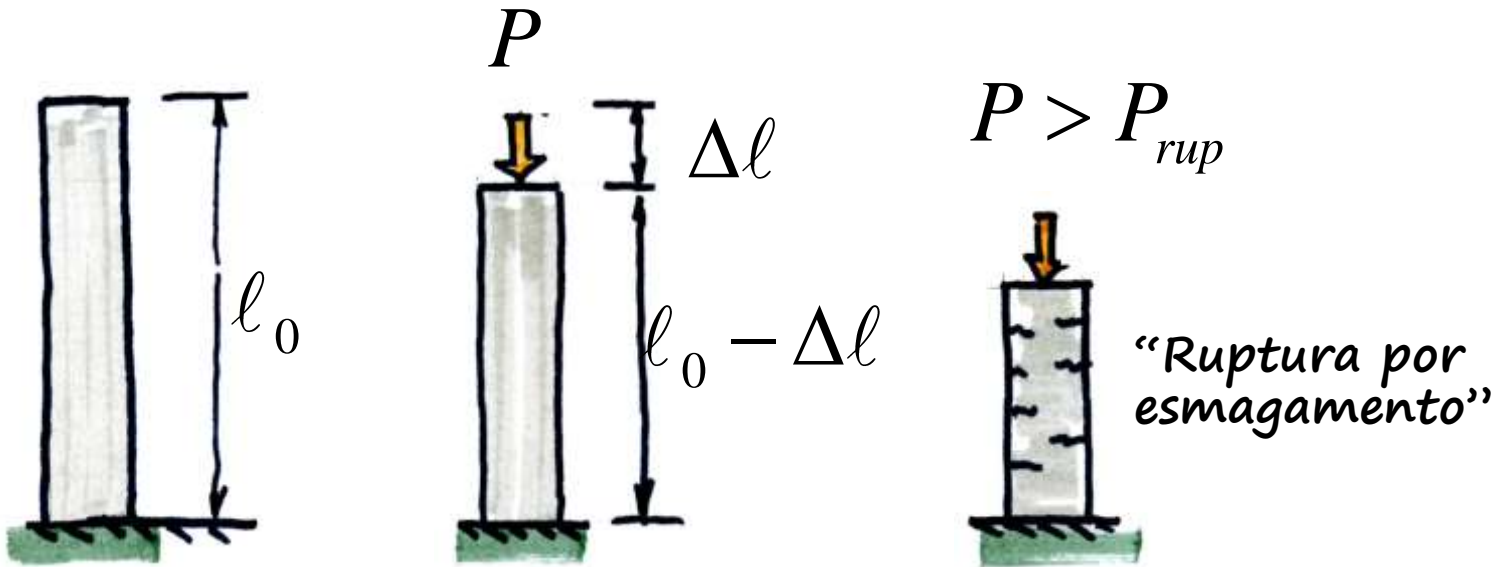


Equilíbrio  
Indiferente



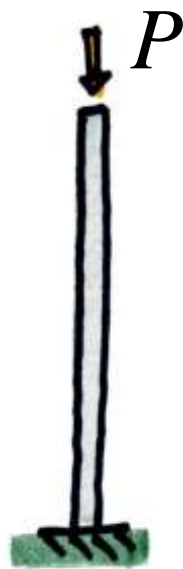
# Instabilidade Elástica (Flambagem)

Pilar Curto:



# Instabilidade Elástica (Flambagem)

Pilar Esbelto



$P > P_{crit}$

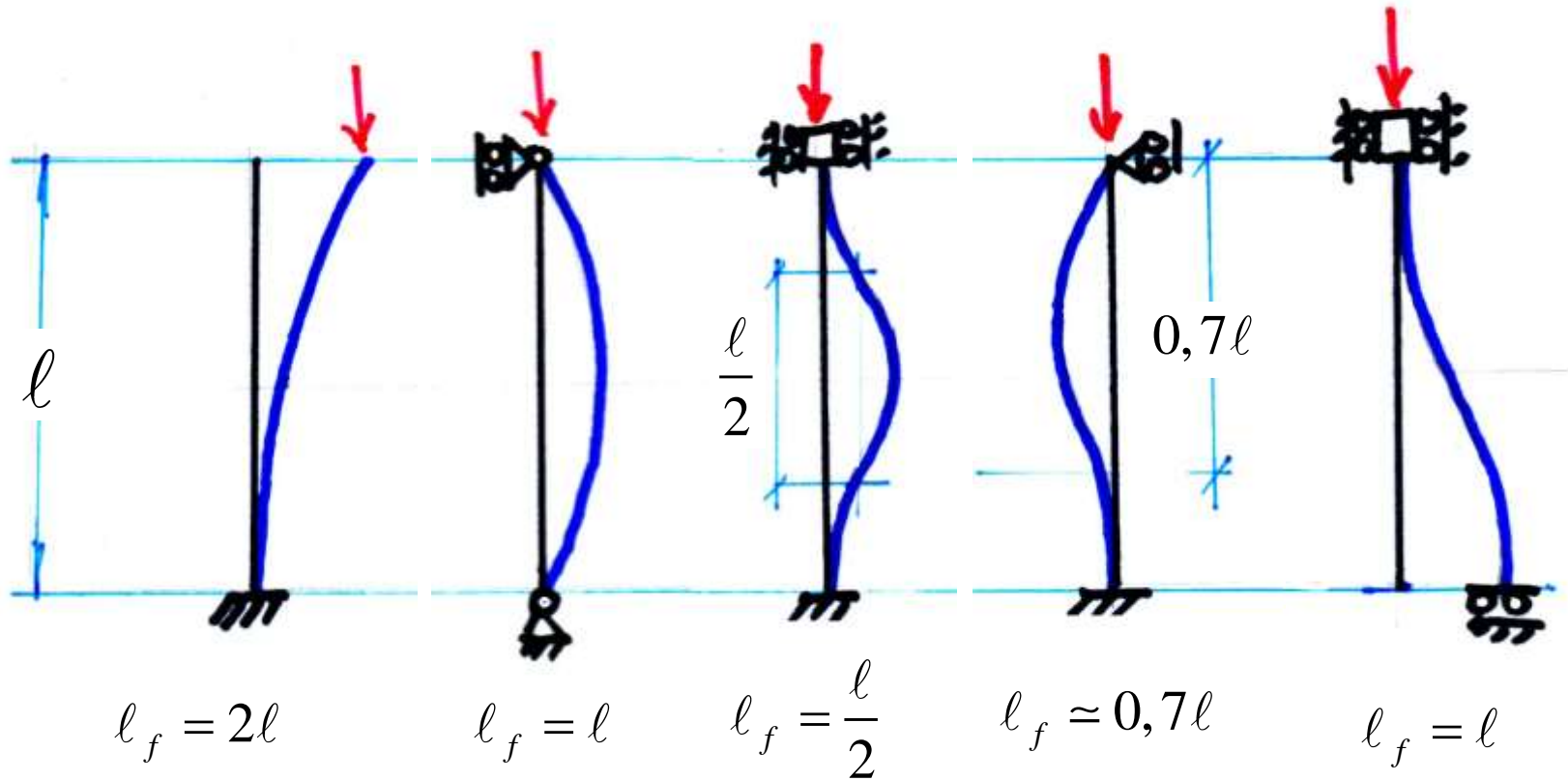
“Flambagem”  
Instabilidade Elástica”

$$P_{crit} = \frac{\pi^2 EI_{min}}{\ell_f^2}$$

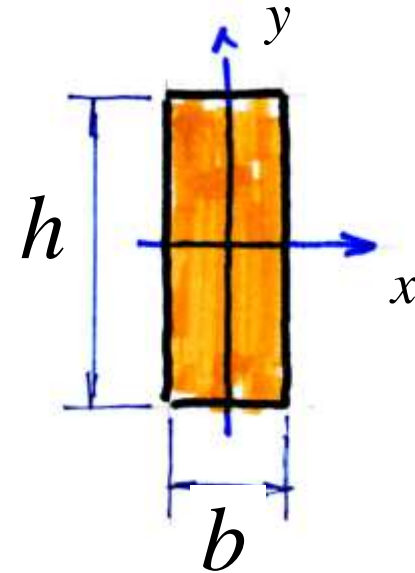
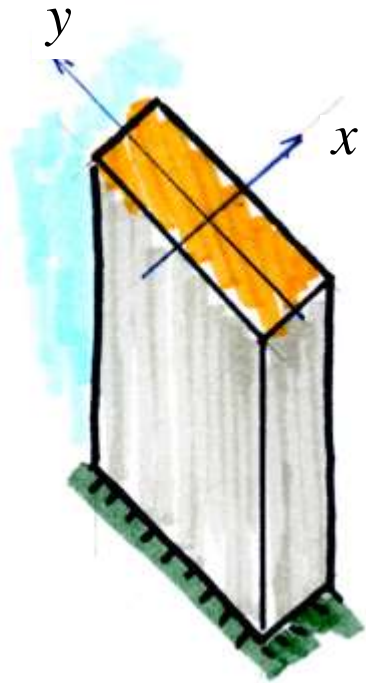
“Fórmula de Euler”

$\ell_f$ : comprimento de flambagem

$l_f$  depende da vinculação:

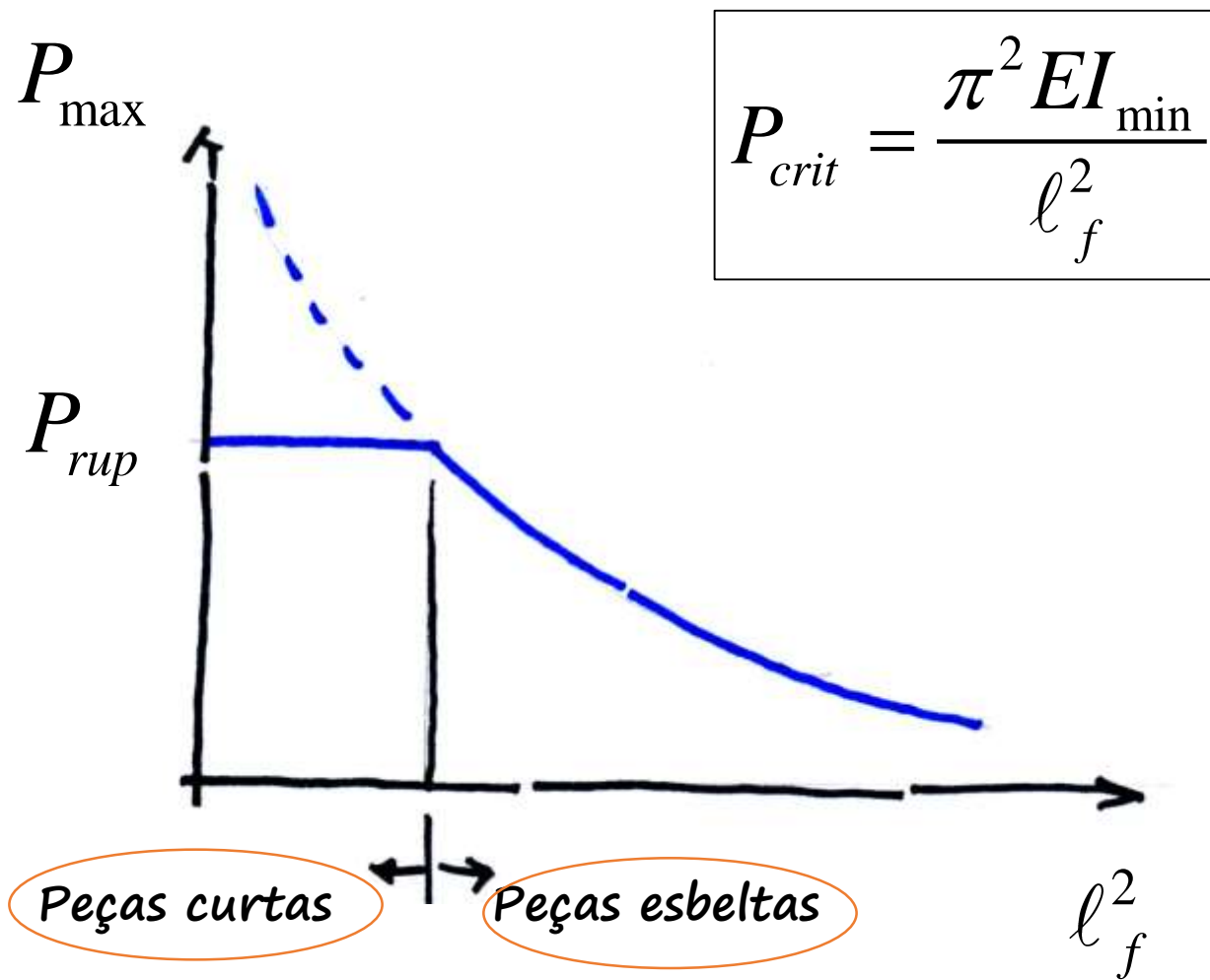


$P_{crit}$  depende do menor momento de inércia da seção transversal ( $I_{min}$ )



$$I_{max} = I_x = \frac{bh^3}{12}$$

$$I_{min} = I_y = \frac{hb^3}{12}$$



# Verificação da segurança de barras comprimidas

Duas situações devem ser verificadas:

(1) Ruptura à compressão (“esmagamento”):

$$\sigma_{\max} < \bar{\sigma} \quad \therefore \quad \sigma_{\max} = \frac{P}{A} \leq \frac{\sigma_{\text{lim}}^c}{s}$$

(2) Instabilidade (“flambagem”):

$$P \leq \frac{P_{\text{crit}}}{s} = \frac{1}{s} \frac{\pi^2 EI_{\min}}{\ell_f^2}$$

## Tensão de Flambagem (ou de Euler):

$$\sigma_{fl} = \frac{P_{crit}}{A} = \frac{\pi^2 EI_{min}}{Al_f^2}$$

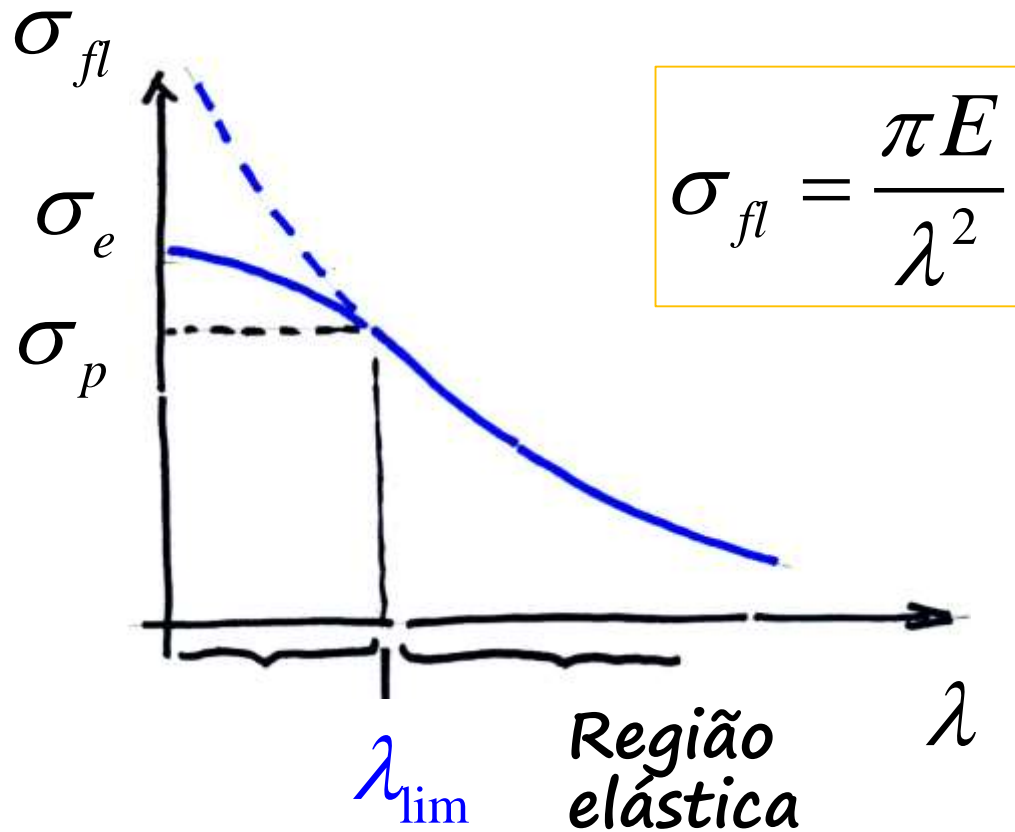
Raio de giração

$$i_{min} = \sqrt{\frac{I_{min}}{A}}$$

Índice de esbeltez  
da barra

$$\lambda = \frac{l_f}{i_{min}}$$

$$\sigma_{fl} = \frac{\pi E}{\lambda^2}$$



$$\sigma_{fl} = \frac{\pi E}{\lambda^2}$$

$\lambda_{lim}$  separa a região em que a flambagem se dá no regime elástico da região onde a flambagem ocorre no regime elastoplástico

$$\lambda_{lim} = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_p}}$$



*Por exemplo, para um aço com :*

$$\sigma_e = 240\text{MPa}; \quad E = 210\text{GPa}$$

$$\lambda_{\text{lim}} = \pi \sqrt{\frac{210 \times 10^9}{240 \times 10^6}} = 92,93$$

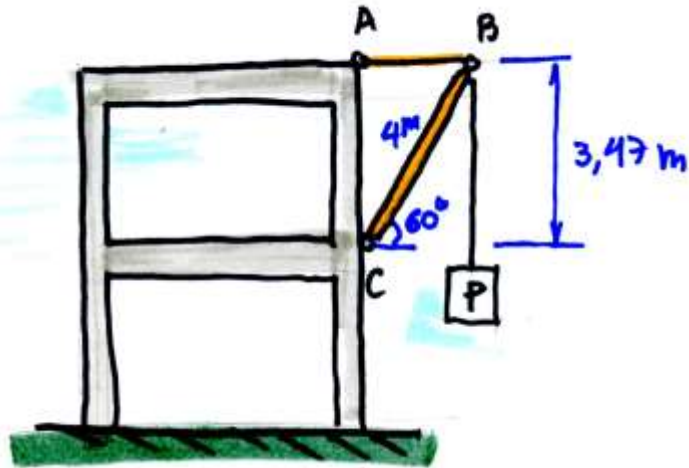
*É importante garantir que a esbeltez das peças não seja excessiva, de modo que seja possível aproveitar toda a capacidade resistente dos materiais*

*Por esta razão, as normas de projeto estabelecem valores máximos de esbeltez.*

*Por exemplo, para as estruturas metálicas (NBR8800)*

$$\lambda \leq 200$$

Exemplo: dimensionar o cabo AB e a barra BC, sendo  $P=12\text{kN}$ .



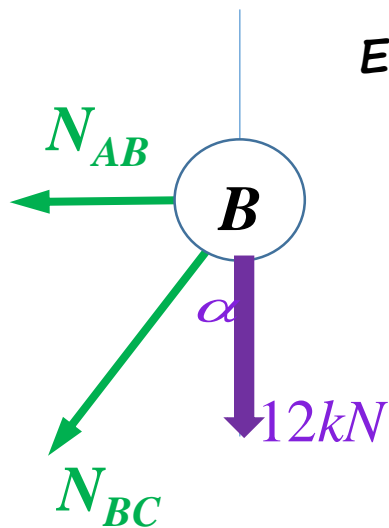
Cabo AB de Seção circular, diâmetro  $\phi$

Barra BC seção quadrada de lado "a"

Material:  $\sigma_R^t = 40\text{MPa}$ ;  $\sigma_R^c = 40\text{MPa}$

$E = 20\text{GPa}$

Coeficiente de segurança:  $s=2$



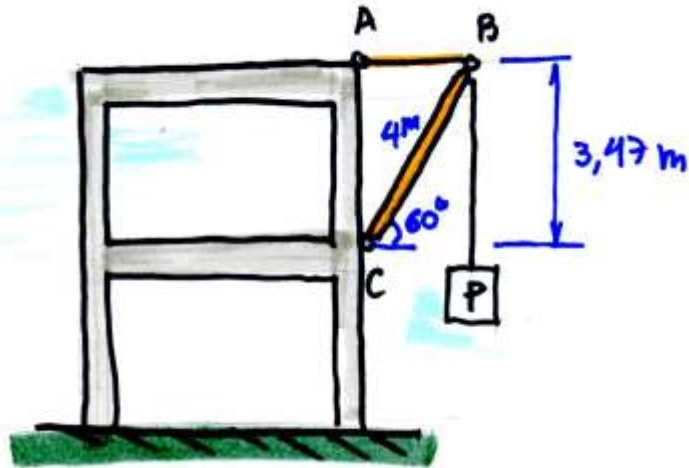
Equilíbrio do nó B:  $\sum_i F_X^i = -N_{AB} - N_{BC} \sin 30^\circ = 0$

$$\sum_i F_Y^i = -N_{BC} \cos 30^\circ - 12 = 0$$

$$N_{BC} = -\frac{12}{0,866} = -13,8\text{kN} \text{ (compressão!)}$$

$$N_{AB} = -(-13,8 \times 0,5) = +6,9\text{kN} \text{ (tração!)}$$

Exemplo: dimensionar o cabo AB e a barra BC, sendo  $P=12\text{kN}$ .



Dimensionamento:

(1) Cabo AB

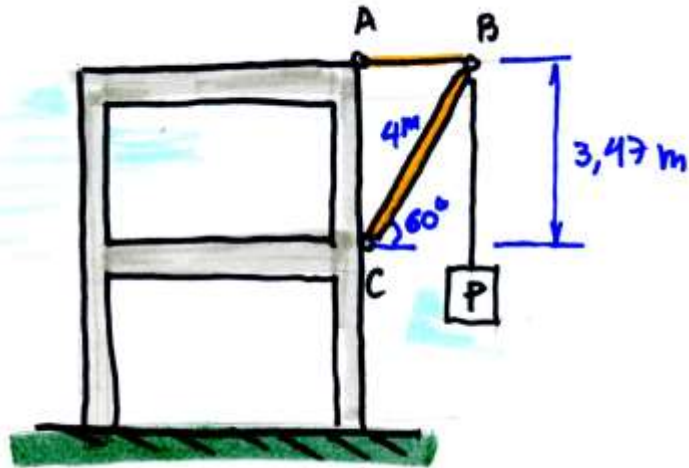
$$\sigma_{AB} = \frac{N_{AB}}{A_{cabo}} \leq \bar{\sigma} = \frac{\sigma_R^t}{S}$$

$$\left( \frac{N_{AB}}{\frac{\pi\phi^2}{4}} \right) \leq \bar{\sigma} = \frac{\sigma_R^t}{S}$$

$$\phi \geq \sqrt{\frac{4SN_{AB}}{\pi\sigma_R^t}} = \sqrt{\frac{4 \times 2 \times 6,9 \times 10^3}{\pi \times 40 \times 10^6}} = 0,021\text{m}$$

$$\phi \geq 2,1\text{cm}$$

Exemplo: dimensionar o cabo AB e a barra BC, sendo  $P=12\text{kN}$ .



Dimensionamento:

(2) Barra BC  $A = a^2$  ;  $I = \frac{a^4}{12}$

(2.1) Esmagamento

$$\sigma = \frac{|N_{BC}|}{a^2} \leq \frac{\sigma_R^c}{s}$$

$$a \geq \sqrt{\frac{s |N_{BC}|}{\sigma_R^c}} = \sqrt{\frac{2 \times 13,8 \times 10^3}{40 \times 10^6}} = 0,026\text{m}$$

(2.2) Flambagem

$$|N_{BC}| \leq \frac{P_{crit}}{s} = \frac{1}{s} \frac{\pi^2 EI}{\ell_f^2} = \frac{1}{s} \frac{\pi^2 E a^4}{\ell^2 12}$$

$$a \geq \sqrt[4]{\frac{12s\ell^2 |N_{BC}|}{\pi^2 E}} = \sqrt[4]{\frac{12 \times 2 \times 4^2 \times 13,8 \times 10^3}{\pi^2 \times 20 \times 10^9}} = 0,071\text{m} \quad \boxed{a \geq 7,1\text{cm}}$$