Exercícios Comentados Bloco 1

2. Uma barra delgada de massa $m = 500$ g encontra-se ligada na extremidade superior a uma mola de constante elástica k_1 e na extremidade inferior a outra mola de constante elástica k_2. A barra pode girar livremente em torno de um eixo perpendicular que passa pelo ponto O (onde encontra-se o pino de suspensão), a uma distância l_1 da extremidade superior e l_2 da extremidade inferior ($l_1 < l_2$). Quando a barra se encontra na posição vertical ambas as molas estão relaxadas.

(a) Obtenha a equação diferencial que descreve o movimento da barra para pequenas oscilações em torno da posição de equilíbrio.

(b) Calcule o período das oscilações quando $l_1 = l_2 = l/2$, $k_1 = k_2 = 3$ N/m.

Solução Comentada

(a) Para obter a equação que descreve o movimento da barra, primeiramente é preciso adotar um sistema de coordenadas conveniente. A figura 1 ilustra a situação do problema e o sistema de coordenadas adotado neste caso. Nele a origem O foi colocada no pino de suspensão.

Dado que a barra realiza pequenas rotações em torno do eixo O, a maneira mais natural de descrever seu movimento é a partir do ângulo de deslocamento θ formado com a posição vertical. Sendo assim, o procedimento a seguir será encontrar a equação da dinâmica de rotação da barra a partir da 2a lei de Newton na forma apropriada para rotações

$$\sum \vec{\tau} = I\vec{\alpha} \, . \tag{1}$$

Suponha agora que num certo instante de tempo a barra encontra-se deslocada de um pequeno ângulo θ, conforme a figura 1, de forma que as forças restaurados das molas possam ser consideradas como essencialmente ao longo do eixo x. Do desenho, podemos distinguir as seguintes forças que atuam sobre a barra

$$\vec{F}_{e1} = -k_1 x_1 \hat{x} \qquad \vec{F}_{e2} = -k_2 x_2 \hat{x} \qquad \vec{P} = -mg\hat{y} \, , \tag{2}$$

com

$$x_1 = -l_1 \sin\theta \qquad x_2 = l_2 \sin\theta \, , \tag{3}$$

e levando-se em conta o ponto de aplicação de cada força, podemos calcular seus respectivos torques com relação ao ponto O

$$\vec{\tau}_{e1} = \vec{r}_1 \times \vec{F}_{e1} \qquad \vec{\tau}_{e2} = \vec{r}_2 \times \vec{F}_{e2} \qquad \vec{\tau}_P = \vec{r}_{CM} \times \vec{P} \, . \tag{4}$$

Do desenho também podemos ver que

$$\vec{r}_1 = -l_1 \sin\theta\hat{x} + l_1\cos\theta\hat{y} \qquad \vec{r}_2 = l_2\sin\theta\hat{x} - l_2\cos\theta\hat{y} \qquad \vec{r}_{CM} = \frac{l_2 - l_1}{2}\sin\theta\hat{x} - \frac{l_2 - l_1}{2}\cos\theta\hat{y} \tag{5}$$

e usando eq.(5) em eq.(4) temos

$$\vec{\tau}_{e1} = (-l_1\sin\theta\hat{x} + l_1\cos\theta\hat{y}) \times (k_1 l_1 \sin\theta\hat{x}) = k_1 l_1^2 \sin\theta\cos\theta(\hat{y}\times\hat{x}) = -k_1 l_1^2 \sin\theta\cos\theta\hat{z} \tag{6}$$

$$\vec{\tau}_{e2} = (l_2\sin\theta\hat{x} - l_2\cos\theta\hat{y}) \times (-k_2 l_2 \sin\theta\hat{x}) = k_2 l_2^2 \sin\theta\cos\theta(\hat{y}\times\hat{x}) = -k_2 l_2^2 \sin\theta\cos\theta\hat{z} \tag{7}$$

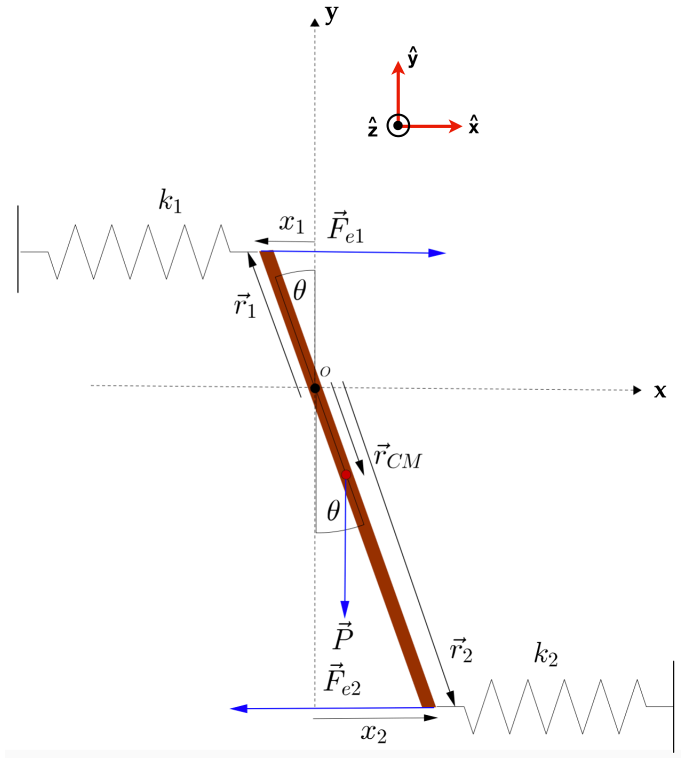

Figura 1:

$$\vec{\tau}_P = \left\{ \frac{l_2 - l_1}{2} \sin\theta \hat{x} - \frac{l_2 - l_1}{2} \cos\theta \hat{y} \right\} \times (-mg\hat{y}) = -mg\frac{l_2 - l_1}{2} \sin\theta (\hat{x} \times \hat{y}) = -mg\frac{l_2 - l_1}{2} \sin\theta \hat{z}\,, \tag{8}$$

com o qual podemos escrever para o eixo cartesiano z

$$-\left\{ mg\frac{l_2 - l_1}{2} \sin\theta + k_1 l_1^2 \sin\theta\cos\theta + k_2 l_2^2 \sin\theta\cos\theta \right\} = I_O\ddot{\theta} \tag{9}$$

ou equivalentemente

$$I_O\ddot{\theta} + \left\{ mg\frac{l_2 - l_1}{2} \sin\theta + k_1 l_1^2 \sin\theta\cos\theta + k_2 l_2^2 \sin\theta\cos\theta \right\} = 0\,. \tag{10}$$

Agora no limite de pequenas amplitudes podemos considerar

$$\theta \ll 1 \Longrightarrow \sin\theta \simeq \theta\ ,\ \cos\theta \simeq 1 \tag{11}$$

com o qual a eq.(10) fica

$$I_O\ddot{\theta} + \left\{ mg\frac{l_2 - l_1}{2} + k_1 l_1^2 + k_2 l_2^2 \right\} \theta = 0\,, \tag{12}$$

que, de fato, é uma equação diferencial de M.H.S. do tipo

$$\ddot{\theta} + \omega^2\theta = 0 \tag{13}$$

com

$$\omega \equiv \sqrt{\frac{mg(l_2 - l_1)/2 + k_1 l_1^2 + k_2 l_2^2}{I_O}}\,. \tag{14}$$

(b) Para $l_1 = l_2 = l/2$, o ponto O coincide com o CM da barra e $I_O = I_{CM} = ml^2/12$, de forma que para $k_1 = k_2 = k$ obtemos para ω

$$\omega = \sqrt{\frac{6k}{m}} \quad \Longrightarrow \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{6k}} \approx 1\text{s} \,. \tag{15}$$

Solução alternativa

Neste caso em particular, assim como em muitos outros similares, a equação do movimento pode ser obtida de uma maneira mais simples a partir dos conceitos de conservação da energia mecânica no M.H.S. Partindo novamente da situação ilustrada na figura 1, podemos obter a energia mecânica total do sistema num instante de tempo arbitrário como a soma da energia potencial gravitacional + energia potencial elástica + energia cinética de rotação.

$$E = U_g + U_k + K_r = \text{const.} \tag{16}$$

Tomando o zero de energia potencial gravitacional na posição do CM quando a barra passa pela posição vertical, do desenho mostrado na fig(ref) podemos ver que

$$U_g = mg\frac{l_2 - l_1}{2}(1 - \cos\theta) \tag{17}$$

$$U_k = \frac{k_1 x_1^2}{2} + \frac{k_2 x_2^2}{2} = \frac{k_1 l_1^2 \sin^2(\theta)}{2} + \frac{k_2 l_2^2 \sin^2(\theta)}{2} \tag{18}$$

$$K_r = \frac{I_O \ddot{\theta}^2}{2} \,, \tag{19}$$

e a energia total

$$E = mg\frac{l_2 - l_1}{2}(1 - \cos\theta) + \frac{k_1 l_1^2 \sin^2(\theta)}{2} + \frac{k_2 l_2^2 \sin^2(\theta)}{2} + \frac{I_O \ddot{\theta}^2}{2} = \text{const.} \tag{20}$$

Derivando ambos membros da eq.(20) obtemos

$$mg\frac{l_2 - l_1}{2}\sin\theta\,\dot{\theta} + k_1 l_1^2 \sin\theta\cos\theta\,\dot{\theta} + k_2 l_2^2 \sin\theta\cos\theta\,\dot{\theta} + I_O\ddot{\theta}\dot{\theta} = 0 \tag{21}$$

ou

$$\left(mg\frac{l_2 - l_1}{2}\sin\theta + k_1 l_1^2 \sin\theta\cos\theta + k_2 l_2^2 \sin\theta\cos\theta + I_O\ddot{\theta}\right)\dot{\theta} = 0 \tag{22}$$

que é equivalente à eq.(10).