Exercícios Comentados Bloco 1

1. Uma haste uniforme é colocada sobre duas rodas giratórias, conforme a figura abaixo. Os eixos das rodas estão separados por uma distância $l = 20$ cm, o coeficiente de atrito estático entre a haste e as rodas é $\mu = 0,18$. Demonstre que neste caso a haste executa oscilações harmônicas. Encontre o período dessas oscilações.

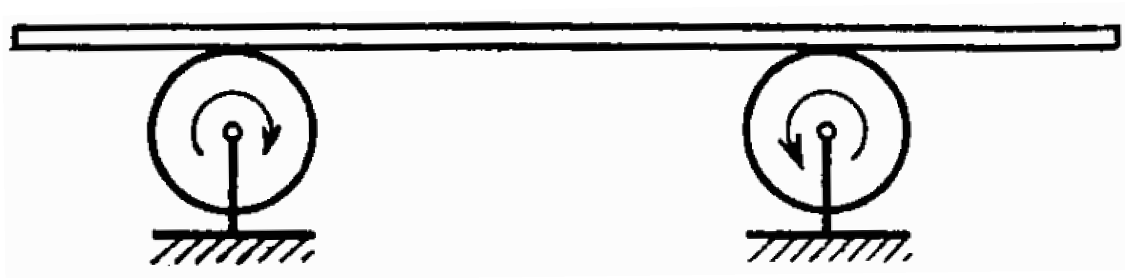

Figura 1:

Solução Comentada

Para demonstrar que a haste realiza oscilações harmônicas é preciso mostrar que a equação do movimento do seu CM é do tipo $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$. Para isto é conveniente adotar um sistema de coordenadas apropriado e passar a representar as forças que atuam sobre a haste. A figura 2 ilustra a situação do problema, bem como define o sistema de coordenadas adotado. Nele, a origem foi tomada no centro entre os dois pontos de contato das rodas com a haste.

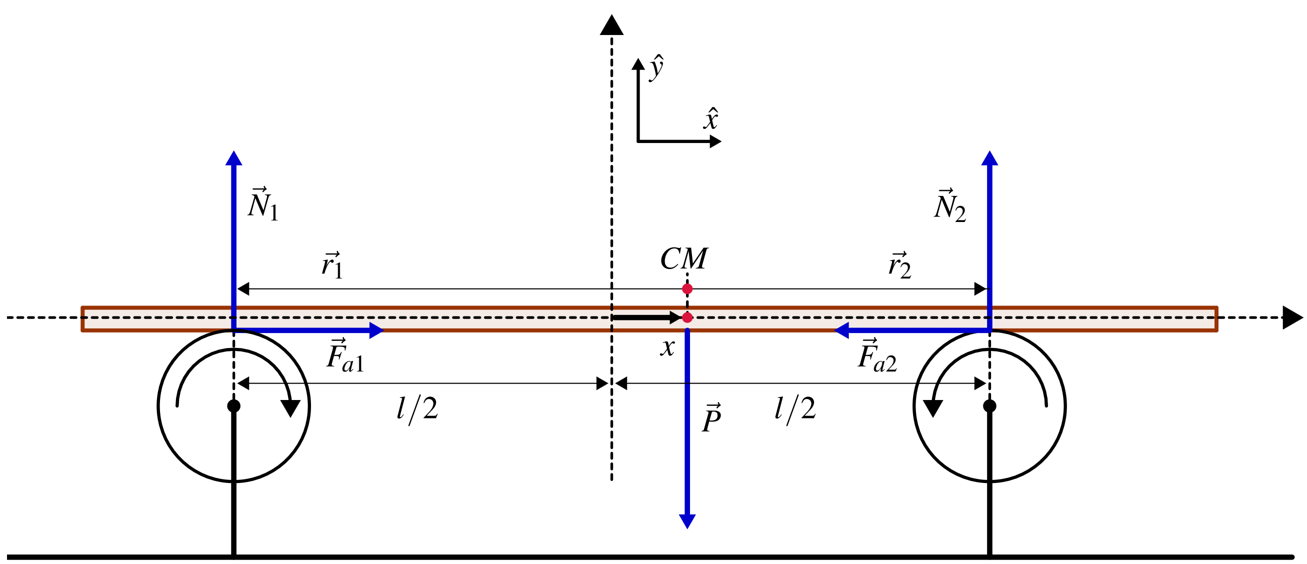

Figura 2:

Suponha-se que o CM da haste, num instante de tempo arbitrário, encontra-se deslocado de uma pequena distância x da origem.

Neste cenário, a equação de movimento do CM é

$$\vec{F} = \vec{F}_{a1} + \vec{F}_{a2} + \vec{N}_1 + \vec{N}_2 + \vec{P} = m\vec{a}_{CM} \tag{1}$$

com

$$\vec{F_{a1}} = \mu N_1 \hat{x} \qquad \vec{F_{a2}} = \mu N_2(-\hat{x}) \tag{2}$$

e

$$\vec{N_1} = N_1\hat{y} \qquad \vec{N_2} = N_2\hat{y} \qquad \vec{P} = mg(-\hat{y}) \tag{3}$$

Nos eixos cartesianos, temos:

I-) No eixo $\hat{x}$

$$F_{a1} + F_{a2} = m\ddot{x} \tag{4}$$

$$\mu(N_1 - N_2) = m\ddot{x} \implies \mu(N_1 - N_2) = m\ddot{x} \tag{5}$$

II-) No eixo $\hat{y}$

$$N_1 + N_2 - mg = 0 \implies N_1 + N_2 = mg\ , \tag{6}$$

e substituindo eq.(6) em eq.(5) obtemos para a coordenada x do CM da haste:

$$\mu(2N_1 - mg) = m\ddot{x} \tag{7}$$

Para encontrar a nossa última incógnita N_1 podemos usar a condição de estabilidade do movimento de rotação da haste. Isto é, dado que a haste não realiza um movimento de rotação, então o torque total com respeito ao centro de massas debe ser nulo.

O torque das forças de atrito é nulo já que a linha de ação destas passa pelo CM. O torque do peso $\vec{P}$ também é nulo já que, por definição, o peso é uma força cujo ponto de aplicação é justamente o CM. Com isto, temos que as únicas forças capazes de produzir torque em relação ao CM são as forças normais $\vec{N}_1$ e $\vec{N}_2$. Sendo assim, temos que:

III-) A ausência de rotação implica

$$\sum \vec{\tau}_{CM} = \vec{0} \implies \vec{\tau}_{N_1} + \vec{\tau}_{N_2} = \vec{0} \tag{8}$$

$$\vec{\tau}_{N_1} = \vec{r_1} \times \vec{N_1}\ ,\ \vec{\tau}_{N_2} = \vec{r_2} \times \vec{N_2} \implies \vec{r_1} \times \vec{N_1} + \vec{r_2} \times \vec{N_2} = \vec{0}\ , \tag{9}$$

do desenho podemos ver que

$$\vec{r_1} = (l/2 + x)(-\hat{x})\ ,\ \vec{N_1} = N_1\hat{y} \implies \vec{r_1} \times \vec{N_1} = -(l/2 + x)N_1(\hat{x} \times \hat{y}) = -(l/2 + x)N_1\hat{z} \tag{10}$$

$$\vec{r_2} = (l/2 - x)\hat{x}\ ,\ \vec{N_2} = N_2\hat{y} \implies \vec{r_2} \times \vec{N_2} = (l/2 - x)N_2(\hat{x} \times \hat{y}) = (l/2 - x)N_2\hat{z} \tag{11}$$

$$\vec{\tau}_{N_1} + \vec{\tau}_{N_2} = [(l/2 - x)N_2 - (l/2 + x)N_1]\hat{z} = 0 \implies (l/2 + x)N_1 = (l/2 - x)N_2\ , \tag{12}$$

e mais uma vez usando eq.(6) em eq.(12) obtemos

$$N_1 = \frac{mg}{2}(1 - 2x/l). \tag{13}$$

Finalmente substituindo eq.(13) em eq.(7) temos

$$\ddot{x} + \frac{2\mu g}{l}x = 0 \equiv \ddot{x} + \omega^2 x = 0 \quad \text{com} \quad \omega = \sqrt{\frac{2\mu g}{l}}. \tag{14}$$

O período das oscilações é calculado a partir da frequência ω mediante

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{2\mu g}} = \pi\sqrt{\frac{2l}{\mu g}} = 1.5\ \text{s} \tag{15}$$