ZEROS DE SISTEMAS MIMO

1. Zeros de transmissão

- O cálculo dos zeros de um sistema SISO é extremamente simples de ser efetuado, pois são as raízes do polinômio do numerador de sua função de transferência.

  Por exemplo, considere o sistema dinâmico SISO a seguir.

  $$G(s) = \frac{s+2}{s^2+7s+12}.$$

  Os zeros desse sistema são facilmente obtidos calculando as raízes do numerador, que no caso resulta em $z = -2$.

- No caso de sistemas MIMO o cálculo dos zeros do sistema é mais complicado, pois a função de transferência de um sistema MIMO é uma matriz composta de várias funções de transferências.

  Todas as funções de transferência de um sistema MIMO têm o mesmo denominador, cujas raízes definem os pólos do sistema. Porém os numeradores das funções de transferência de um sistema MIMO são diferentes e, portanto, cada uma apresenta raízes diferentes para o seu numerador.

  Por exemplo, considere o sistema MIMO com duas entradas e duas saídas abaixo:

  $$\mathbf{G}(s) = \begin{bmatrix} \dfrac{s^2+8s+12}{s^2+7s+12} & \dfrac{1}{s^2+7s+12} \\ \dfrac{-12}{s^2+7s+12} & \dfrac{s+7}{s^2+7s+12} \end{bmatrix}$$

  Se a mesma técnica para calcular os zeros de um sistema SISO for utilizada para obter os zeros desse sistema MIMO, teriam-se os seguintes zeros:

  $$z_1 = -6;\ z_2 = -2;\ z_3 = -7.$$

  Esses valores são os zeros de cada uma das funções de transferência do sistema, mas não são necessariamente os zeros do sistema MIMO $\Rightarrow$ existem condições que devem ser satisfeitas para os zeros de um sistema MIMO.

  Somente a título de completeza, esse sistema MIMO tem somente um zero em s = –8.

Observações:

a) Os zeros de um sistema MIMO são denominados zeros de transmissão;

b) Para um sistema SISO os zeros de transmissão são iguais aos zeros da função de transferência do sistema.

2. Definição de zero de transmissão

Um zero de transmissão, ou simplesmente um zero de um sistema dinâmico MIMO, é um valor da variável da Transformada de Laplace "s", denominado de freqüência generalizada (z), para o qual a resposta temporal da saída do sistema é zero, ou seja, $\mathbf{y}(t) = 0$ para $t \geq 0$, para um vetor de entradas diferente de zero variando segundo $\mathbf{u}(t) = \mathbf{u_0} e^{zt}$ e para uma determina condição inicial $\mathbf{x_0^*}$.

3. Cálculo dos zeros de transmissão

- Existe uma condição inicial ($\mathbf{x_0^*}$) associada com o valor de um zero de transmissão. Quando o vetor de entradas de um sistema tem freqüência generalizada igual ao valor do zero (z), ou seja:

$$\boxed{\mathbf{u}(t) = \mathbf{u_0} e^{zt}} \tag{1}$$

e a condição inicial dos estado do sistema é dada por $\mathbf{x_0^*}$, então tem-se que:

$$\boxed{\mathbf{x}(t) = \mathbf{x_0^*} e^{zt}} \tag{2}$$

e

$$\boxed{\mathbf{y}(t) = 0, \text{ para } t \geq 0.} \tag{3}$$

- Esse resultado é obtido a partir da análise a seguir. Dado um sistema dinâmico LIT de ordem n,

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \end{cases} \tag{4}$$

onde $\mathbf{x}(t) \in R^n$, $\mathbf{u}(t) \in R^m$ e $\mathbf{y}(t) \in R^p$.

Substituindo as eq. (1) e (2) na equação da dinâmica dos estados, tem-se

$$\mathbf{x_0^*} z e^{zt} = \mathbf{A}\mathbf{x_0^*} e^{zt} + \mathbf{B}\mathbf{u_0} e^{zt}. \tag{5}$$

Cancelando as exponenciais nos dois lados da expressão, obtém-se:

$$(z\mathbf{I}-\mathbf{A})\mathbf{x}_0^* = \mathbf{B}\mathbf{u}_0\,, \tag{6}$$

que escrita na forma de matriz fica:

$$\begin{bmatrix} z\mathbf{I}-\mathbf{A} & -\mathbf{B} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathbf{x}_0^* \\ \mathbf{u}_0 \end{bmatrix} = \mathbf{0}\,. \tag{7}$$

Como a saída do sistema é zero quando a entrada tem a freqüência generalizada do zero então, substituindo as eq. (1) e (2) na equação das saídas do sistema, tem-se:

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{0} = \mathbf{C}\mathbf{x}_0^* e^{zt} + \mathbf{D}\mathbf{u}_0 e^{zt}\,. \tag{8}$$

Cancelando as exponenciais e escrevendo na forma matricial fica:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathbf{x}_0^* \\ \mathbf{u}_0 \end{bmatrix} = \mathbf{0}\,. \tag{9}$$

Escrevendo as eq. (7) e (9) em uma única matriz, tem-se:

$$\boxed{\begin{bmatrix} z\mathbf{I}-\mathbf{A} & -\mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathbf{x}_0^* \\ \mathbf{u}_0 \end{bmatrix} = \mathbf{0}\,.} \tag{10}$$

Se z é um zero de transmissão do sistema, então existe uma solução não trivial para a eq. (10).

A expressão (10) consiste em um problema chamado de “Autovalor Generalizado” cuja solução não trivial fornece o valor dos zeros de transmissão do sistema.

Problema de autovalor generalizado:

Um problema de autovalor generalizado consiste em um problema de autovalor para a associação de duas matrizes. Por exemplo, sejam as matrizes $\mathbf{E}$ e $\mathbf{F}$, o problema de autovalor generalizado para essas duas matrizes é definido pela seguinte expressão:

$$[\lambda\mathbf{E}-\mathbf{F}]\boldsymbol{\xi} = \mathbf{0}\,, \tag{11}$$

onde, λ são os autovalores generalizados das matrizes $\mathbf{E}$ e $\mathbf{F}$, e $\boldsymbol{\xi}$ são os autovetores generalizados das matrizes $\mathbf{E}$ e $\mathbf{F}$.

A solução não trivial da eq. (11) é obtida da mesma forma que é feito o cálculo dos autovalores e autovetores de uma matriz. Portanto, os autovalores são calculados pelas raízes do polinômio em λ, definido por:

$$\det[\lambda\mathbf{E}-\mathbf{F}] = 0\,. \tag{12}$$

Após o cálculo dos autovalores generalizados, para cada autovalor λ_i existe um autovetor associado $\boldsymbol{\xi}_\mathbf{i}$ que é calculado pela solução do seguinte sistema de equações lineares:

$$[\lambda_i \mathbf{E} - \mathbf{F}]\boldsymbol{\xi}_\mathbf{i} = \mathbf{0}. \tag{13}$$

No caso dos zeros de transmissão as matrizes $\mathbf{E}$ e $\mathbf{F}$ são identificadas por:

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{nxn} & \mathbf{0}_{nxm} \\ \mathbf{0}_{pxn} & \mathbf{0}_{pxm} \end{bmatrix}; \qquad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ -\mathbf{C} & -\mathbf{D} \end{bmatrix}. \tag{14}$$

- Aplicando a solução do problema de autovalor generalizado para o caso dos zeros de transmissão, tem-se que os valores dos zeros são as raízes do polinômio em s formado por:

$$\boxed{\det\begin{bmatrix} z\mathbf{I} - \mathbf{A} & -\mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix} = 0.} \tag{15}$$

Os autovetores generalizados associados aos valores dos zeros fornecem a condição inicial para os estados $\mathbf{x}_\mathbf{0}^*$ e o vetor de entradas $\mathbf{u}_\mathbf{0}$. Após o cálculo dos zeros, para cada zero z_i o autovetor associado é calculado por:

$$\boxed{\begin{bmatrix} z_i\mathbf{I} - \mathbf{A} & -\mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathbf{x}_{\mathbf{0},i}^* \\ \mathbf{u}_{\mathbf{0},i} \end{bmatrix} = \mathbf{0}.} \tag{16}$$

4. Exemplo

Dado o sistema dinâmico descrito pela seguinte função de transferência:

$$G(s) = \frac{s+2}{s^2 + 7s + 12}.$$

Esse sistema tem um zero em $z = -2$ e pólos em: $p_1 = -3$ e $p_2 = -4$.

- O cálculo dos zeros de transmissão usando a forma do espaço dos estados é feita como se segue. O sistema na forma do espaço dos estados é dado por:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} -7 & -12 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}u(t); \\ y(t) = [1 \quad 2]\mathbf{x}(t). \end{cases}$$

Os zeros de transmissão são calculados pelo seguinte problema de autovalor generalizado:

$$\det\begin{bmatrix} z\mathbf{I}-\mathbf{A} & -\mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} z+7 & 12 & -1 \\ -1 & z & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} = 0$$

ou,

$$z+2=0 \;\Rightarrow\; z=-2 \text{ (como esperado).}$$

A direção do zero é calculada por:

$$\begin{bmatrix} z+7 & 12 & -1 \\ -1 & z & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}_{z=-2} \begin{bmatrix} x_{01}^* \\ x_{02}^* \\ u_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 12 & -1 \\ -1 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{01}^* \\ x_{02}^* \\ u_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 5x_{01}^* + 12x_{02}^* - u_0 = 0 \\ -x_{01}^* - 2x_{02}^* = 0 \\ x_{01}^* + 2x_{02}^* = 0 \end{cases}$$

Portanto, $x_{01}^* = -2x_{02}^*$ e $u_0 = 2x_{02}^*$. Assumindo $x_{02}^* = 1$, tem-se:

$$\mathbf{x}_\mathbf{0}^* = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix},\; u_0 = 2 \text{ e } u(t) = 2e^{-2t} \text{ para } t \ge 0.$$

- Se a entrada definida pelo zero for aplicada ao sistema, tem-se:

$$u(t) = 2e^{-2t} \text{ para } t \ge 0 \Rightarrow U(s) = \frac{2}{s+2}.$$

Portanto, a solução devido à entrada é dada por:

$$Y_f(s) = \frac{(s+2)}{(s^2+7s+12)}\frac{2}{(s+2)} \Rightarrow Y_f(s) = \frac{2}{(s^2+7s+12)}.$$

Da expressão acima, pode-se notar que a saída do sistema não contém a componente dinâmica associada à entrada (e^{-2t}), ou seja, a entrada foi bloqueada pelo zero do sistema.

- Se a condição inicial definida pelo zero for aplicada ao sistema, tem-se que os estados do sistema são:

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}_\mathbf{0}^*$$

e a saída é:

$$y_h(t) = \mathbf{C}e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}_0^*$$

A transformada de Laplace de $y_h(t)$ é,

$$Y_h(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{x}_0^* = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} s+7 & 12 \\ -1 & s \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{\begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}}{(s^2+7s+12)}\begin{bmatrix} s & -12 \\ 1 & s+7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{\begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}}{(s^2+7s+12)}\begin{bmatrix} -2s-12 \\ -2+s+7 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{(-2s-12-4+2s+14)}{(s^2+7s+12)} = \frac{-2}{(s^2+7s+12)}.$$

- A saída total devido à entrada e à condição inicial será a soma das duas, ou seja:

$$Y(s) = Y_h(s) + Y_f(s) = \frac{2}{s^2+7s+12} + \frac{-2}{s^2+7s+12} = 0$$

5. Exercícios

1) Dado o sistema a seguir.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}; \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \qquad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}; \qquad \mathbf{D} = 0.$$

Pede-se:

a) Usando as técnicas de espaço dos estados calcule os zeros do sistema algebricamente e depois confirme o resultado usando a função *tzero* do Matlab©.

b) Converta o modelo em espaço dos estados para função de transferência e confirme o resultado obtido em (a) dessa forma também.

2) Dado sistema na forma de espaço dos estados abaixo:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} -7 & -12 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\mathbf{u}(t); \\ \mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\mathbf{u}(t). \end{cases}$$

Pede-se:

a) Obtenha a matriz de funções de transferência desse sistema.

b) Calcule os zeros do sistema e as suas direções associadas resolvendo o problema de autovalor generalizado. Não use o Matlab.

c) Confirme os valores dos zeros calculados no item (b) usando a função *tzero* do Matlab©. Confirme também as direções dos zeros calculadas no item (b) usando a função *eig* do Matlab.

➢ Principais comandos do Matlab a serem utilizados:

- eig;
- tzero.
- lsim.