RESPOSTA TEMPORAL

1. Motivação

- Calcular a resposta temporal de sistemas dinâmicos LIT na forma SS.

- Resposta temporal ⇒ permite analisar comportamento dinâmico do sistema no domínio do tempo.

- Duas soluções:
  - Solução homogênea ⇒ resposta à uma condição inicial diferente de zero;
  - Solução forçada ⇒ resposta à uma entrada diferente de zero.

2. Solução homogênea

- Dado um sistema LIT de ordem n,

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \end{cases} \tag{1}$$

onde $\mathbf{x}(t) \in R^n$, $\mathbf{u}(t) \in R^m$ e $\mathbf{y}(t) \in R^p$.

- A solução homogênea é obtida com a entrada igual a zero:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) \end{cases} \tag{2}$$

Resolvendo por Transformada de Laplace,

$$s\mathbf{X}(s) - \mathbf{x}(0) = \mathbf{A}\mathbf{X}(s) \tag{3}$$

$$[s\mathbf{I} - \mathbf{A}]\mathbf{X}(s) = \mathbf{x}(0) \tag{4}$$

$$\mathbf{X}(s) = [s\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1}\mathbf{x}(0) \tag{5}$$

Calculando a Transformada Inversa,

$$\mathbf{x}(t) = \mathscr{L}[s\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1}\mathbf{x}(0)$$

$$\boxed{\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0)} \tag{6}$$

A saída do sistema será:

$$\boxed{\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0)} \tag{7}$$

- Matriz de transmissão dos estados $\Rightarrow$ $\boxed{e^{\mathbf{A}t}}$

3. Exponencial de matriz

- A exponencial da matriz $\mathbf{A}$ $\Rightarrow$ é uma matriz de mesma dimensão de $\mathbf{A}$.

- Formas de calcular exponencial de matriz:

  - Usando Transformada de Laplace:

$$\boxed{e^{\mathbf{A}t} = \mathcal{L}^{-1}\left[(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\right]} \tag{8}$$

  - Expansão em séries:

$$\boxed{e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{I} + \mathbf{A}t + \frac{1}{2!}(\mathbf{A}t)^2 + \frac{1}{3!}(\mathbf{A}t)^3 + \frac{1}{4!}(\mathbf{A}t)^4 + \cdots} \tag{9}$$

  - Teorema de Caley-Hamilton:

Lembrando da aula anterior (diagonalização de sistema) $\Rightarrow$ $\mathbf{\Lambda} = \mathbf{WAV}$ ou $\mathbf{A} = \mathbf{V\Lambda W}$.

O Teorema de Caley-Hamilton diz que uma função de uma matirz pode ser calculada por meio da mesma função, mas dos autovalores da matriz:

$$\boxed{f(\mathbf{A}) = \mathbf{V}f(\mathbf{\Lambda})\mathbf{W}} \tag{10}$$

$$\boxed{e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{V}e^{\mathbf{\Lambda}t}\mathbf{W}} \tag{11}$$

4. Exemplos

Exemplo 1: Calcular a exponencial da seguinte matriz:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$$

- **Usando o método da Transformada de Laplace:**

$$(s\mathbf{I}-\mathbf{A})=\begin{bmatrix} s & -1 \\ 2 & s+3 \end{bmatrix}$$

$$(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}=\frac{1}{[s(s+3)+2]}\begin{bmatrix} s+3 & 1 \\ -2 & s \end{bmatrix}=\frac{1}{(s+1)(s+2)}\begin{bmatrix} s+3 & 1 \\ -2 & s \end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix} \dfrac{s+3}{(s+1)(s+2)} & \dfrac{1}{(s+1)(s+2)} \\ \dfrac{-2}{(s+1)(s+2)} & \dfrac{s}{(s+1)(s+2)} \end{bmatrix}$$

Expandindo cada uma das transformadas da matriz em frações parcias,

$$(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}=\begin{bmatrix} \dfrac{2}{s+1}-\dfrac{1}{s+2} & \dfrac{1}{s+1}-\dfrac{1}{s+2} \\ \dfrac{-2}{s+1}+\dfrac{2}{s+2} & \dfrac{-1}{s+1}+\dfrac{2}{s+2} \end{bmatrix}$$

Calculando a Transformada Inversa de Laplace,

$$e^{\mathbf{A}t}=\begin{bmatrix} 2e^{-t}-e^{-2t} & e^{-t}-e^{-2t} \\ -2e^{-t}+2e^{-2t} & -e^{-t}+2e^{-2t} \end{bmatrix}$$

- **Usando o método de expansão em séries:**

$$e^{\mathbf{A}t}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 & t \\ -2t & -3t \end{bmatrix}+\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & t \\ -2t & -3t \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & t \\ -2t & -3t \end{bmatrix}+$$
$$+\frac{1}{6}\begin{bmatrix} 0 & t \\ -2t & -3t \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & t \\ -2t & -3t \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & t \\ -2t & -3t \end{bmatrix}+\cdots$$

$$e^{\mathbf{A}t}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 & t \\ -2t & -3t \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} -t^2 & -1{,}5t^2 \\ 3t^2 & 4{,}5t^2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0{,}5t^3 & 0{,}5833t^3 \\ -1{,}5t^3 & -1{,}75t^3 \end{bmatrix}+\cdots$$

$$e^{\mathbf{A}t}=\begin{bmatrix} 1-t^2+0{,}5t^3+\cdots & t-1{,}5t^2+0{,}5833t^3+\cdots \\ -2t+3t^2-1{,}5t^3+\cdots & 1-3t+4{,}5t^2-1{,}75t^3+\cdots \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ Esse método não fornece uma expressão analítica para $e^{\mathbf{A}t}$ $\Rightarrow$ adequado somente para casos numéricos.

- **Usando o Teorema de Caly-Hamilton:**

Cálculo dos autovalores e autovetores da matriz **A**:

$$\det[s\mathbf{I}-\mathbf{A}]=\det\begin{bmatrix} s & -1 \\ 2 & s+3 \end{bmatrix}=s(s+3)+2=s^2+3s+2=0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1=-1 \\ \lambda_2=-2 \end{cases}$$

Para λ_1:

$$(\lambda_1\mathbf{I}-\mathbf{A})\mathbf{v_1}=\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{12} \end{bmatrix}=0 \Rightarrow \begin{cases} -v_{11}-v_{12}=0 \\ 2v_{11}+2v_{12}=0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v_{21}=-v_{11} \Rightarrow \mathbf{v_1}=\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{v_1}=\begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 \end{bmatrix}$$

Para λ_2:

$$(\lambda_2\mathbf{I}-\mathbf{A})\mathbf{v_1}=\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_{21} \\ v_{22} \end{bmatrix}=0 \Rightarrow \begin{cases} -2v_{21}-v_{22}=0 \\ 2v_{21}+v_{22}=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow v_{22}=-2v_{21} \Rightarrow \mathbf{v_2}=\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{v_2}=\begin{bmatrix} \sqrt{5}/5 \\ -2\sqrt{5}/5 \end{bmatrix}$$

Matriz dos autovalores:

$$\mathbf{\Lambda}=\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Matriz dos autovetores da direita:

$$\mathbf{V}=\begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{5}/5 \\ -\sqrt{2}/2 & -2\sqrt{5}/5 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0{,}7071 & 0{,}4472 \\ -0{,}7071 & -0{,}8944 \end{bmatrix}$$

Matriz dos autovetores da esquerda:

$$\mathbf{W}=\mathbf{V}^{-1}=\begin{bmatrix} 2{,}8284 & 1{,}4142 \\ -2{,}2361 & -2{,}2361 \end{bmatrix}$$

Matriz exponencial:

$$e^{\mathbf{A}t}=\mathbf{V}e^{\mathbf{\Lambda}t}\mathbf{W}=\begin{bmatrix} 0{,}7071 & 0{,}4472 \\ -0{,}7071 & -0{,}8944 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2{,}8284 & 1{,}4142 \\ -2{,}2361 & -2{,}2361 \end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix} 0{,}7071 & 0{,}4472 \\ -0{,}7071 & -0{,}8944 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2{,}8284e^{-t} & 1{,}4142e^{-t} \\ -2{,}2361e^{-2t} & -2{,}2361e^{-2t} \end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix} 2e^{-t}-e^{-2t} & e^{-t}-e^{-2t} \\ -2e^{-t}+2e^{-2t} & -e^{-t}+2e^{-2t} \end{bmatrix}$$

Exemplo 2: Calcular a resposta à condição inicial do seguinte sistema:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) \end{cases}$$

Condição inicial $\Rightarrow \mathbf{x_0} = [1,\ 1]^t$.

- Como visto a solução homogênea é dada por $\Rightarrow \mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0)$

Do exemplo anterior tem-se $\Rightarrow e^{\mathbf{A}t} = \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ -2e^{-t} + 2e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix}$

Portanto,

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ -2e^{-t} + 2e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix} \mathbf{x_0} = \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ -2e^{-t} + 2e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3e^{-t} - 2e^{-2t} \\ -3e^{-t} + 4e^{-2t} \end{bmatrix}$$

A saída do sistema será:

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3e^{-t} - 2e^{-2t} \\ -3e^{-t} + 4e^{-2t} \end{bmatrix} \Rightarrow y(t) = 3e^{-t} - 2e^{-2t}, \text{ para } t \geq 0$$

5. Solução forçada e completa

Caso escalar:

Dado o sistema escalar ou de 1ª ordem (n = 1):

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = ax(t) + bu(t) \\ y(t) = cx(t) + du(t) \end{cases} \tag{12}$$

Solução temporal completa (solução homogênea e forçada),

$$\boxed{x(t) = e^{at}x(0) + \int_0^t e^{a(t-\tau)} bu(\tau)d\tau} \tag{13}$$

onde o primeiro termo do lado direito é solução homogênea e o segundo termo do lado direito é a solução forçada. A integral do segundo termo é chamada integral de convolução.

A saída do sistema será dada por:

$$\boxed{y(t) = ce^{at}x(0) + \int_0^t ce^{a(t-\tau)}bu(\tau)d\tau + du(t)\,.} \tag{14}$$

➢ **Demonstração:**

Rearranjando a equação dos estados,

$$\dot{x}(t) - ax(t) = bu(t)\,. \tag{15}$$

Multiplicando por e^{-at},

$$e^{-at}\left[\dot{x}(t) - ax(t)\right] = e^{-at}bu(t)\,, \tag{16}$$

$$e^{-at}\dot{x}(t) - e^{-at}ax(t) = e^{-at}bu(t)\,. \tag{17}$$

Observando que o lado esquerdo é a derivada do produto de duas funções, então:

$$\frac{d}{dt}\left[e^{-at}x(t)\right] = e^{-at}bu(t)\,. \tag{18}$$

Integrando,

$$\int_0^t \frac{d}{dt}\left[e^{-a\tau}x(\tau)\right]d\tau = e^{-at}x(t) - e^{0}x(0) = \int_0^t e^{-a\tau}bu(\tau)d\tau\,. \tag{19}$$

Rearranjando,

$$e^{-at}x(t) = x(0) + \int_0^t e^{-a\tau}bu(\tau)d\tau\,. \tag{20}$$

Multiplicando por e^{at},

$$x(t) = e^{at}x(0) + \int_0^t e^{a(t-\tau)}bu(\tau)d\tau\,. \tag{21}$$

Caso matricial:

Dado o sistema de ordem n:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \end{cases} \tag{22}$$

Solução temporal completa (solução homogênea e forçada),

$$\boxed{\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0) + \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau} \tag{23}$$

onde o primeiro termo do lado direito é solução homogênea e o segundo termo do lado direito é a solução forçada. A integral do segundo termo é chamada integral de convolução.

A saída do sistema será dada por:

$$\boxed{\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0) + \int_0^t \mathbf{C}e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau + \mathbf{D}\mathbf{u}(t).} \tag{24}$$

Observações:

- A expressão (23) é raramente utilizada para calcular a resposta temporal de um sistema LIT.
- Usualmente utiliza-se o método da Transformada de Laplace para solução de equação diferencial se for desejada a solução algébrica.
- A integral da equação (23) pode ser resolvida mais facilmente usando a propriedade da convolução da Transformada de Laplace.
- Se for desejada solução numérica $\Rightarrow$ utiliza-se algum método numérico para integração de equações diferenciais.

6. Exercícios

1) Dado o sistema abaixo na forma do espaço dos estados:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\mathbf{u}(t)$$
$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}u(t)$$

Pede-se:

a) Calcule os autovalores e os autovetores do sistema.

b) Calcule a matriz exponencial $e^{\mathbf{A}t}$ usando os métodos da Transformada de Laplace e do Teorema de Caley-Hamilton.

c) Calcule a resposta temporal das saídas do sistema devido à condição inicial $\mathbf{x}(0) = [1, -2]^t$ e entradas nulas.

- Principais comandos do Matlab a serem utilizados:
  - eig;
  - initial;
  - step;
  - lsim.