Aula 5 – Produção

Piracicaba, agosto de 2018

Professora Dra. Andréia Adami

Produção

- Produção
- Qual a atividade principal da Firma?

Produção

- Produção
  - Função de produção
    - ✓ $q = f(k, l, m, \ldots)$

  - Com dois insumos (fator de produção):
    - ✓ $q = f(k, l)$
    - ✓ onde k = quantidade de capital e l = quantidade de mão de obra utilizados para obter o nível de produção (quantidade produto) q da firma

Produção

- Produto físico Marginal

- O produto físico marginal de um insumo é a quantidade de produto adicional produzida com uma unidade adicional do insumo, mantendo o uso de todos os outros insumos constantes:

Produção

- Produto físico Marginal

- O produto físico marginal de um insumo é a quantidade de produto adicional produzida com uma unidade adicional do insumo, mantendo o uso de todos os outros insumos constantes:

✓ $Pmg_k = \frac{\partial q}{\partial k} = f_k$

✓ $Pmg_l = \frac{\partial q}{\partial l} = f_l$

Produção

- Produtividade Marginal decrescente (Lei dos rendimentos marginais decrescentes)

Produção

- Produtividade Marginal decrescente (Lei dos rendimentos marginais decrescentes)

✓ $\frac{\partial^2 Pmg_k}{\partial k^2} = f_{kk} = f_{11} < 0$

✓ $\frac{\partial^2 Pmg_l}{\partial l^2} = f_{ll} = f_{22} < 0$

- Mas, a produtividade do trabalho também depende do uso do capital $f_{lk} > 0$

Produção

- Produtividade Média, importante medida de eficiência

✓ $PM_k = \frac{q}{k} = \frac{q(k,l)}{k}$

✓ $PM_l = \frac{q}{l} = \frac{q(k,l)}{l}$

Produção

- Exemplo 9.1
- Calcule o produto marginal e a produtividade média do trabalho, para k=10, para a seguinte função de produção, :

✓ $q(k, l) = 600k^2l^2 - k^3l^3$

Produção

- Exemplo 9.1

- Calcule o produto marginal e a produtividade média do trabalho, para k=10, para a seguinte função de produção, :

✓ $q(k,l) = 60.000l^2 - 1,000l^3$

Produção

- Exemplo 9.1

- Calcule o produto marginal e a produtividade média do trabalho, para k=10, para a seguinte função de produção, :

✓ $q(k,l) = 60.000l^2 \; - 1{,}000l^3$

✓ $Pmgl = \frac{\partial q}{\partial l} = 120.000l \; - 3.000ql^2$

- q atinge o valor máximo quando $Pmgl = 0$, nesse ponto *l=40*

Produção

- Exemplo 9.1

- Calcule o produto marginal e a produtividade média do trabalho, para k=10, para a seguinte função de produção, :

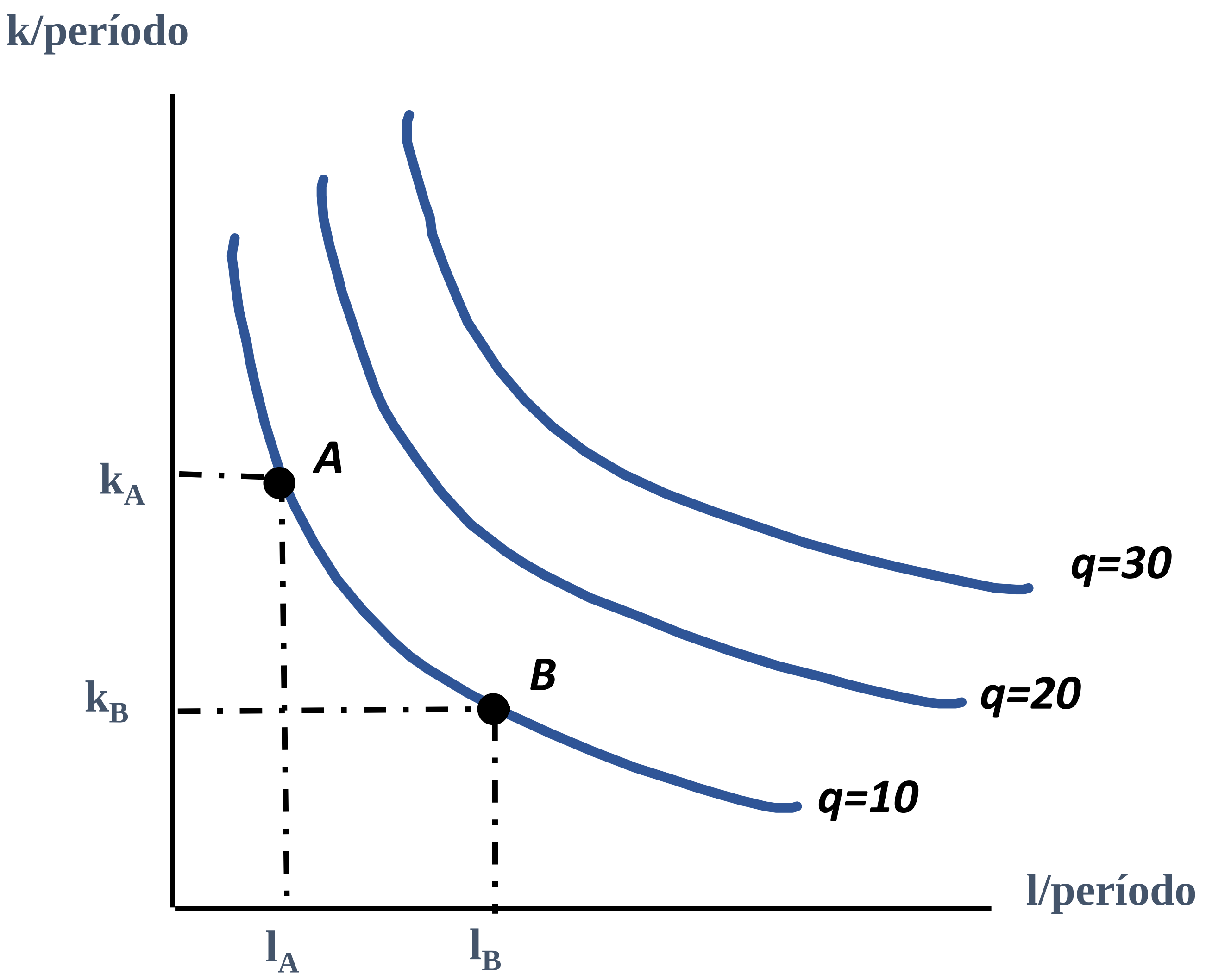
✓ $q(k,l) = 60.000l^2 - 1{,}000l^3$

✓ $Pmgl = \dfrac{\partial q}{\partial l} = 120.000l - 3.000ql^2$

- q atinge o valor máximo quando $Pmgl = 0$, nesse ponto *l=40*

✓ *PMl*= $\dfrac{q}{l} = \dfrac{60.000l^2 - 1{,}000l^3}{l} = 60.000l^1 - 1{,}000l^2$, quando *PMl* é máximo, *l=30, neste ponto PMl=* $Pmgl$

Isoquantas



Produção

- Taxa Marginal de substituição Técnica

✓ $TMST_{lk} = \frac{-dk}{dl}$

✓ $q_0 = f(k, l)$

✓ $dq = \frac{\partial f}{dl} dl + \frac{\partial f}{dk} dk$

✓ $0 = Pmg_l \, dl = -Pmg_k \, dk$

✓ $\frac{Pmg_l}{Pmg_k} = -\frac{dk}{dl}\Big|_{q = q_0}$

Produção

- Por que a Taxa Marginal de substituição Técnica é decrescente?

✓ $$\frac{dTMST_{lk}}{dl} = \frac{d(\frac{f_l}{f_k})}{dl}$$

✓ $$\frac{dTMST_{lk}}{dl} = \frac{f_k\left(f_{ll}+f_{lk}\frac{dk}{dl}\right)-f_l\left(f_{kl}+f_{kk}\frac{dk}{dl}\right)}{(f_k)^2} =$$

Produção

- Por que a Taxa Marginal de substituição Técnica é decrescente?

✓ $\frac{dTMST_{lk}}{dl} = \frac{d(\frac{f_l}{f_k})}{dl}$

✓ $\frac{dTMST_{lk}}{dl} = \frac{f_k\left(f_{ll}+f_{lk}\frac{dk}{dl}\right)-f_l\left(f_{kl}+f_{kk}\frac{dk}{dl}\right)}{(f_k)^2} =$

✓ $= \frac{{f_k}^2 f_{ll}-2f_k f_l f_{kl}+{f_l}^2 f_{kk}}{(f_k)^3}$, pois, $f_{kl}=f_{lk}$ e $\frac{dk}{dl}$ = - $\frac{f_l}{f_k}$

✓ Como f_{ll} e f_{kk}< 0, para que a TMST seja decrescente, f_{kl}>0, a isoquanta será convexa.

Produção

- Retornos de escala: o que ocorre com o produto se aumentarmos o uso de todos os insumos proporcionalmente?
- Definição: Se tanto a função de produção quanto os insumos forem multiplicados por uma constante positiva $t>1$, podemos classificar os retornos de escala como:

Efeito sobre o produto	Retorno de escala
✓ $f(tk,tl) = tf(k,l) = tq$	Constante
✓ $f(tk,tl) < tf(k,l)$	Decrescente
✓ $f(tk,tl) > tf(k,l)$	Crescente

Produção

- Retornos de escala

• Se a função de produção é homogênea de grau 1, então, a função produtividade marginal é homogênea de grau zero.

✓ $f(tk,tl) = t^1 f(k,l) = tq$

✓ $MP_k = \frac{\partial f(k,l)}{\partial k} = \frac{\partial f(tk,tl)}{\partial k}$

✓ $MP_l = \frac{\partial f(k,l)}{\partial l} = \frac{\partial f(tk,tl)}{\partial l}$

Produção

- Retornos de escala

• Se a função de produção é homogênea de grau 1, então, a função produtividade marginal é homogênea de grau zero.

✓ $f(tk,tl) = t^1 f(k,l) = tq$

✓ $MP_k = \frac{\partial f(k,l)}{\partial k} = \frac{\partial f(tk,tl)}{\partial k}$

✓ $MP_l = \frac{\partial f(k,l)}{\partial l} = \frac{\partial f(tk,tl)}{\partial l}$

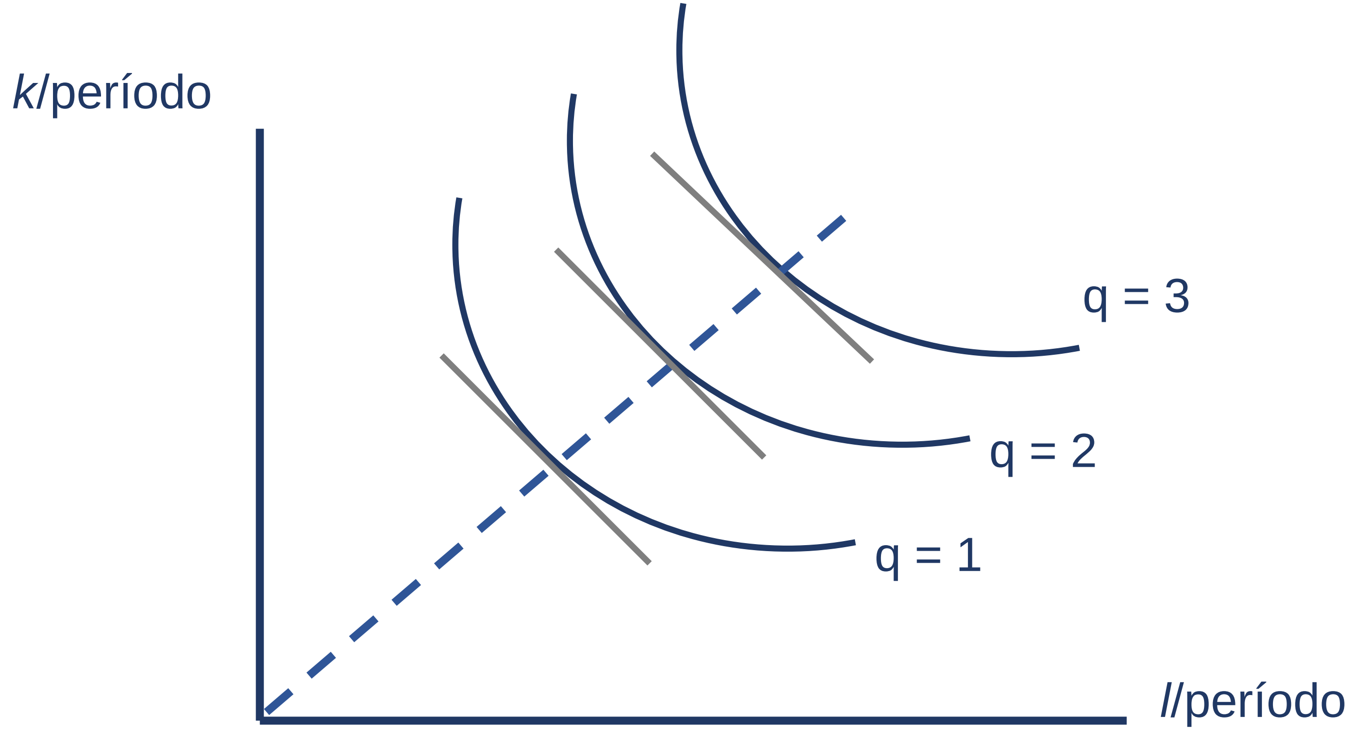
✓ Fazendo t = 1/l:

✓ $MP_k = \frac{\partial f(k,l)}{\partial k} = \frac{\partial f(\frac{k}{l},l)}{\partial k}$

✓ $MP_l = \frac{\partial f(k,l)}{\partial l} = \frac{\partial f(\frac{k}{l},l)}{\partial l}$

Produção

- Função de produção com retornos constantes é Homotética, assim, a TMST depende apenas da taxa *k/l* e não do nível de produção.



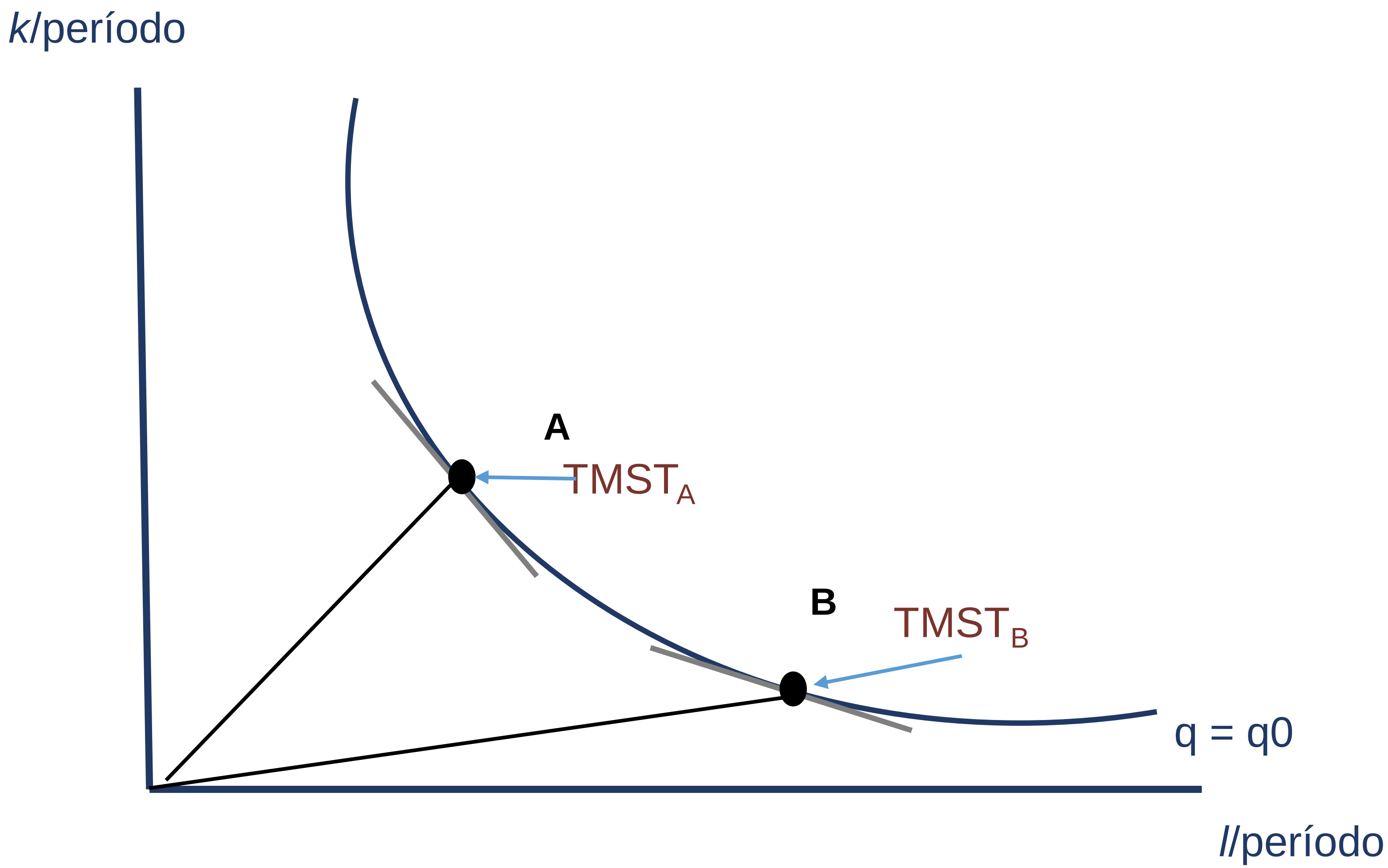
Produção

- Elasticidade de substituição: para a função de produção $q = f(k, l)$, a elasticidade de substituição σ é dada por:

✓ $$\sigma = \frac{\%\Delta(\frac{k}{l})}{\%\Delta TMST} = \frac{d(\frac{k}{l})}{dTMST} . \frac{TMST}{\frac{k}{l}} = \frac{dln(\frac{k}{l})}{dlnTMST} = \frac{dln(\frac{k}{l})}{dln(\frac{f_1}{f_2})}$$

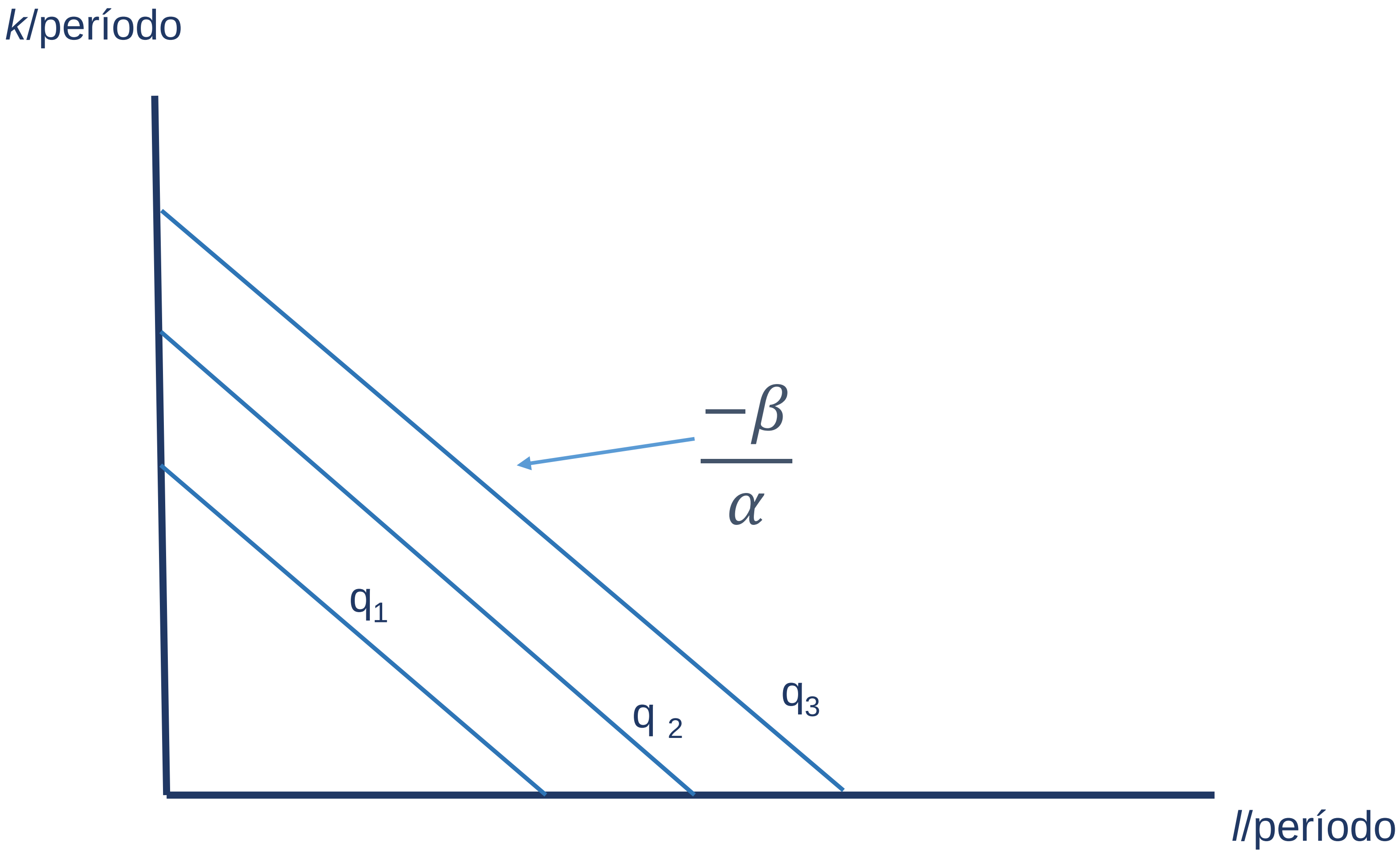
Produção

- σ é a medida da curvatura da Isoquanta



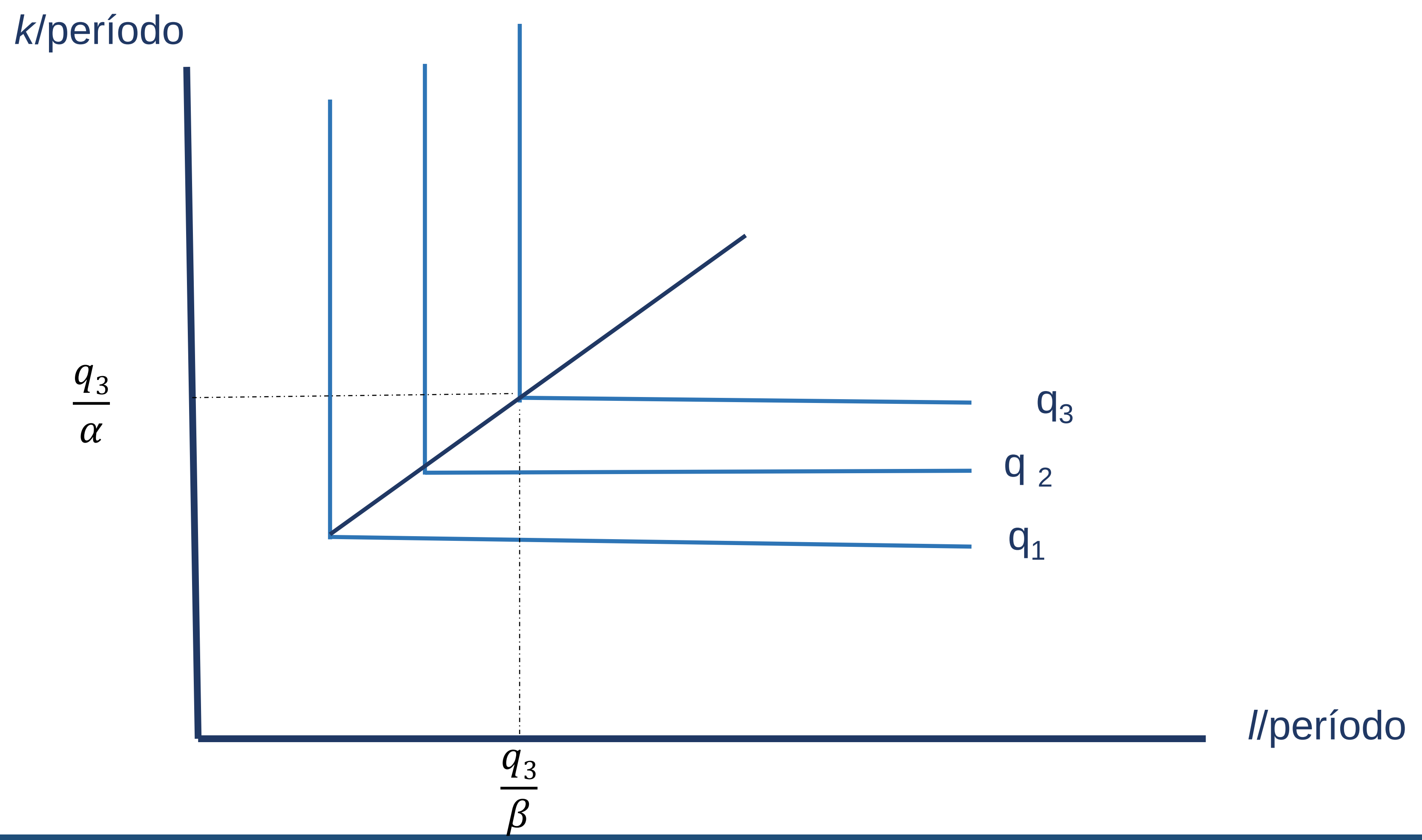
Produção

- Função Linear: $q(k,l) = \alpha k + \beta l$ – σ = ∞



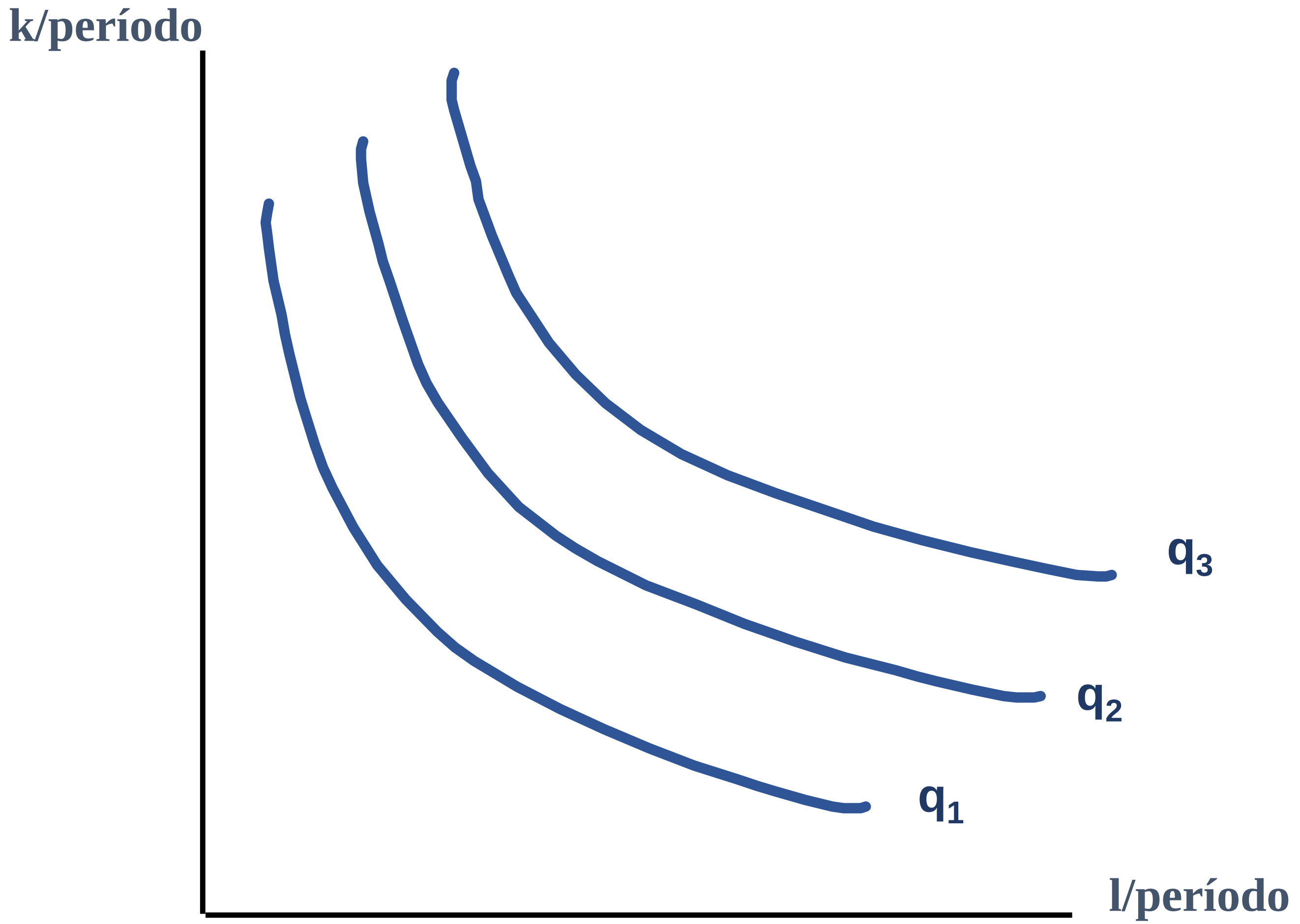
Produção

- Proporção fixa: $q(k,l) = \min(\alpha k, \beta l)\,, \alpha\ e\ \beta > 0$ - $\sigma = 0$



Isoquantas

- Cobb-Douglas: $q(k,l) = Ak^{\alpha}l^{\beta}$ - $\sigma = 1$



Produção

- Função CES
- $q=f(k,l)=[k^{\rho} + l^{\rho}]^{\frac{\gamma}{\rho}}$, para $\rho \leq 1$, $\rho \neq 0$ e $\gamma > 0$.

✓ $\sigma = \frac{1}{1-\rho}$

- Para a função linear $\sigma = \infty$, proporção fixa $\sigma = 0$, e Cobb-Douglas $\sigma = 1$.

Produção

- Função CES
  - ✓ $q=f(k,l)=[\alpha k^{\rho} + (1-\alpha) l^{\rho}]^{\frac{\gamma}{\rho}}$
  - ✓ Para retornos constantes de escala (γ=1) e ρ =0 , a função CES toma a forma da função Cobb-Douglas:
  - ✓ $q=f(k,l)= k^{\alpha} l^{1-\alpha}$

Produção

- Exem*plo 9.3*
- Considere a função de produção dada por:

✓ $q=f(k,l)=\mathrm{k}+\mathrm{l}+2\sqrt{kl}$

✓ A função exibe retornos constantes de escala?

Produção

- Exem*plo 9.3*
- Considere a função de produção dada por:

✓ $q = f(k,l) = k + l + 2\sqrt{kl}$

✓Essa função exibe retornos constantes de escala?

✓$f(tk,tl) = tk + tl + 2t\sqrt{kl} = t(k + l + 2\sqrt{kl}) = t\, f(k,l)$

✓Sim!

Produção

- Exem*plo 9.3*
- Considere a função de produção dada por:

✓ $q=f(k,l)=\mathrm{k}+\mathrm{l}+2\sqrt{kl}$

✓Calcule as produtividades marginais, a taxa marginal de substituição técnica e a elasticidade de substituição (σ)

Produção

- Exem*plo 9.3*
- Considere a função de produção dada por:

✓ $q=f(k,l)=\mathrm{k}+\mathrm{l}+2\sqrt{kl}$

✓Calcule as produtividades marginais da função:

✓$f_k = 1 + 2.0,5k^{-0,5}l^{0,5} = 1 + \left(\frac{k}{l}\right)^{-0,5}$

✓$f_l = 1 + 2.0,5k^{0,5}l^{-0,5} = 1 + \left(\frac{k}{l}\right)^{0,5}$

Produção

- Exem*plo 9.3*
- Considere a função de produção dada por:

✓ $q=f(k,l)=\mathrm{k}+\mathrm{l}+2\sqrt{kl}$

✓TMST= $\frac{f_l}{f_k} = \frac{1+\left(\frac{k}{l}\right)^{0,5}}{1+\left(\frac{k}{l}\right)^{-0,5}}$

Produção

- Exem*plo 9.3*
- Calculando a elasticidade de substituição:

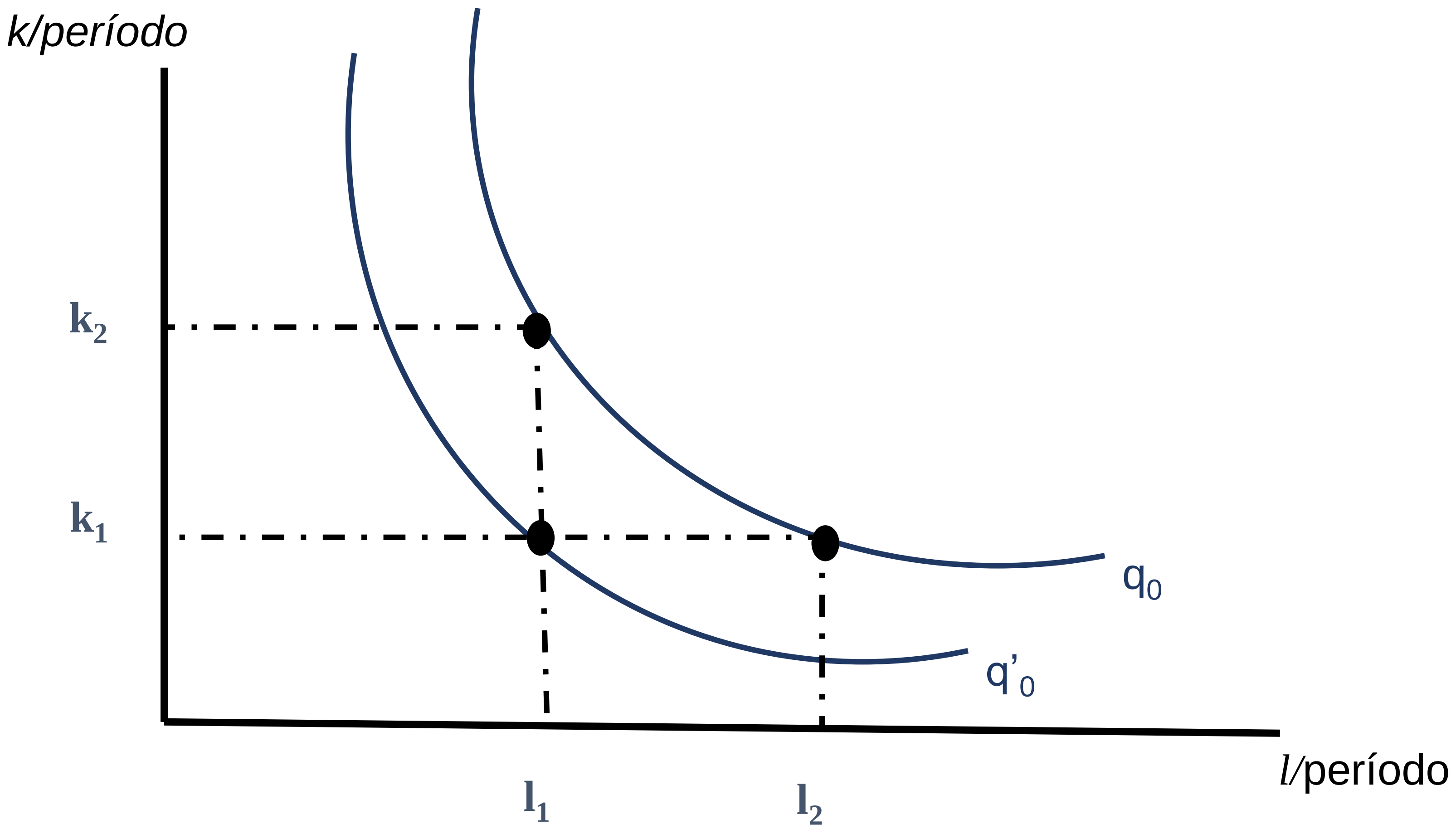
✓ $q=f(k,l)=\mathrm{k}+\mathrm{l}+2\sqrt{kl}$

1) Fatorando: $q=f(k,l)=(k^{0,5}+l^{0,5})^2$

1) $\sigma = \frac{1}{1-\rho} = \frac{1}{1-0,5} = 2$

Produção

- *Progresso Técnico*



Produção

- Progresso Técnico:

✓ $q=A(t)f(k,l)$, $\frac{\Delta A}{\Delta t} > 0$

✓Diferenciando a função em relação ao tempo temos:

✓$\frac{dq}{dt} = \frac{dA}{dt} . f(k,l) + A \frac{df(k,l)}{dt} =$

✓$= \frac{dA}{dt} . \frac{q}{A} + \frac{q}{f(k,l)} \left[\frac{\partial f}{\partial k} \frac{dk}{dt} + \frac{\partial f}{\partial l} \frac{dl}{dt} \right] =$

Produção

- Progresso Técnico:

✓ $q = A(t) f(k,l)$, $\frac{\Delta A}{\Delta t} > 0$

✓ Dividindo ambos os termos por q temos:

✓ $$\frac{\frac{dq}{dt}}{q} = \frac{\frac{dA}{dt}}{A} + \frac{\frac{\partial f}{\partial k}}{f(k,l)} \frac{dk}{dt} + \frac{\frac{\partial f}{\partial l}}{f(k,l)} \frac{dl}{dt}$$ ou

✓ $$= \frac{\frac{dq}{dt}}{q} = \frac{\frac{dA}{dt}}{A} + \frac{\partial f}{\partial k} \frac{k}{f(k,l)} \frac{\frac{dk}{dt}}{k} + \frac{\partial f}{\partial l} \frac{l}{f(k,l)} \frac{\frac{dl}{dt}}{l}$$

Produção

- Progresso Técnico:

✓ $q = A(t) f(k,l)$, $\frac{\Delta A}{\Delta t} > 0$

✓ Como $dx/dt/x$ é a taxa de crescimento da variável x em relação ao tempo:

✓ $G_q = G_A + \frac{\partial f}{\partial k} \frac{k}{f(k,l)} G_k + \frac{\partial f}{\partial l} \frac{l}{f(k,l)} G_l$

Produção

- Progresso Técnico:

✓ $q = A(t)f(k,l)$, $\frac{\Delta A}{\Delta t} > 0$

✓ Com $\frac{\partial f}{\partial k}\frac{k}{f(k,l)} = \frac{\partial q}{\partial k}\frac{k}{q}$ a elasticidade do produto em relação ao capital $e_{q,k}$ é:

✓ Com $\frac{\partial f}{\partial k}\frac{k}{f(k,l)} = \frac{\partial q}{\partial k}\frac{k}{q}$ a elasticidade do produto em relação ao trabalho $e_{q,l}$

✓ $G_q = G_A + e_{q,k}G_k + e_{q,l}G_l$

Produção

- Progresso Técnico:

✓ $$G_q = G_A + e_{q,k}G_k + e_{q,l}G_l$$

- A função acima mostra que a taxa de crescimento do produto pode ser dividida em dois componentes, os dois últimos termos indicam o crescimento atribuído a alterações nos insumos (k e l), e o outro “residual”, representa progresso técnico,

Produção

- Progresso Técnico:

✓ $G_q = G_A + e_{q,k}G_k + e_{q,l}G_l$

- Estudo pioneiro de R. W. Solow desenvolveu uma forma de estimar a importância relativa do progresso técnico (GA) na determinação do produto. Solow estimou os seguintes valores para os termos da equação:

✓ G_q = 2,75 (média anual)

✓ G_l = 1, 00 (média anual)

✓ G_k = 1,75 (média anual)

✓ $e_{q,l}$= 0,65 e $e_{q,k}$= 0,35

Produção

- Progresso Técnico:
- ✓ $G_q = G_A + e_{q,k}G_k + e_{q,l}G_l$ e
- ✓ $G_A = G_q - e_{q,k}G_k - e_{q,l}G_l$
- Substituindo os valores na função temos:

- ✓ $G_A = 2,75 – 0,35(1,75) – 0,65(1,00)$
- ✓ $= 2,75 – 0,65 – 0,65$
- ✓ $=1,50$
- ✓ A conclusão de Solow foi de que o avanço tecnológico foi de 1,5% ao ano entre 1909 e 1949

Referências Bibliográficas

- NICHOLSON, W; SNYDER, C. **Microeconomic Theory: Basic Principles and Extensions**. 11th Edition (International Edition), 2012 – cap. 9

- *Humans need not apply*

✓https://www.youtube.com/watch?v=7Pq-S557XQU