Aula 3 – Preferência, maximização da Utilidade e escolha

Piracicaba, agosto de 2018

Professora Dra. Andréia Adami

Preferências

- Axiomas da escolha racional

1. As preferências são completas (completude) – sob duas situações (cestas de mercado) A e B, o indivíduo sempre pode especificar exatamente uma das três possibilidades:

✓A é preferível a B;

✓B é preferível a A;

✓A e B são igualmente atrativos (indiferente).

Preferências

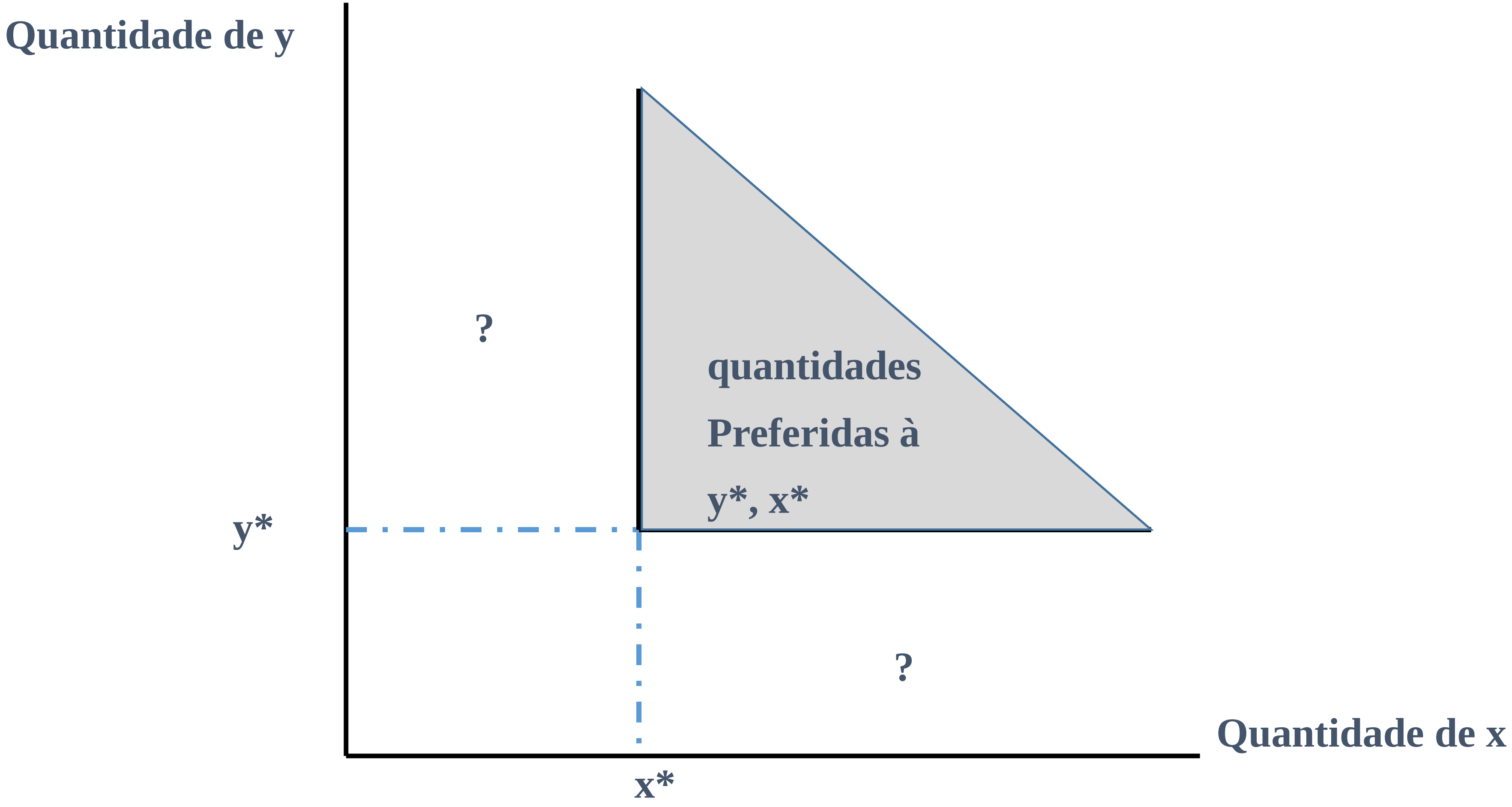
- Axiomas da escolha racional

2. Transitividade: Se o indivíduo reporta que A é preferível a B e que B é preferível a C; então ele deve preferir A a C, ou seja, a escolha é consistente.

3. Continuidade: Se o indivíduo declara que A é preferido a B, então, situações próximas a A também são preferidas a B. Importante quando analisamos mudanças relativamente pequenas nos preços e na renda.

Preferências

- O indivíduo sempre prefere maiores quantidades de ambos os bens



Preferências

- Função utilidade
- Características:

✓Ordinal – 1) U(A) = 5 e U(B) = 4

U(A) = 1.000.000 U(B) = 0,5

✓Qual situação é melhor?

Preferências

- Função utilidade
- Características:

✓Ordinal – 1) U(A) = 5 e U(B) = 4

U(A) = 1.000.000 U(B) = 0,5

✓Qual situação é melhor: Em ambos os casos podemos apenas dizer que A é preferido à B.

Preferências

- Função utilidade
- Função Homogênea

✓Definição: uma função *f(x)* é homogênea de grau *k* se $f(tx) = t^k f(x)$, ∀ $t > 0 \in \mathbb{R}$.

Exemplo: $f(x, y) = x^2 + y^2$

$$f(tx, ty) = (tx)^2 + (ty)^2 =$$

Preferências

- Função utilidade

• Função Homogênea

✓Definição: uma função *f(x)* é homogênea de grau *k* se $f(\text{t}x) = \text{t}^k f(x)$, ∀ t > 0 ∈ ℝ.

Exemplo: $f(x, y) = x^2 + y^2$

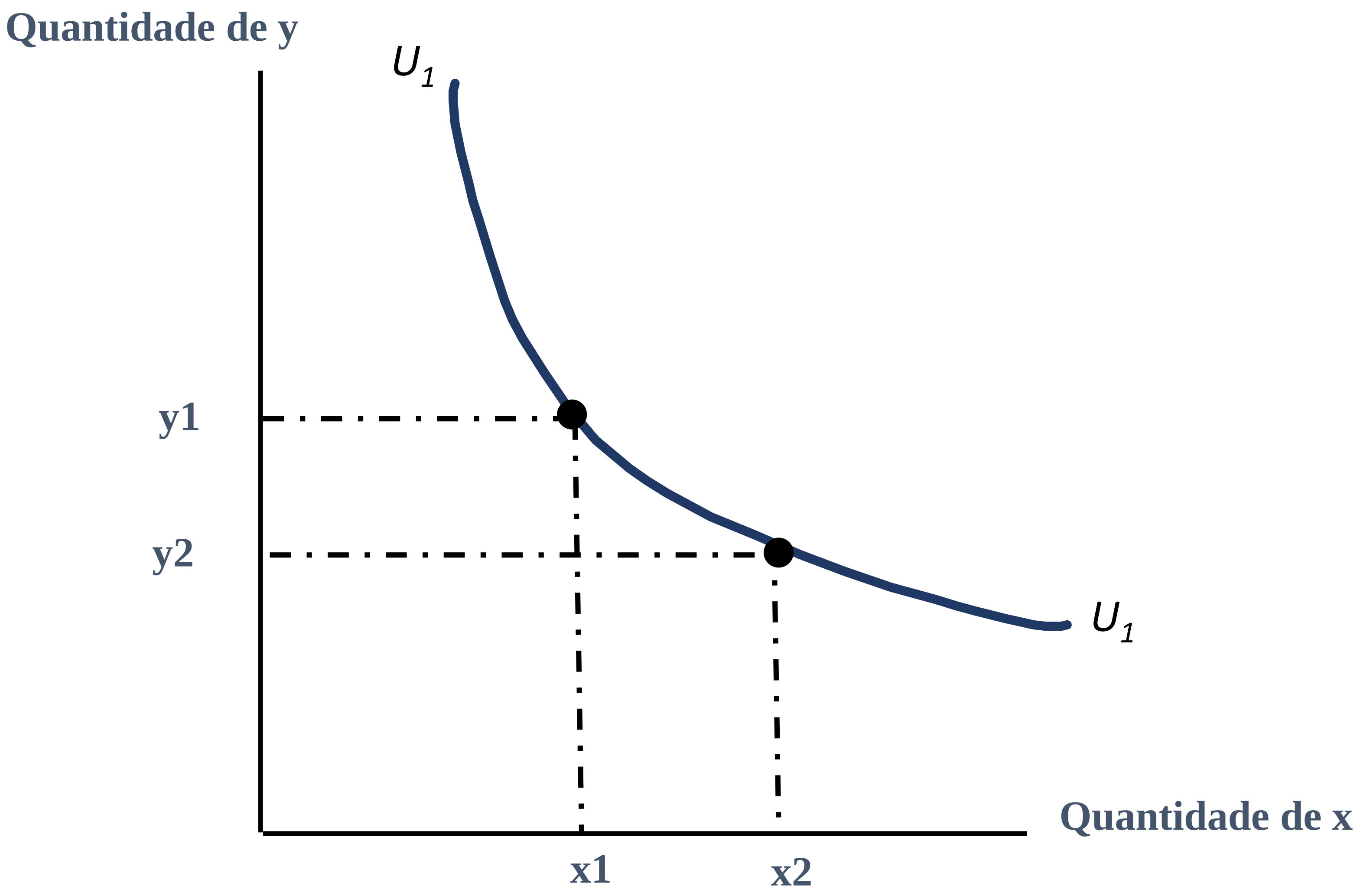
$$f(tx, ty) = (tx)^2 + (ty)^2 = t^2(x^2 + y^2) = t^2 f(x, y)$$

Preferências

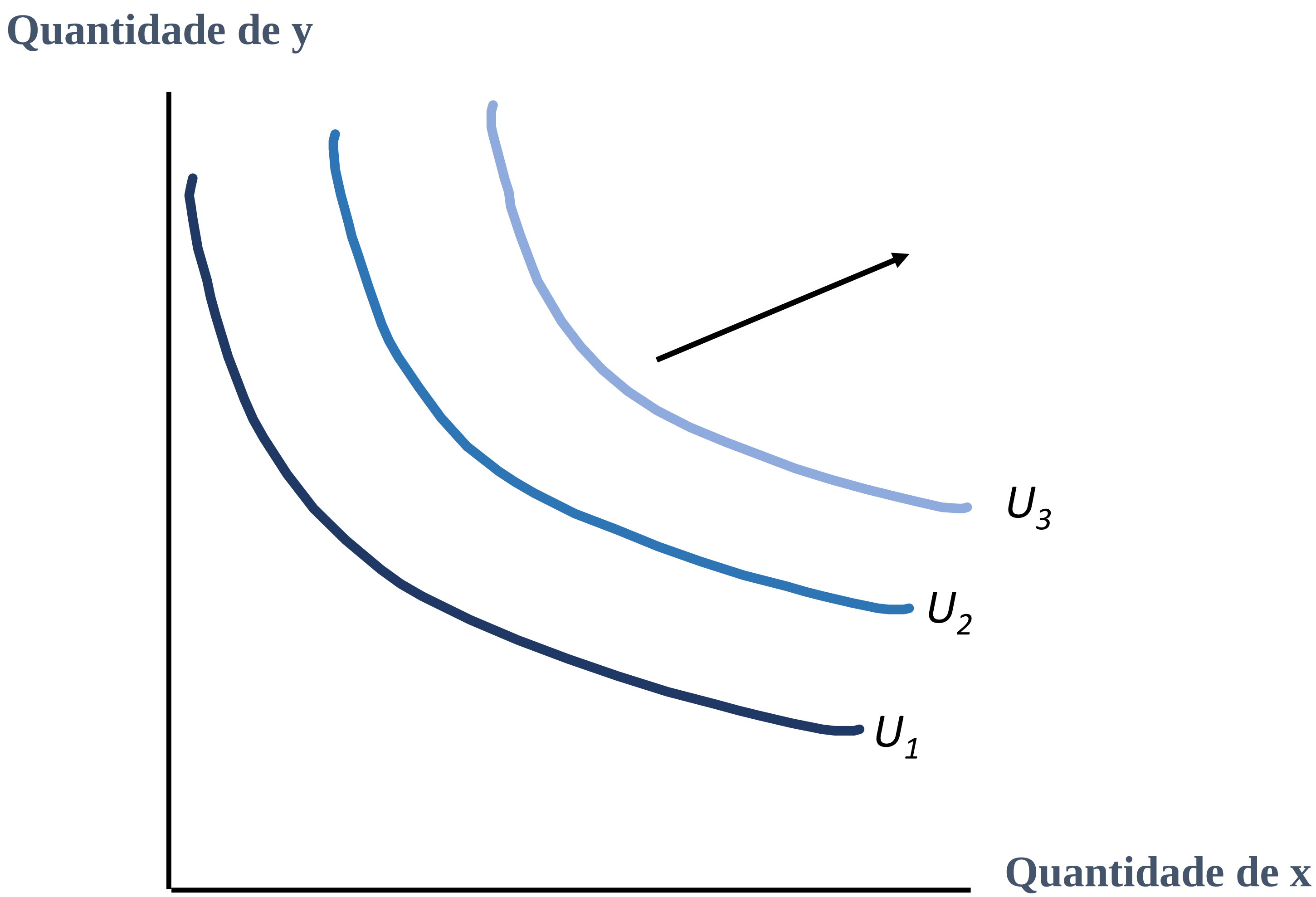
- Função utilidade
- Função Homotética

- **Definição:** uma função *f(x)* é homotética se puder ser definida por $f(x) = g(h(x))$, em que $g(\cdot)$ é uma transformação monotônica e $h(x)$ é uma função homogênea de grau k qualquer, ou seja, é a transformação monotônica de uma função homogênea, preserva a relação entre os argumentos da função e seu valor.

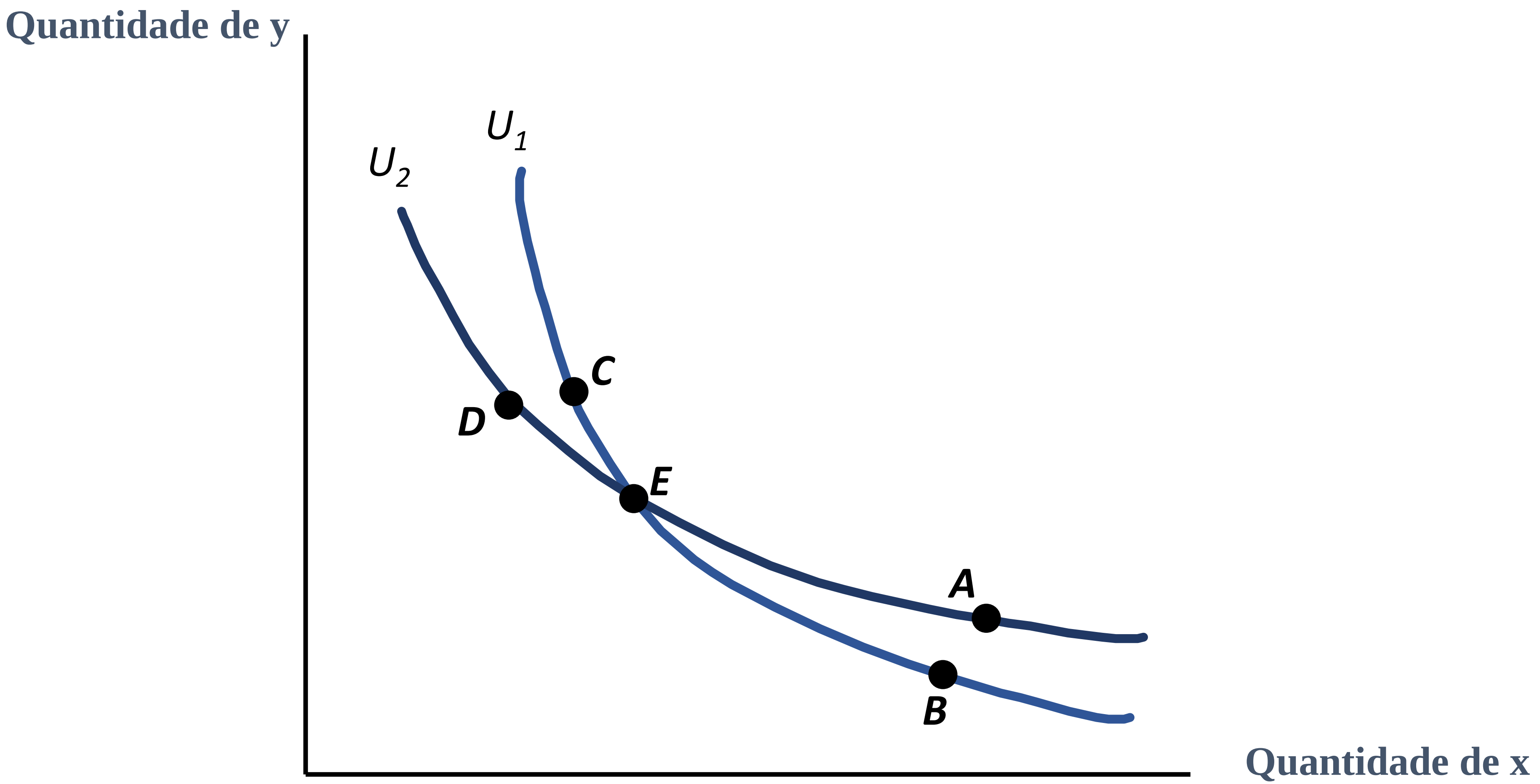
Curva de Indiferença



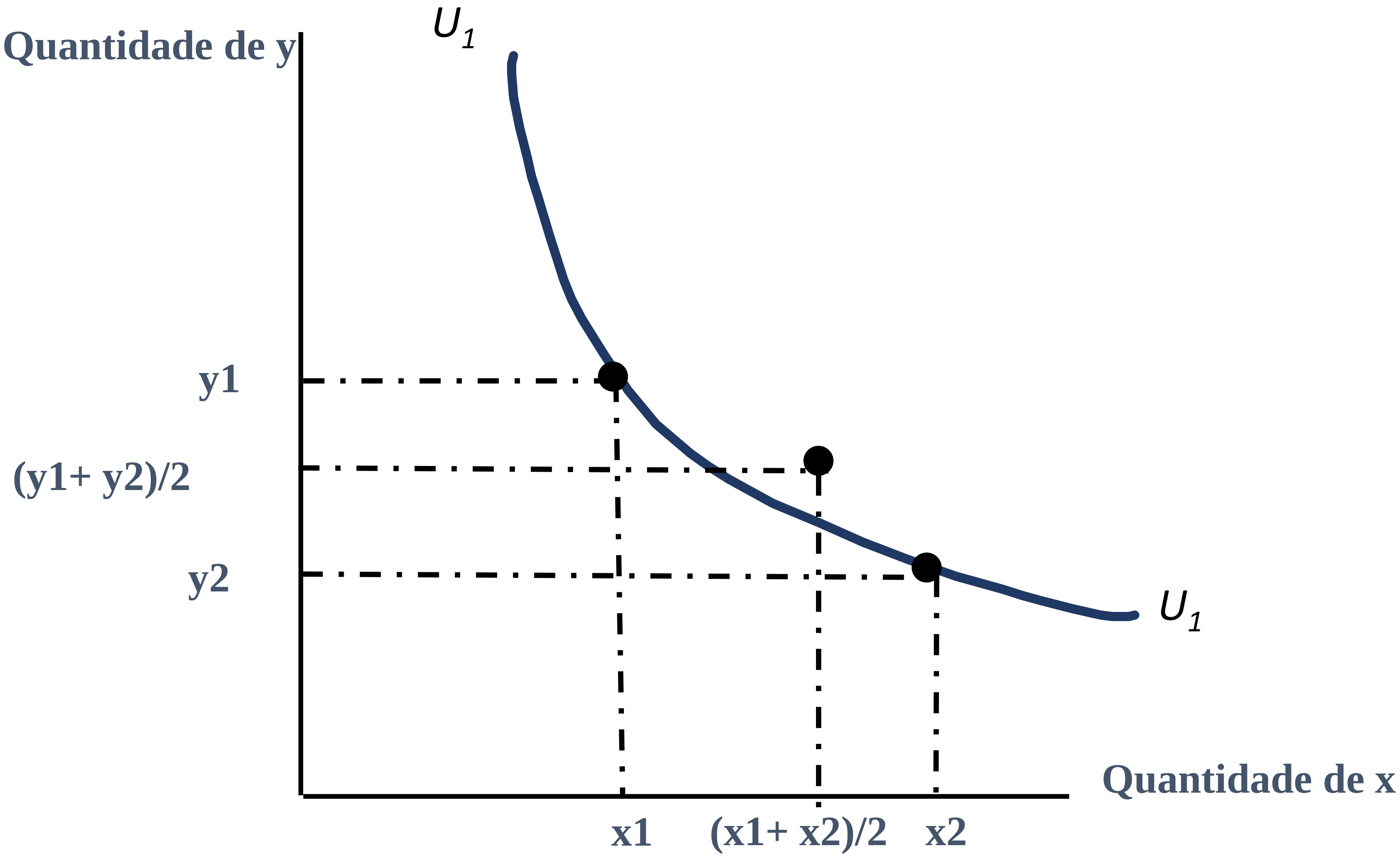
Mapa de Indiferença



Curvas de indiferença e transitividade



Convexidade e equilíbrio no consumo



Escolha

- Exemplo 3.1 pg.98 (Nicholson)
- Função Utilidade: U $= \sqrt{xy}$

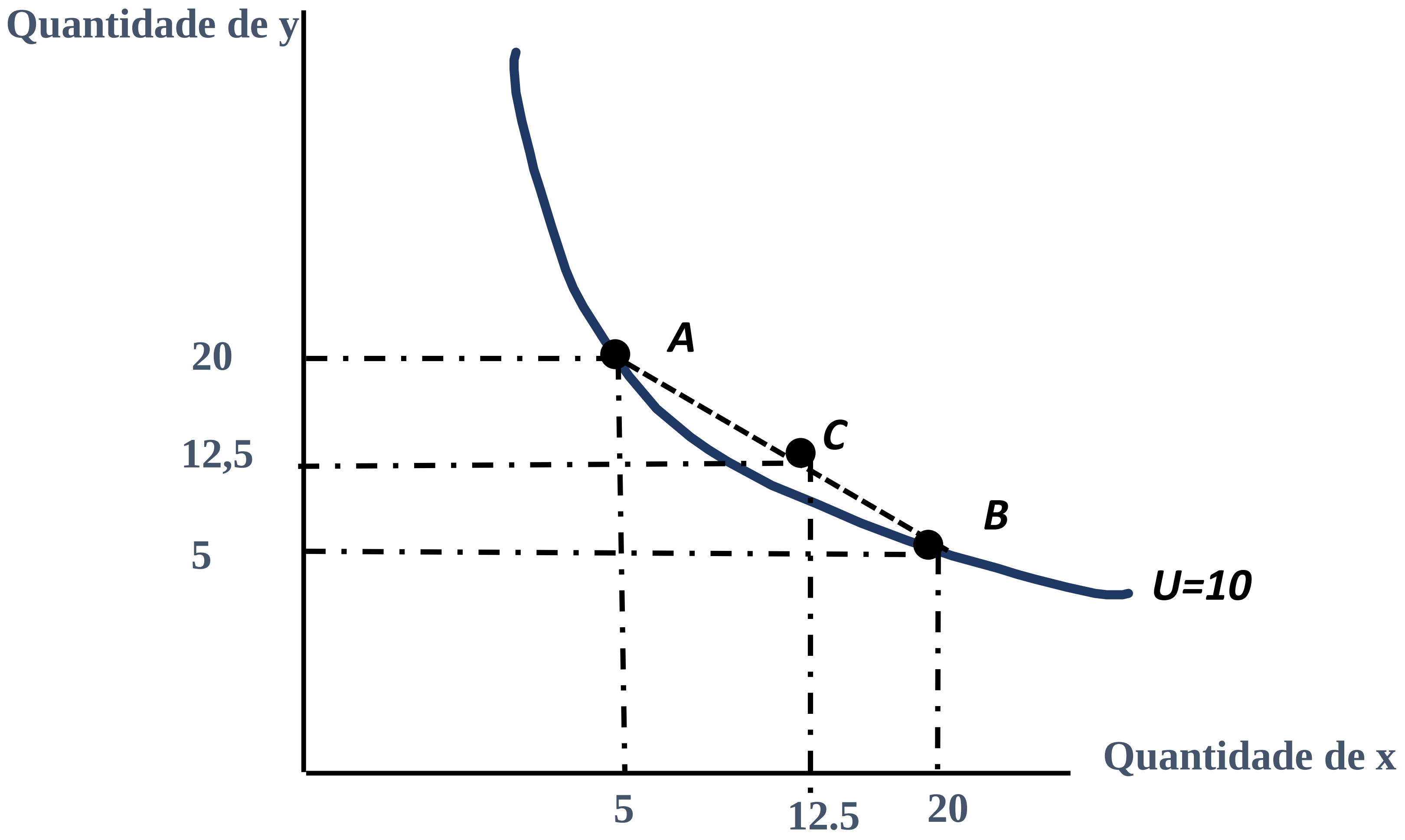
✓Seja U=10, temos: $10 = \sqrt{xy}$

✓Elevando ambos os lados da equação ao quadrado temos:

$100 = xy$ e, resolvendo pra y: $y = 100/x$

Convexidade e equilíbrio no consumo

Exemplo 3.1 – Figura 3.7 pg.98 (Nicholson)



Escolha

- Exemplo 3.1 pg.98 (Nicholson)

- TMS: $-\frac{dy}{dx} = \frac{100}{x^2}$

- $\text{TMS}_{(5,20)} = \frac{100}{x^2} = \frac{100}{25} = 4$

- $\text{TMS}_{(20,5)} = \frac{100}{x^2} = \frac{100}{400} = 0{,}25$

Convexidade e curvas de Indiferença

- Exemplo 3.2 pg.101 (Nicholson)
- Função Utilidade: $\mathrm{U}(\mathrm{x},\mathrm{y}) = \sqrt{xy}$

✓Aplicando a transformação logarítmica, temos:

$$\ln\mathrm{U}(\mathrm{xy}) = 0{,}5\ln x + 0{,}5 lny$$

✓TMS= $\dfrac{\frac{\partial U}{\partial x}}{\frac{\partial U}{\partial y}} = \dfrac{y}{x}$

Convexidade e curvas de Indiferença

- Exemplo 3.2 pg.101 (Nicholson)

- Função Utilidade: $\mathrm{U}(\mathrm{x},\mathrm{y}) = x + xy + y$

$$✓\text{TMS}= \frac{\frac{\partial U}{\partial x}}{\frac{\partial U}{\partial y}} = \frac{1+y}{1+x}$$

Convexidade e curvas de Indiferença

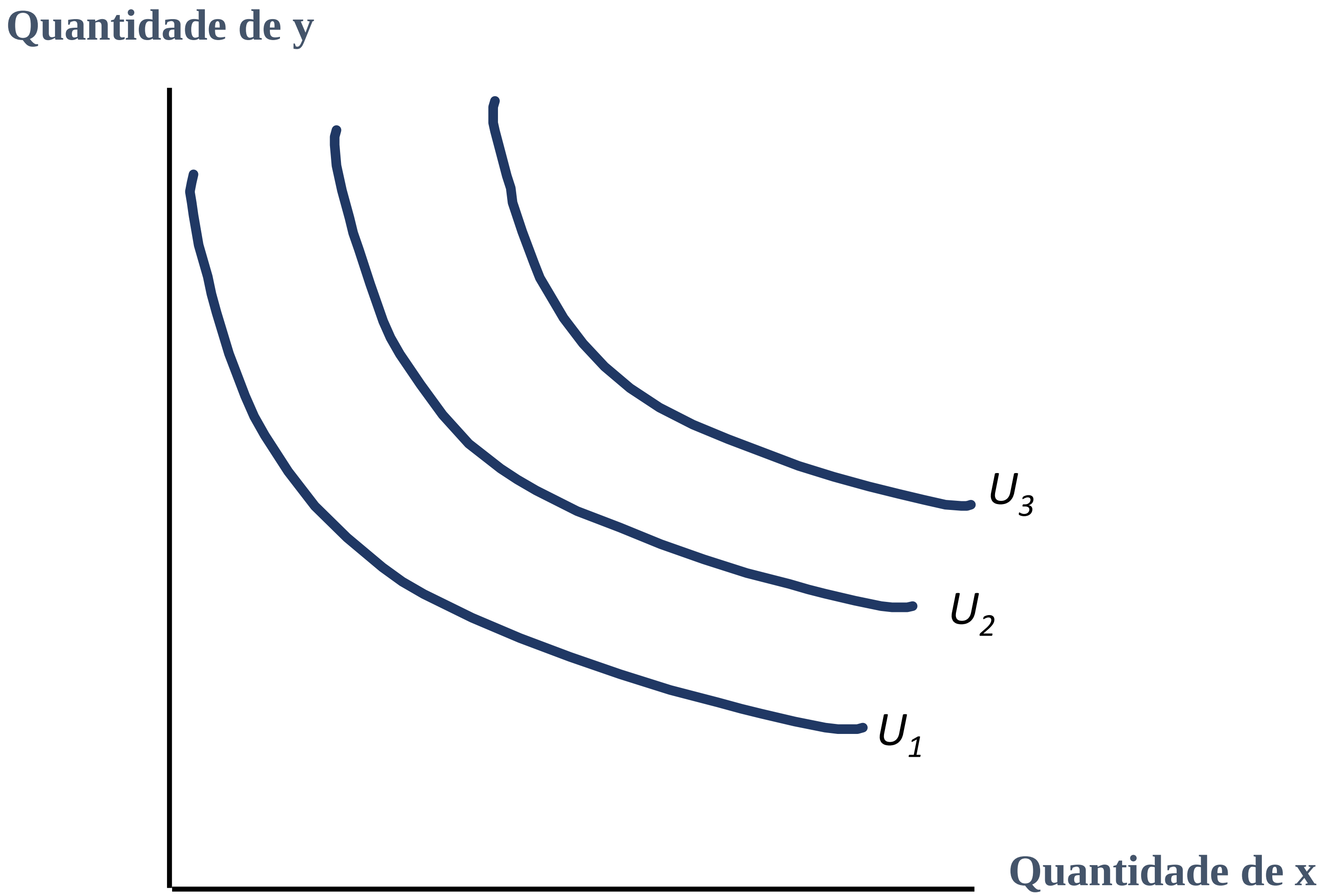
- Exemplo 3.2 pg.101 (Nicholson)
- Função Utilidade: $\mathrm{U}(\mathrm{x},\mathrm{y}) = x^2 + y^2$

✓TMS= $\frac{\frac{\partial U}{\partial x}}{\frac{\partial U}{\partial y}} = \frac{2x}{2y} = \frac{x}{y}$

✓Quando a TMS é decrescente (aumentos em *x* levam a redução em y, a curva de indiferença é convexa.

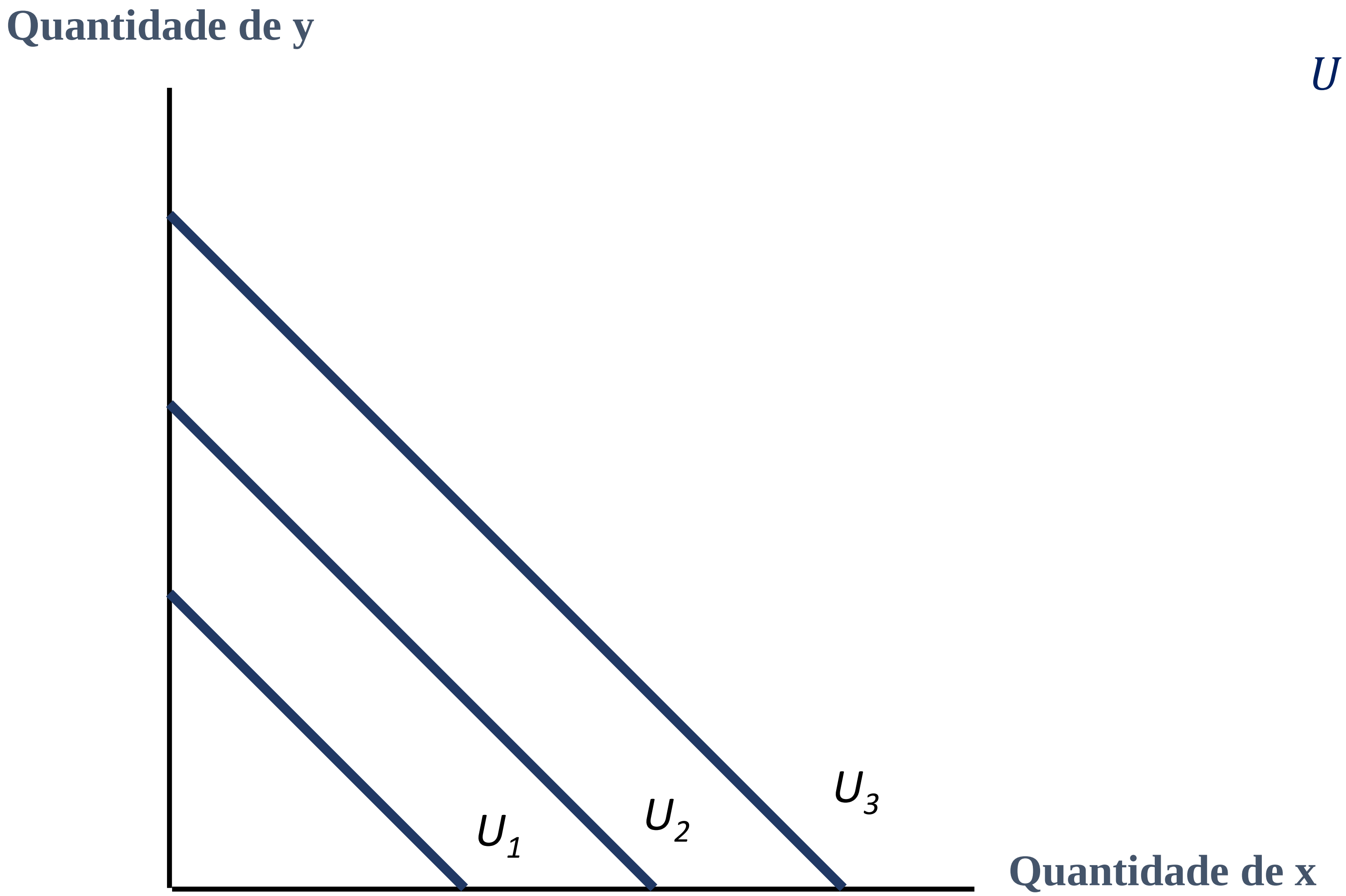
Função Utilidade Cobb-Douglas

$$U(x, y) = x^{\alpha} y^{\beta}$$



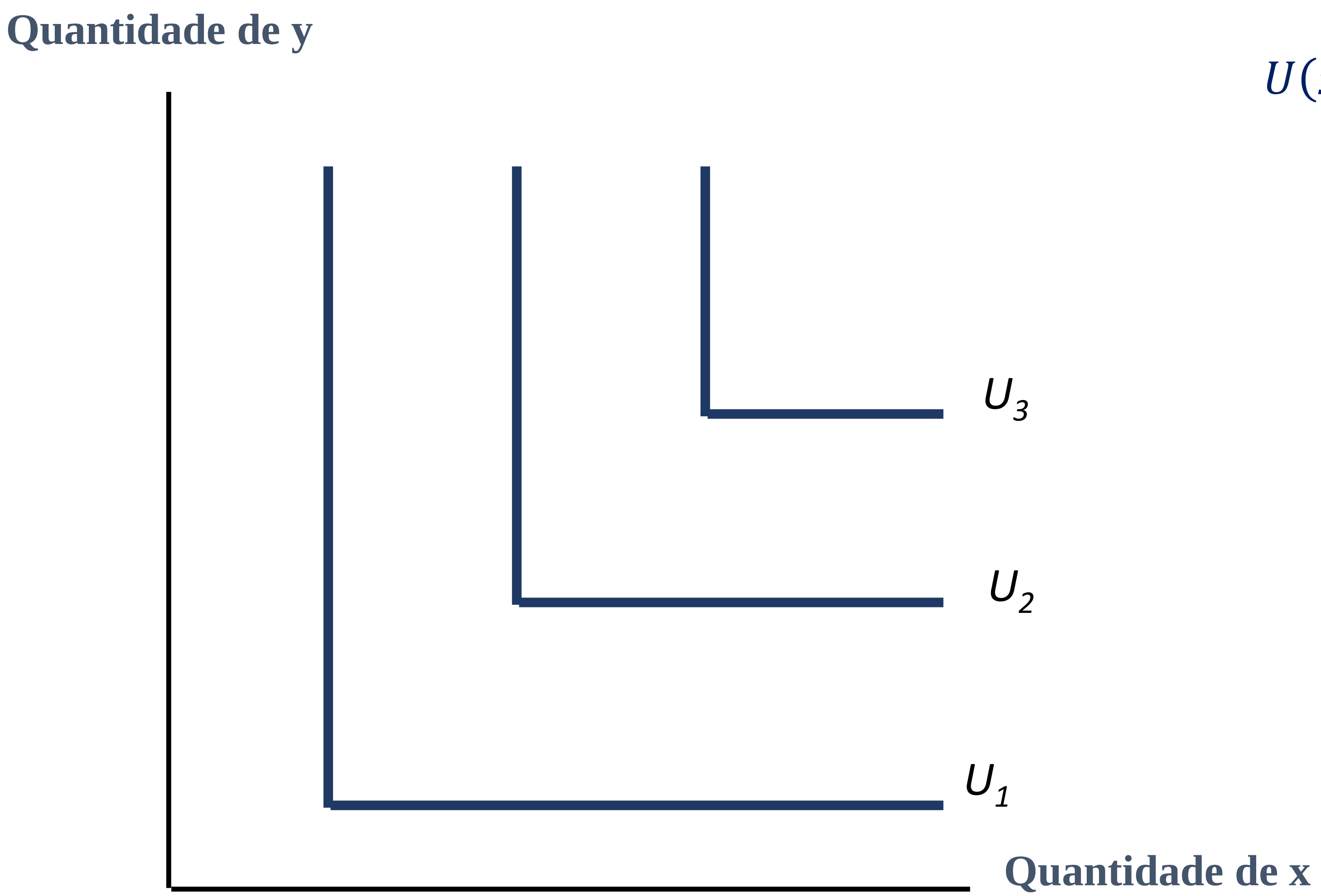
Substitutos perfeitos

$$U(x, y) = \alpha x + \beta y$$



Complementares perfeitos

$$U(x, y) = \min(\alpha x, \beta y)$$



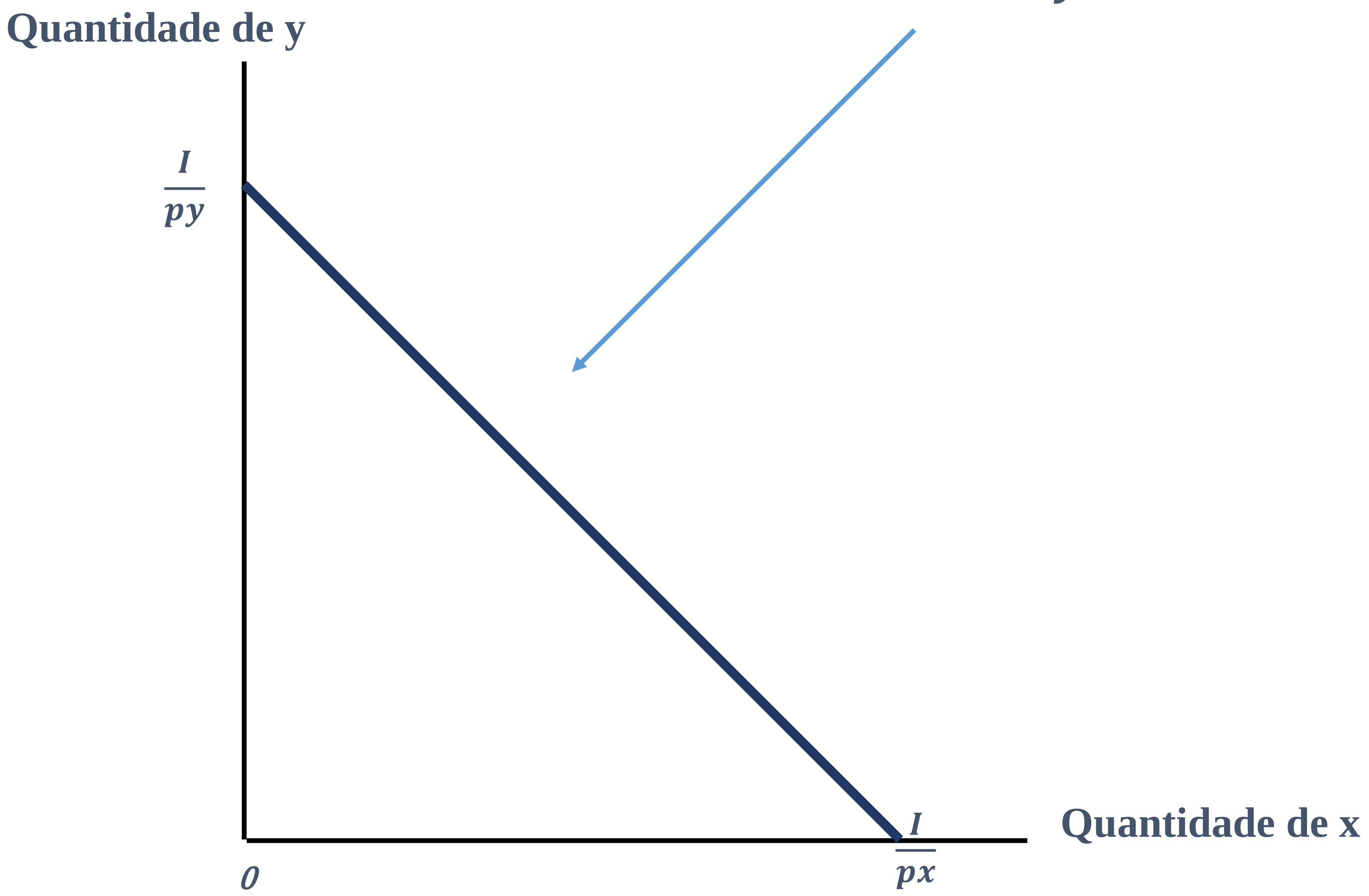
Escolha: Condição de Primeira ordem

- Suponha que o indivíduo tenha I unidades monetárias (dólares) para alocar na compra dos bens x e y, aos preços p_x e p_y

✓Restrição Orçamentária: $p_x x + p_y y \leq I$

Maximização da Utilidade

- Restrição Orçamentária: $p_x x + p_y y = I$



Condição de Primeira ordem

- Restrição Orçamentária: $p_x x + p_y y = I$

✓ $Inclinação$:?

Condição de Primeira ordem

- Suponha que o indivíduo tenha I unidades monetárias (dólares) para alocar na compra dos bens x e y, aos preços p_x e p_y

✓Restrição Orçamentária: $p_x x + p_y y = I$

✓$Inclinação$: $p_y y = I - p_x x$

✓$y = \frac{(I - p_x x)}{p_y}$

✓$\frac{dy}{dx} = -\frac{p_x}{p_y}$

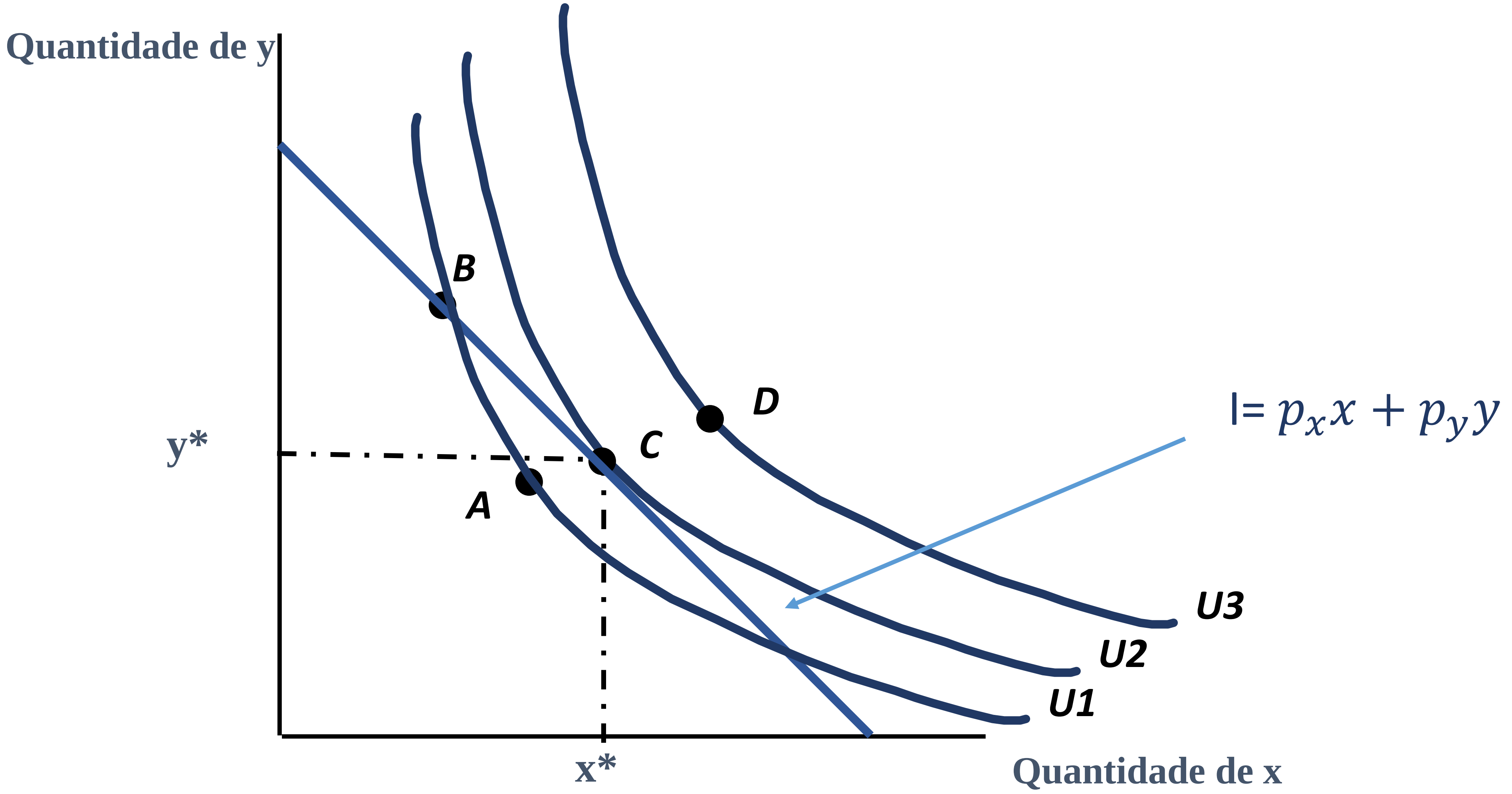
Condição de Primeira ordem para máximo

- Condição de primeira ordem: Inclinação da reta orçamentária = inclinação da curva de Indiferença

✓ $-\frac{p_x}{p_y} = \frac{dy}{dx}\Big|_{U=constante}$

Condição de Primeira ordem para máximo

Figura 4.2 pg.120 (Nicholson)



O caso de *n* bens

- Condição de primeira ordem
- U=U$(x_1, x_2, \dots, x_n)$

- Restrição Orçamentária
- $I = p_1x_1 + p_2x_2 + \cdots + p_nx_n$, ou
- $I - p_1x_1 - p_2x_2 - \cdots - p_nx_n = 0$

O caso de *n* bens

- Condição de primeira ordem

- Função Lagrange:

✓ $L = \mathrm{U}(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \lambda(I - p_1x_1 - p_2x_2 - \cdots - p_nx_n)$

- Tomando derivadas parciais da Função Lagrange com respeito á $x_1, x_2, \ldots, x_n$ e λ:

O caso de *n* bens

- Condição de primeira ordem
- Função Lagrange:
- Tomando derivadas parciais da Função Lagrange com respeito á $x_1, x_2, \dots, x_n$ e λ:

✓ $\frac{\partial L}{\partial x_1} = \frac{\partial U}{\partial x_1} - \lambda\, p_1 = 0$

✓ $\frac{\partial L}{\partial x_2} = \frac{\partial U}{\partial x_2} - \lambda\, p_2 = 0$

✓ $\vdots$

✓ $\frac{\partial L}{\partial x_n} = \frac{\partial U}{\partial x_n} - \lambda\, p_n = 0$

✓ $\frac{\partial L}{\partial \lambda} = I - p_1 x_1 - p_2 x_2 - \cdots - p_n x_n = 0$

O caso de *n* bens

- Condição de primeira ordem
- Implicações da condição de primeira ordem:

✓ $$\frac{\frac{\partial U}{\partial x_i}}{\frac{\partial U}{\partial x_j}} = \frac{p_i}{p_j}$$

✓ *Ou:* $TMS = \frac{p_i}{p_j}$

O caso de *n* bens

- Condição de primeira ordem
- Interpretação do Multiplicador de Lagrange:

✓ $\lambda = \frac{\frac{\partial U}{\partial x_1}}{p_1} = \frac{\frac{\partial U}{\partial x_2}}{p_2} = \ldots = \frac{\frac{\partial U}{\partial x_n}}{p_n}$

✓ No ponto de maximização da Utilidade, o consumo de cada bem produz a mesma taxa benefício/custo, ou seja, produz o mesmo benefício marginal pra cada unidade monetária gasta na aquisição do bem.

✓ λ é a utilidade marginal da renda.

Função Cobb-Douglas

- Função Cobb-Douglas: $U(x, y) = x^{\alpha} y^{\beta}$e, α+ β=1
- Função Lagrange: $L = x^{\alpha} y^{\beta} + \lambda(I - p_x x - p_y y)$

✓ $\frac{\partial L}{\partial x} = \alpha x^{\alpha-1} y^{\beta} - \lambda\, p_x = 0$

✓ $\frac{\partial L}{\partial y} = \beta x^{\alpha} y^{\beta-1} - \lambda\, p_y = 0$

✓ $\frac{\partial L}{\partial \lambda} = I - p_1 x_1 - p_y y = 0$

Função Cobb-Douglas

- Função Cobb-Douglas: $U(x, y) = x^{\alpha}y^{\beta}$ e, α+ β=1
- Função Lagrange: $L = x^{\alpha}y^{\beta} + \lambda(I - p_x x - p_y y)$

✓Resolvendo pra λ: $\frac{\alpha y}{\beta x} = \frac{p_x}{p_y}$ ou:

✓$p_y y = \frac{\beta}{\alpha} p_x x = \frac{1-\alpha}{\alpha} p_x x$, substituindo na restrição:

✓$I = p_x x + p_y y = p_x x + \frac{1-\alpha}{\alpha} p_x x = p_x x(1 + \frac{1-\alpha}{\alpha}) = \frac{1}{\alpha} p_x x$

Função Cobb-Douglas

- Função Cobb-Douglas: $U(x, y) = x^{\alpha}y^{\beta}$e, α+ β=1
- Função Lagrange: $L = x^{\alpha}y^{\beta} + \lambda(I - p_x x - p_y y)$

✓Resolvendo pra $x^*= \frac{\alpha I}{p_x}$ e $y^*= \frac{\beta I}{p_y}$

✓Seja: $p_x = 1, p_y = 4\ e\ I = 8$. Considerando α=0,5 e β=0,5, encontrar: U*, x^*, y^* e λ.

Função Cobb-Douglas

- Função Cobb-Douglas: $U(x, y) = x^{\alpha}y^{\beta}$
- Função Lagrange: $L = x^{\alpha}y^{\beta} + \lambda(I - p_x x - p_y y)$

✓Resolvendo pra $x^{*} = \frac{\alpha I}{p_x}$ e $y^{*} = \frac{\beta I}{p_y}$

✓Seja: $p_x = 1, p_y = 4$ e $I = 8.$ Considerando α=0,5 e β=0,5, encontrar:

✓U*=2, $x^{*} = 4$, $y^{*} = 1$ e $\lambda = 0{,}25$.

Função Utilidade Indireta

- ✓ $x_1^* = x_1(p_1, p_2, \dots, p_n, I)$,
- ✓ $x_2^* = x_2(p_1, p_2, \dots, p_n, I)$,
- ✓ $\vdots$
- ✓ $x_n^* = x_n(p_1, p_2, \dots, p_n, I)$

- Função Utilidade no ponto ótimo
  - ✓ $U[x_1^*(p_1, p_2, \dots, p_n, I), x_2^*\,(p_1, p_2, \dots, p_n, I),\dots, x_n^*(p_1, p_2, \dots, p_n, I)]$
    $=\mathrm{V}\ [(p_1, p_2, \dots, p_n, I)]$

- ✓ Função Utilidade Indireta: V – o nível ótimo de utilidade vai depender indiretamente dos preços dos bens e da renda do indivíduo.

Função Utilidade Indireta

- $Função\ Cobb - Douglas\ com\ \alpha = \beta = 0{,}5$

✓ $x^* = \frac{I}{2p_x}$ e $y^* = \frac{I}{2p_y}$

- Função Utilidade no ponto ótimo

V $[(p_x, p_y, I)] =$ U($x^*, \ y^*) = {x^*}^{0,5} \ {y^*}^{0,5} = \frac{I}{2p_x^{0,5} p_y^{0,5}}$

✓ $Para\ p_x = 1, p_y = 4\ e\ I = 8$, V=?

Minimização dos gastos

- $Função\ Cobb - Douglas\ com\ \alpha = \beta = 0{,}5$

✓ $x^* = \frac{I}{2p_x}$ e $y^* = \frac{I}{2p_y}$

- Função Utilidade no ponto ótimo

V $[(p_x, p_y, I)]$= U($x^*, \ y^*$)= $x^{*0,5} \ y^{*0,5} = \frac{I}{2p_x^{0,5} p_y^{0,5}}$

✓ $Para\ p_x = 1, p_y = 4\ e\ I = 8$, V=2

Minimização dos gastos

- Matematicamente, o problema de minimização dos gastos do indivíduo (dual) para escolher $x_1, x_2, \ldots, x_n$ é minimizar:

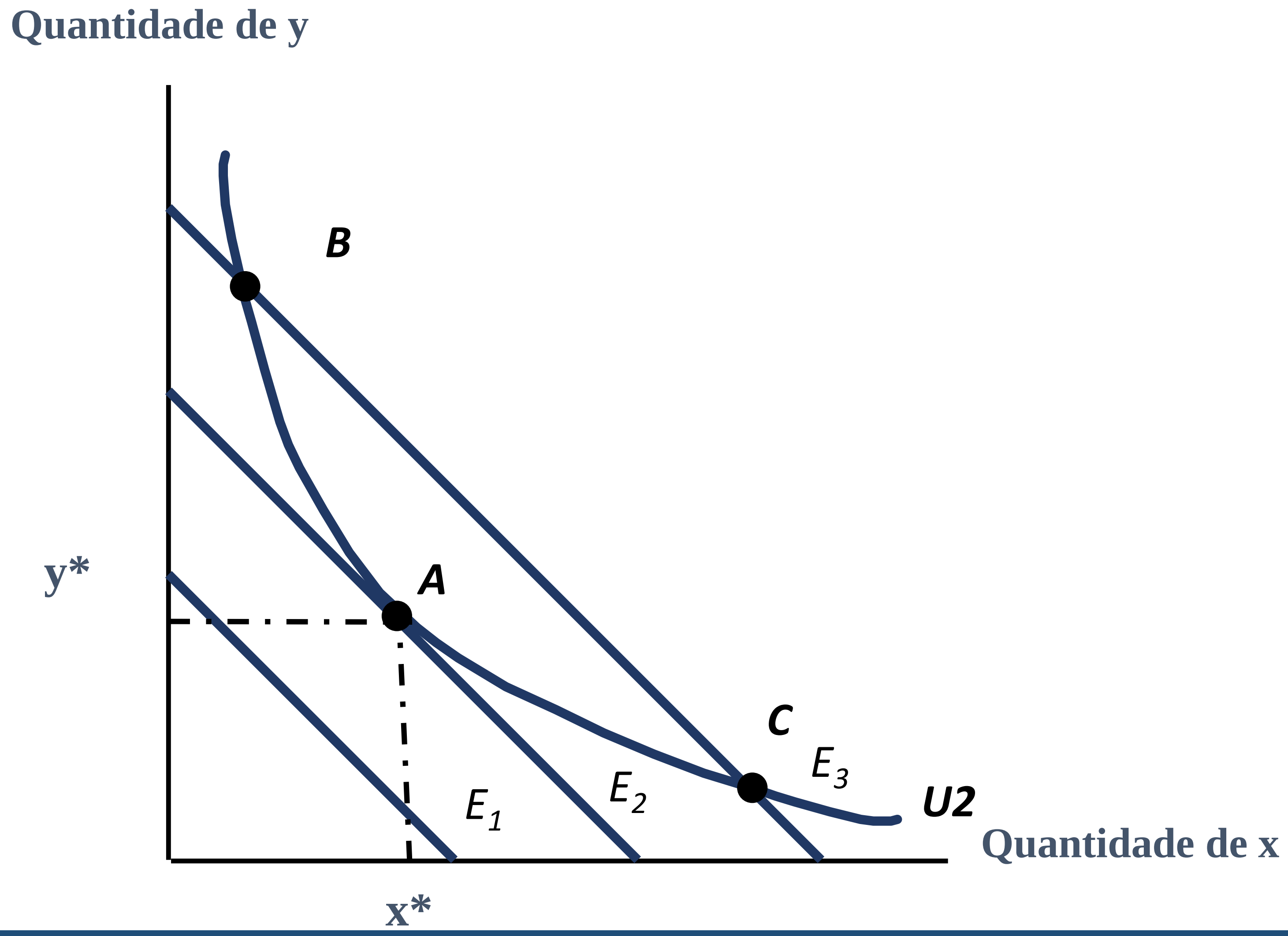
- $\mathrm{E} = p_1\, x_1 + p_2 x_2 + \cdots + p_n x_n$

- Sujeito à: $\bar{U} = U(x_1, x_2, \ldots, x_n)$

✓ A escolha das quantidades ótimas de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ vai depender dos preços dos bens $(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ e do nível de utilidade requerido.

Dual: problema de minimização dos gastos

Figura 4.6



Minimização dos gastos

- $Função\ Cobb - Douglas\ com\ \alpha = \beta = 0{,}5$

- Função Utilidade no ponto ótimo:

$$V\,[(p_x, p_y, I)] = \frac{I}{2p_x^{0,5}p_y^{0,5}}$$

✓Obs. V = U* e E = I

- Função Gasto como inversa da função Utilidade Indireta:

✓E $[(p_x, p_y, U)] = 2p_x^{0,5}p_y^{0,5}$U

✓$Para\ p_x = 1, p_y = 4\ e$ U=2, E=?

Minimização dos gastos

- $Função\ Cobb - Douglas\ com\ \alpha = \beta = 0{,}5$

- Função Utilidade no ponto ótimo:

$$V\ [(p_x, p_y, I)] = \frac{I}{2p_x^{0,5} p_y^{0,5}}$$

- Função Gasto como inversa da função Utilidade Indireta:

✓ $E\ [(p_x, p_y, U)] = 2p_x^{0,5} p_y^{0,5} U$

✓ $Para\ p_x = 1, p_y = 4\ e$ U=2 e E=8.

Propriedades da Função Gasto

- ✓ Homogeneidade: Se dobrarmos os preços de todos os bens, o valor requerido para a aquisição desses bens (gasto) também dobrará;

- ✓A função gasto é não decrescente nos preços: $\frac{\partial E}{\partial p_i} \geq 0$, para todo bem i;

- ✓A função gasto é côncava em relação aos preços $\frac{\partial^2}{\partial p_i^2} \leq 0$

Referências Bibliográficas

- ✓ NICHOLSON, W; SNYDER, C. **Microeconomic Theory: Basic Principles and Extensions**. 11th Edition (International Edition), 2012 – caps. 3 e 4.