

## 1. ANÁLISE DE CORRENTES E TENSÕES DISTORCIDAS

### 1.1 Introdução

Nestas notas, a análise de correntes e tensões distorcidas é realizada com a determinação do espectro harmônico através da abordagem tradicional de Transformada de Fourier (vide Anexo). Com isso, não são levadas em conta interferências como:

- interharmônicas: todo sinal de tensão ou corrente cuja frequência não seja múltipla da frequência da fundamental (neste caso a frequência da rede CA);
- transitórios de curta duração na rede CA, como afundamentos (“sags”) e elevações (“swells”) de tensão, transitório de corrente de partida de motores etc. A análise de Fourier é realizada em condições de regime permanente;
- harmônicas não características, geralmente geradas por assimetrias e desequilíbrios da rede CA.

### 1.2 Potência (para tensões e correntes periódicas e distorcidas)

Em um sistema CA com frequência  $f_{rede}$ , sejam a tensão e corrente distorcidas:

$$v(t) = \sum_{m=0}^{\infty} V_m \cdot \cos(\omega m t + \theta_m) \quad (1.1) \quad \text{e} \quad i(t) = \sum_{n=0}^{\infty} I_n \cdot \cos(\omega n t + \phi_n) \quad (1.2) \quad \text{com} \quad \omega = 2 \cdot \pi \cdot f_{rede} = \frac{2 \cdot \pi}{T_{rede}} \quad (1.3)$$

Calcula-se a potência média por: 
$$P = \frac{1}{T} \int_0^T v(t) \cdot i(t) dt = \sum_{\substack{m=0, \infty \\ n=0, \infty}} X_{mn} \quad (1.4)$$

e os termos 
$$X_{mn} = \frac{1}{T} \int_0^T V_m \cdot \cos(\omega m t + \theta_m) \cdot I_n \cos(\omega n t + \phi_n) dt \quad (1.5)$$
 valem:

-  $X_{mn} = 0$  se  $m \neq n$  (1.6)

-  $X_{mn} = \frac{V_m I_m}{2} \cdot \cos(\theta_m - \phi_m) = \dots = V_{m\text{eficaz}} \cdot I_{m\text{eficaz}} \cdot \cos(\theta_m - \phi_m) = V_{m\text{ef}} \cdot I_{m\text{ef}} \cdot \cos(\theta_m - \phi_m)$  se  $m = n$  (1.7)

Portanto a potência média é dada por 
$$P = \sum_{\substack{m=0, \infty \\ n=0, \infty}} X_{mn} \quad , \quad \text{com} \quad m = n \quad (1.8)$$

Se  $v(t)$  for puramente senoidal (sem distorção),  $v(t) = V_1 \cos(\omega t + \theta_1)$  (1.1a) e a potência reduz-se

a 
$$P = \frac{V_1 \cdot I_1}{2} \cos(\theta_1 - \phi_1) \quad (1.9) \quad (\text{ou, em valores eficazes,} \quad P = V_{1\text{ef}} \cdot I_{1\text{ef}} \cos(\theta_1 - \phi_1) \quad (1.9a), \quad \text{com}$$

$$V_{ef} = V_{1ef} = \frac{V_1}{\sqrt{2}} \quad (1.10).$$

### 1.3 Valores eficazes de formas de onda distorcidas

$$I_{ef} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2(t) dt} = \sqrt{\left( \left( \frac{I_1}{\sqrt{2}} \right)^2 + \left( \frac{I_2}{\sqrt{2}} \right)^2 + \dots + \left( \frac{I_n}{\sqrt{2}} \right)^2 \right)} = \sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} (I_{kef}^2)} \quad (1.11)$$

$$V_{ef} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T v^2(t) dt} = \sqrt{\left( \left( \frac{V_1}{\sqrt{2}} \right)^2 + \left( \frac{V_2}{\sqrt{2}} \right)^2 + \dots + \left( \frac{V_n}{\sqrt{2}} \right)^2 \right)} = \sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} (V_{kef}^2)} \quad (1.12)$$

Exercício: Demonstrar as relações (1.11) e (1.12).

### 1.4 Fator de Potência

Utiliza-se aqui o fator de potência definido como o quociente entre a potência ativa  $P$  e a potência aparente  $S$ , conforme a equação (1.13):

$$FP = \frac{P}{S} = \frac{P}{V_{ef} \cdot I_{ef}} \quad (1.13)$$

Esta definição indica se um sistema de fornecimento de energia elétrica está sendo utilizado eficientemente. Assim, uma carga que consome uma potência média  $P$  quando alimentada com uma tensão com valor eficaz  $V_{ef}$ , absorve o menor valor possível de  $I_{ef}$  para um valor de fator de potência unitário (vide equação 1.15). Como o dimensionamento do sistema elétrico que alimenta uma carga com fator de potência  $FP$  e tensão  $V_{ef}$  depende do valor eficaz da corrente, reduz-se o custo da instalação elétrica trabalhando-se com elevados valores de  $FP$ . Vale a pena lembrar que a bitola dos cabos de energia e dos condutores empregados em transformadores depende da potência neles dissipada, que por sua vez depende do valor eficaz da corrente (

$$P_{dissipada} = R_{fio} \cdot I_{ef}^2 \quad (1.14a)).$$

$$I_{ef} = \frac{P}{V_{ef} \cdot FP} \quad (1.15)$$

De (1.15), verifica-se que mantendo-se fixos  $P$  e  $V_{ef}$ , um baixo  $FP$  implica em elevada corrente eficaz.

Mas, para tensão puramente senoidal ( $v(t) = V_1 \cos(\omega t + \theta_1)$  (1.1a) e  $V_{ef} = V_{1ef} = \frac{V_1}{\sqrt{2}}$  (1.10)):

$$FP = \frac{P}{V_{ef} \cdot I_{ef}} = \frac{V_{ef} \cdot I_{1ef} \cdot \cos(\theta - \phi_1)}{V_{ef} \cdot I_{ef}} \quad (1.16)$$

Definem-se os termos:

–  $\cos(\theta - \phi_1)$  (1.17) como o fator de defasagem;

–  $FD = \frac{I_{1ef}}{I_{ef}} = \frac{I_{1ef}}{\sqrt{I_{1ef}^2 + I_{2ef}^2 + \dots}}$  (1.18) como o fator de deformação ou de distorção.

Nesta condição de tensão puramente senoidal, pode-se reescrever (1.13) como:

$$FP = FD \cos(\theta - \phi_1) \quad (1.19)$$

O fator de defasagem corresponde ao cosseno da defasagem entre os componentes fundamentais da corrente e da tensão. Esta defasagem é responsável pelo fluxo de energia reativa, ou seja, relaciona-se à parcela da corrente com frequência fundamental, que resulta em uma potência instantânea com média nula.

Se  $i(t)$  for puramente senoidal, tem-se  $FD=1$  e  $FP = \cos(\theta_1 - \phi_1)$  (1.20), o que corresponde ao resultado já conhecido para o regime senoidal.

Se  $i(t)$  for deformada (com conteúdo harmônico), tem-se  $FD < 1$ . Assim, uma corrente deformada possui componentes harmônicos, que de acordo com (14), contribuem para a redução de  $FD$  e conseqüentemente reduzem o valor do fator de potência (15).

## 1.5 Problemas associados às cargas com baixo $FP$

### 1.5.1 Dimensionamento dos cabos, disjuntores, chaves e fusíveis

Para se alimentar uma carga de potência  $P$  e tensão nominal  $V_{ef}$ , a corrente será dada por

$$I_{ef} = \frac{P}{V_{ef} \cdot FP} \quad (1.15), \text{ ou seja, a corrente de carga aumenta de um fator } 1/FP.$$

Levando-se em conta que os equipamentos acima são dimensionados pela sua capacidade de corrente (considera-se que  $V_{ef}$  se mantém constante), a operação com baixo  $FP$  (baixo  $FD$  ou baixo fator de defasagem (13)) requer um superdimensionamento destes (implicando em maior custo). Deve ser lembrado ainda que a potência dissipada em um cabo é dada por  $P_{dissipada} = R_{cabo} \cdot I_{ef}^2$  (1.14b).

### 1.5.2 Dimensionamento de transformadores

A tensão  $E_{pef}$  no primário de um transformador monofásico é dada por:

$$e_p(t) = N_p \frac{d\phi}{dt} \quad (1.21)$$

ou por:

$$E_{pef} = KB_{max} S N_p f \quad (1.22)$$

onde:

$B_{max}$  = valor de pico do campo  $B(t)$ ;

$S$  = seção transversal do núcleo, ou área da perna do núcleo;

$\phi$  = fluxo magnético  $B.S$ ;

$K = 4,44$  (apenas para  $B(t)$  senoidal!);

$N_p$  = número de espiras do primário;

$f$  = frequência.

O valor de  $B_{max}$  é definido pela curva de magnetização do material escolhido, devendo ser o maior possível para se reduzir o fator  $S.N_p$ , que é diretamente associado ao volume do trafo, pois  $N_p$  define a área da janela do transformador. Em outras palavras, definidos  $E_{pef}$  e  $f$ , calcula-se o fator  $S.N_p$ . As seções transversais dos fios ( $S_{fio_p}$  e  $S_{fio_s}$ ) são determinadas pelas correntes eficazes que os atravessam.

( $I_{efp}$ ,  $I_{efs}$ ), que por sua vez são ditadas pelas potências dissipadas  $S_{fio_p} \cdot I_{efp}^2$  e  $S_{fio_s} \cdot I_{efs}^2$  e as correspondentes temperaturas máximas dos fios. Assim, a janela terá a área de  $S_{janela} = N_p S_{fio_p} + N_s S_{fio_s}$  (1.23) (sem se levar em conta o fator de empacotamento dos fios, que é menor que a unidade).

Pode-se concluir nesta seção que ao se alimentar uma carga com baixo fator de potência (devido a harmônicos ou reativos) via transformador, necessita-se de condutores de maior diâmetro, o que leva a um aumento da janela, do volume total e do custo do transformador. Verifica-se ainda que a nova definição de fator de potência (15) para correntes deformadas (mas tensões senoidais) é compatível com a definição utilizada em regime senoidal. Nota-se também que a potência aparente continua a ditar o volume do transformador.

### 1.5.3 Dimensionamento de indutores com núcleo de ferro

Correntes deformadas podem apresentar elevados valores de pico. Deve-se lembrar que os indutores com núcleo de ferro saturam para correntes instantâneas maiores que um dado  $I_{max}$ , e com isso a indutância reduz-se também instantaneamente.

### 1.5.4 Superaquecimento de cabos, transformadores e indutores

Caso o fator de potência tenha sido negligenciado nos equipamentos citados nos itens anteriores, haverá superaquecimento nestes, devido à elevação do valor eficaz da corrente.

### 1.5.5 Sobrecorrente e sobreaquecimento de bancos de capacitores, causado por FP baixo

Os componentes de alta frequência de uma corrente de carga não senoidal encontram uma impedância de linha  $X_{Linha} = \omega_h \cdot L_{linha}$  (1.24) crescente com valores crescentes da harmônica de ordem  $h$ . Se for colocado em paralelo com esta carga um banco de capacitores de correção de fator de potência, este banco apresentará uma impedância  $X_{Cbanco} = 1/(\omega_h \cdot C_{banco})$  (1.25) para a  $h$ -ésima harmônica, ou seja, decrescente com valores crescentes de  $h$ . Como este banco foi inicialmente projetado apenas para corrigir o fator de defasagem  $\cos(\theta_1 - \phi_1)$  (que é igual ao próprio fator de potência para cargas sem distorção de corrente) da carga, ele acabará se sobre-aquecendo devido à corrente eficaz das harmônicas, e poderá inclusive ser danificado por esta corrente adicional (deve-se lembrar que capacitores reais têm uma resistência série de perdas que dá origem a dissipação de potência ativa em funcionamento,  $P_{dissipada\ capacitor} = R_{perdas} \cdot I_{eficaz\ capacitor}^2$  (1.14c)).

É importante ressaltar que tal problema não ocorre necessariamente dentro das instalações de um único consumidor. Um banco de capacitores de um consumidor que não contenha cargas não lineares pode vir a ser

danificado pelas correntes deformadas geradas por um vizinho.

### 1.5.6 Ressonâncias em sistemas de potência e instalações industriais

Sistemas de potência como o citado no item 1.5.5 possuem polos complexos que podem ser excitados, produzindo sobrecorrentes ou sobretensões caso a frequência das tensões ou correntes do sistema elétrico sejam próximas às frequências próprias destes polos. Assim, existe a possibilidade de um ou mais componentes harmônicas de uma corrente distorcida virem a excitar uma das frequências de ressonância do sistema.

#### Exemplo: Ressonância em uma planta industrial

Uma instalação de uma metalúrgica, contendo quatro fornos de indução sem canal de 1 MVA e um forno de indução a canal de 750 kVA é mostrada simplificada na figura 1.1. O forno a canal possui um esquema elétrico equivalente mostrado na figura 1.2.

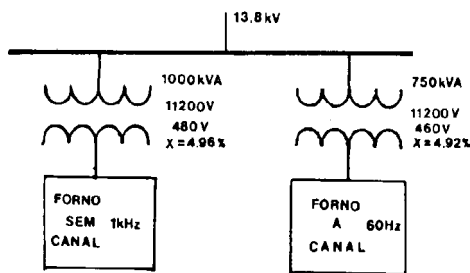


Figura 1.1: Esquema elétrico simplificado da planta industrial do exemplo 1.

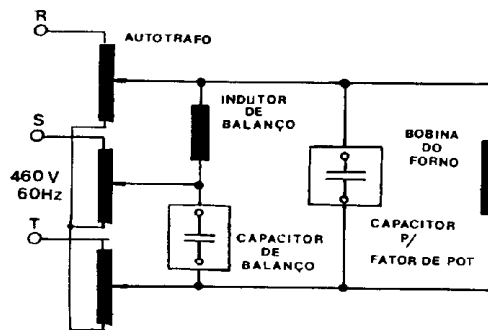


Figura 1.2: Esquema elétrico equivalente do forno de indução a canal do exemplo 1.

Os fornos sem canal são inversores de frequência alimentados por um retificador trifásico de dois caminhos (3F2C) totalmente controlado. As harmônicas de corrente geradas por estes retificadores encontram um caminho de baixa impedância devido às ressonâncias série entre as impedâncias dos transformadores (figura 1.1) e os capacitores do forno a canal (figura 1.2). Com isso, as correntes de linha no forno a canal foram fortemente afetadas, inviabilizando sua operação devido ao superaquecimento tanto do seu transformador como dos seus componentes, pela aumento do valor da corrente eficaz com o consequente acionamento da proteção de sobrecorrente do equipamento (vide “Antes da compensação” na figura 1.3). O problema foi resolvido (vide “depois da compensação” na figura 1.3) com a inserção de indutores em série com os capacitores do forno a

canal, alterando-se as frequências de ressonância do sistema de modo que não coincidissem com as frequências geradas pelos retificadores dos fornos sem canal.

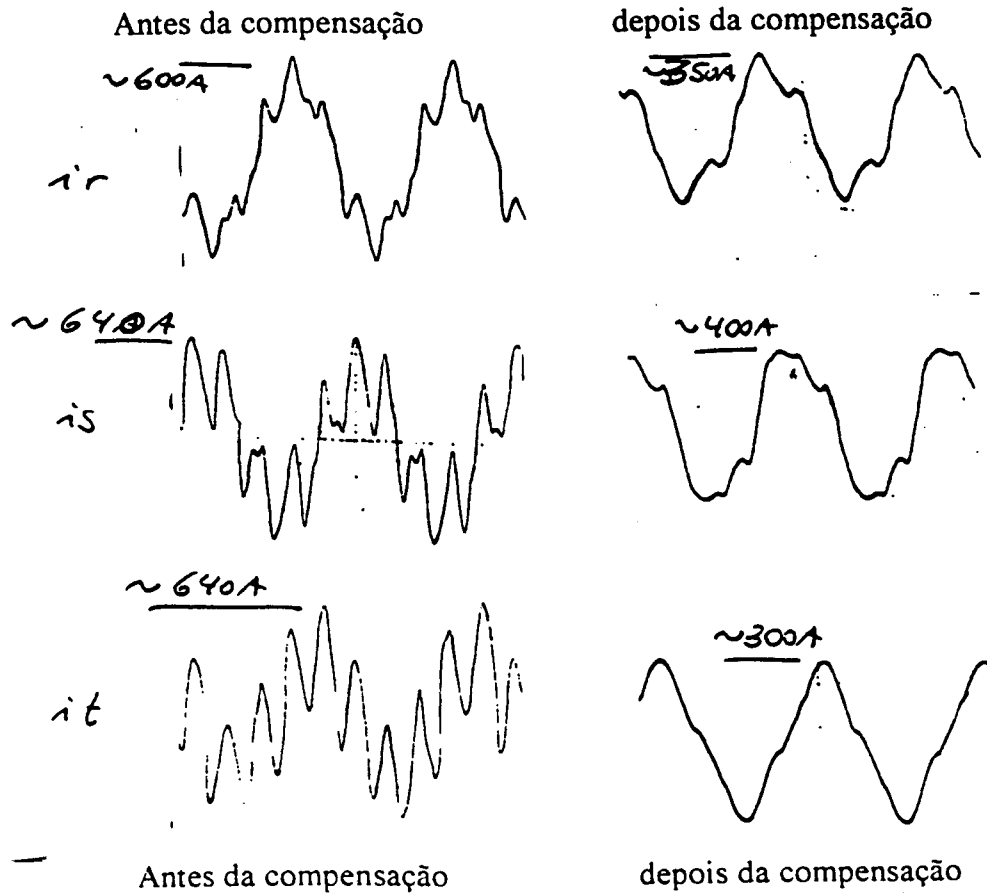


Figura 1.3: Correntes de linha no forno a canal do exemplo da figura 1.1, antes e após a compensação.

### 1.5.7 Deformação da tensão da rede

Correntes não senoidais circulando em um sistema elétrico produzirão quedas de tensão não senoidais, deformando as tensões nas cargas. Tais deformações podem causar mal funcionamento de cargas sensíveis.

Exemplo 2: Retificador monofásico com filtro capacitivo.

Exemplo 3: Retificador trifásico de dois caminhos (3F2C) controlado com filtro indutivo.

### 1.5.8 Elevação da corrente no neutro

Uma carga trifásica linear e equilibrada ligada em estrela, com neutro, apresenta corrente de neutro nula. Para cargas não lineares no entanto algumas harmônicas de corrente podem produzir corrente de neutro não nula.

Exemplo 4: três retificadores monofásicos com filtro capacitivo, ligados em estrela com neutro. A corrente de neutro não é nula, chegando a ser maior que a própria corrente de linha!

Exercício: Demonstre que no caso do exemplo 4 a corrente de neutro pode chegar a  $\sqrt{3} I_{ef\ linha}$  (ver item 1.5.9.1 a seguir).

### 1.5.9 Alguns resultados importantes para o cálculo de valores médios e eficazes

#### 1.5.9.1 Valor eficaz da soma de correntes (tensões) não coincidentes no tempo

O valor eficaz da soma de três correntes  $i_1, i_2$  e  $i_3$  é dado por:

$$I_{ef} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2(t) dt} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T ((i_1)^2 + (i_2)^2 + (i_3)^2) dt} \quad (1.26)$$

Suponha três correntes  $i_1, i_2$  e  $i_3$ , não coincidentes no tempo (significando que não têm valores não nulos ao mesmo tempo). Neste caso, o valor eficaz de sua soma resulta:

$$I_{ef} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i_1^2 dt + \frac{1}{T} \int_0^T i_2^2 dt + \frac{1}{T} \int_0^T i_3^2 dt} = \sqrt{I_1^2 ef + I_2^2 ef + I_3^2 ef} \quad (1.27)$$

se  $I_1 ef = I_2 ef = I_3 ef$ ,  $I_{ef} = \sqrt{3 I_1^2 ef} = \sqrt{3} \cdot I_1 ef$

generalizando para  $n$  termos:  $I_{ef} = \sqrt{n} \cdot I_1 ef$  (1.28)

#### 1.5.9.2 Valor médio da soma de correntes (tensões) não coincidentes no tempo

O valor médio da soma de três correntes  $i_1, i_2$  e  $i_3$  não coincidentes no tempo é dado por:

$$I_m = \frac{1}{T} \int_0^T i(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T ((i_1) + (i_2) + (i_3)) dt \quad (1.29)$$

logo  $I_m = I_{m1} + I_{m2} + I_{m3}$  .

se  $I_{m1} = I_{m2} = I_{m3} \rightarrow I_m = 3 I_{m1}$

generalizando para  $n$  termos:  $I_m = n \cdot I_{m1}$  (1.30)

## 2. Revisão: Análise de Fourier de formas de onda periódicas

(retirado da ref. [1], capítulo 3-2-4-1)

Sabe-se que uma forma de onda  $f(t)$  pode ser representada por:

$$f(t) = F_0 + \sum_{h=1}^{\infty} f_h(t) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{h=1}^{\infty} \{a_h \cos(h\omega t) + b_h \sin(h\omega t)\} \quad (\text{equação 3-21 da referência [1]})$$

aonde  $F_0 = \frac{1}{2} a_0$  é o valor médio da função  $f(t)$ , e os coeficientes  $a_h$  e  $b_h$  são dados por:

$$a_h = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos(h\omega t) d(\omega t) \quad h=0, \dots, \infty \quad (3-22), \text{ ref. [1]}$$

$$b_h = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin(h\omega t) d(\omega t) \quad h=0, \dots, \infty \quad (3-23), \text{ ref.}[1]$$

De 3-21 e 3-22, e sabendo-se que o  $\omega = 2\pi/T$ , o valor médio fica:

$$F_0 = \frac{1}{2} a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) d(\omega t) = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt \quad (3-24), \text{ ref.}[1]$$

A expressão (3-21) pode ser reescrita como:

$$f(t) = F_0 + \sum_{h=1}^{\infty} \sqrt{a_h^2 + b_h^2} \cdot \cos(h\omega t + \phi_h) \quad (3-21a)$$

Na equação (3-21), cada componente na ordem  $h$  ( $f_h(t) = a_h \cos(h\omega t) + b_h \sin(h\omega t)$ ) pode ser representado como um fasor com o seu valor eficaz:

$$\hat{F}_h = F_h e^{j\phi_h} \quad (3-25), \text{ ref.}[1],$$

aonde o valor eficaz é dado por  $F_h = \frac{\sqrt{a_h^2 + b_h^2}}{\sqrt{2}}$  (3-26), ref.[1],

e a fase  $\phi_h$  é dada por  $\tan(\phi_h) = \frac{(-b_h)}{a_h}$  (3-27), ref.[1].

Outros autores ([2], [3]) usam seno para a expressão 3-21:

$$f(t) = F_0 + \sum_{h=1}^{\infty} \sqrt{a_h^2 + b_h^2} \cdot \sin(h\omega t + \phi_h) \quad (3-21b), \text{ refs. [2],[3]}$$

com  $\phi_h = \tan^{-1}\left(\frac{a_h}{b_h}\right)$  (3-27b), refs. [2],[3]

Logo, o valor eficaz da função  $f(t)$  pode ser expressa como a soma quadrática dos valores eficazes de cada componente harmônica da série de Fourier:

$$F_{eficaz} = \left( F_0^2 + \sum_{h=1}^{\infty} F_h^2 \right)^{1/2} \quad (3-28), \text{ ref. [1]}$$

A tabela 3-1 da ref. [1] mostra simplificações que podem ser feitas levando-se em conta a simetria da forma de onda (função) analisada.

Tabela 3-1 (ref. [1]): uso de simetria na análise de Fourier de formas de onda periódicas



<i>Simetria</i>	<i>Condição</i>	<i>Coefficientes <math>a_h</math> e <math>b_h</math></i>
Par (ex.: $f(t)=\cos(\omega t)$ )	$f(-t)=f(t)$	$a_h = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \cos(h\omega t) d(\omega t)$ $b_h = 0$
Ímpar (ex.: $f(t)=\sin(\omega t)$ )	$f(-t)=-f(t)$	$a_h = 0$ $b_h = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \sin(h\omega t) d(\omega t)$
Meia-onda	$f(t)=-f(t+\frac{1}{2}T)$	$a_h = b_h = 0$ , para $h$ par $a_h = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \cos(h\omega t) d(\omega t)$ para $h$ ímpar $b_h = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \sin(h\omega t) d(\omega t)$ para $h$ ímpar
Par e quarto-de-onda	$f(-t)=f(t)$ $f(t)=-f(t+\frac{1}{2}T)$	$a_h = \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} f(t) \cos(h\omega t) d(\omega t)$ para $h$ ímpar $a_h = 0$ , para $h$ par $b_h = 0$ , para qualquer $h$
Ímpar e quarto-de-onda	$f(-t)=-f(t)$ $f(t)=-f(t+\frac{1}{2}T)$	$a_h = 0$ , para qualquer $h$ $b_h = \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} f(t) \sin(h\omega t) d(\omega t)$ para $h$ ímpar $b_h = 0$ , para $h$ par

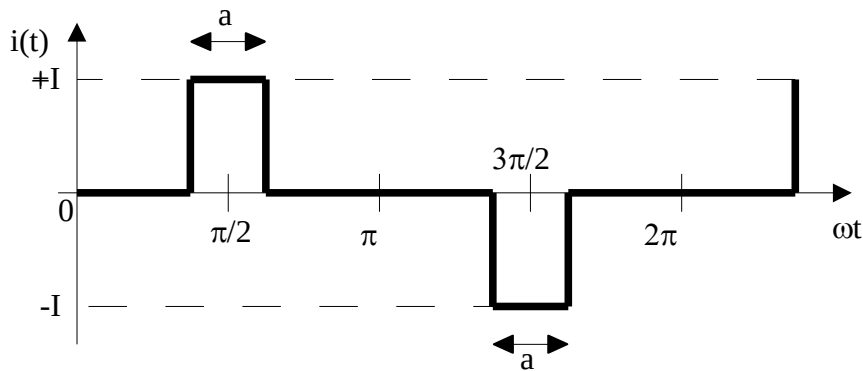
Referência:

- [1] MOHAN, N.; UNDELAND, T.M.; ROBBINS, W.P. *Power Electronics: Converters, Applications and Design*, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1995, 2<sup>nd</sup> ed.
- [2] RASHID, M.H. *Power Electronics: Circuits, Devices and Applications*, Prentice-Hall, New Jersey, 1993, 2<sup>nd</sup> ed.
- [3] HART, D.W. *Introduction to Power Electronics*, Prentice-Hall, New Jersey, 1997.

### Exercícios Resolvidos (propostos pelo prof. Lourenço Matakas Jr.)

**Exercício 1:** Calcular o espectro harmônico da corrente da figura 2.1 abaixo, em função de  $a$  e de  $I$ .

Figura 2.1: forma de onda de corrente para a questão 1.



Solução:

A forma de onda  $i(t)$  da figura 2.1 é uma função ímpar (  $i(-t) = -i(t)$  ), logo:

$$a_h = 0, \text{ para todo } h \text{ (veja que } I_0 = \frac{1}{2} a_0 \text{ que é o valor médio de } i(t), \text{ é nulo)}$$

e  $i(t)$  tem simetria de meia onda (  $i(t) = -i(t + \frac{1}{2}T)$  ), então:

$$b_h = 0, \text{ para } h \text{ par}$$

$$b_h = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} i(t) \sin(h\omega t) d(\omega t) \text{ para } h \text{ ímpar}$$

Logo:

$$b_h = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} i(t) \sin(h\omega t) d(\omega t) = \frac{2}{\pi} \int_{(\frac{\pi}{2} - \frac{a}{2})}^{(\frac{\pi}{2} + \frac{a}{2})} I \sin(h\omega t) d(\omega t) = \left[ -\frac{2}{\pi} \frac{I}{h} \cos(h\omega t) \right]_{(\frac{\pi}{2} - \frac{a}{2})}^{(\frac{\pi}{2} + \frac{a}{2})} \Rightarrow$$

$$b_h = \frac{4I}{\pi h} \sin\left(h \frac{\pi}{2}\right) \sin\left(h \frac{a}{2}\right), \text{ para } h \text{ ímpar}$$

E de (3-21) tem-se:

$$i(t) = \sum_{h=1}^{\infty} b_h \sin(h\omega t) = \sum_{h=1}^{\infty} \left\{ \left[ \frac{4I}{\pi h} \sin\left(h \frac{\pi}{2}\right) \sin\left(h \frac{a}{2}\right) \right] \sin(h\omega t) \right\}, \text{ para } h \text{ ímpar}$$

Aplicando-se (3-21a) tem-se:

$$i(t) = \sum_{h=1}^{\infty} b_h \cos\left[h\omega t + \text{tg}^{-1}\left(\frac{-b_h}{a_h}\right)\right] \text{ para } h \text{ ímpar, que é equivalente ao resultado acima. Verifique!}$$

**Exercício 2:** Supondo-se que a corrente  $i(t)$  do exercício 1 seja drenada por uma carga não linear alimentada por uma tensão senoidal de período  $2\pi$ , valor de pico  $V_I$  e mesma fase da corrente da figura 4, calcular (para larguras  $a=\pi$ ,  $a=2\pi/3$ ,  $a=\pi/6$ ):

a) amplitude das harmônicas de ordem zero à 15<sup>th</sup>;

b) valor eficaz da corrente, por:  $I_{eficaz} = \sqrt{I_{0ef}^2 + I_{1ef}^2 + I_{2ef}^2 + I_{3ef}^2 + \dots}$  e por  $I_{eficaz} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2(t) dt}$

c) potência ativa  $P$ ;

d)  $FP$ ,  $FD$  e  $\cos(\phi)$ ;

e) consegue-se corrigir o fator de potência colocando-se um capacitor em paralelo com a carga?

Solução:

Inicialmente, veja que a tensão de alimentação do enunciado pode ser descrita por  $v(t) = V_1 \cdot \sin(\omega_1 t)$  ou  $v(t) = V_1 \cdot \cos(\omega_1 t - \pi/2)$ .

a) como  $I$  (valor de pico da corrente) não é dado numericamente, pode-se calcular as componentes harmônicas de  $i(t)$  em p.u., usando-se  $I$  como base. Note-se que a componente de ordem zero ( $h=0$ ) que é a componente contínua, ou valor médio de  $i(t)$ , é nula. Pode-se lançar mão de uma planilha (ou tabela) para se visualizar os resultados. A tabela 2.1 é uma planilha com os resultados, lembrando-se que:

$$I_{h(pico)} = b_h = \left[ \frac{4I}{\pi h} \sin\left(h \frac{\pi}{2}\right) \sin\left(h \frac{a}{2}\right) \right], \text{ valor de pico da componente harmônica } h$$

$$I_{h(eficaz)} = \sqrt{\frac{b_h^2}{2}}, \text{ valor eficaz da componente harmônica } h$$

Tabela 2.1: valores de pico e eficazes, em p.u., para as harmônicas ( $h$ ) de ordem 1 até 15, para diversos valores de largura de pulso ( $a$ ).

Da tabela 2.1, note-se que não há a presença de harmônicas de ordem par, como era de se esperar. Note-se ainda que para  $a=2\pi/3$  ( $=120^\circ$ ) as componentes múltiplas de três desapareceram.

	a=π	a=π	a=2π /3	a=2π /3	a=π /6	a=π /6
Ordem	Ih (pico)	Ih (eficaz)	Ih (pico)	Ih (eficaz)	Ih (pico)	Ih (eficaz)
1	1,27324	0,90032	1,10266	0,77970	0,32954	0,23302
2	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
3	0,42441	0,30011	0,00000	0,00000	-0,30011	0,21221
4	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
5	0,25465	0,18006	-0,22053	0,15594	0,24597	0,17393
6	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
7	0,18189	0,12862	-0,15752	0,11139	-0,17569	0,12423
8	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
9	0,14147	0,10004	0,00000	0,00000	0,10004	0,07074
10	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
11	0,11575	0,08185	0,10024	0,07088	-0,02996	0,02118
12	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
13	0,09794	0,06926	0,08482	0,05998	-0,02535	0,01792
14	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
15	0,08488	0,06002	0,00000	0,00000	0,06002	0,04244
	a=π	a=π	a=2π /3	a=2π /3	a=π /6	a=π /6
I <sub>ef</sub>		0,98727		0,80825		0,39063

b) Obviamente o cálculo do valor da corrente eficaz por  $I_{eficaz} = \sqrt{I_{0ef}^2 + I_{1ef}^2 + I_{2ef}^2 + I_{3ef}^2 + \dots}$  terá sua precisão determinada pela ordem das harmônicas (no caso, calculadas até a 15<sup>th</sup>). O cálculo da corrente eficaz pela definição fica:

$$I_{eficaz} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2(t) dt} = \sqrt{\frac{1}{\pi} I^2 a} = I \sqrt{\frac{a}{\pi}}$$

(importante: a largura  $a$  deve ser em radianos na fórmula acima!)

Pode-se usar uma planilha/tabela para se mostrar os resultados pelas duas definições:

Tabela 2.2: valores eficazes de corrente (em p.u.) para diversos valores de largura de pulso  $a$ , usando-se a somatória de componentes harmônicas (soma) e pela definição.

	a=π	a=2π /3	a=π /6
Ordem	lh (eficaz)	lh (eficaz)	lh (eficaz)
1	0,90032	0,77970	0,23302
2	0,00000	0,00000	0,00000
3	0,30011	0,00000	0,21221
4	0,00000	0,00000	0,00000
5	0,18006	0,15594	0,17393
6	0,00000	0,00000	0,00000
7	0,12862	0,11139	0,12423
8	0,00000	0,00000	0,00000
9	0,10004	0,00000	0,07074
10	0,00000	0,00000	0,00000
11	0,08185	0,07088	0,02118
12	0,00000	0,00000	0,00000
13	0,06926	0,05998	0,01792
14	0,00000	0,00000	0,00000
15	0,06002	0,00000	0,04244
	a=π	a=2π /3	a=π /6
lef (soma)	0,98727	0,80825	0,39063
lef (definição)	1,00000	0,81650	0,40825

c) a potência ativa (ou média) pode ser obtida pela definição:

$$P_{ativa} = \frac{1}{T} \int_0^T v(t)i(t)dt$$

e explicitando-se pela somatória dos produtos das harmônicas de tensão e corrente:

$$P_{ativa} = V_0 I_0 + \sum_{\substack{m=1 \\ n=1}}^{\infty} \{ [V_m \cos(\omega m t + \theta_m)] \cdot [I_n \cos(\omega n t + \phi_n)] \} = V_0 I_0 + \sum_{\substack{m=1 \\ n=1}}^{\infty} X_{mn}$$

com  $V_m, I_m$  sendo valores de pico e  $V_0, I_0$  sendo valores médios de tensão e corrente.

mas como o valor médio no período  $T$  da fundamental de  $X_{mn}$  é nulo para  $m \neq n$ , obtém-se

$$X_{mn} = \frac{V_m I_n}{2} \cos(\theta_m - \phi_n) \quad \text{para } m=n \text{ .}$$

A tensão do gerador possui somente a componente fundamental (dado do enunciado), logo  $v(t) = V_1 \cos(\omega_1 t + \theta_1) = V_1 \cos(\omega_1 t - \pi/2)$  e a potência ativa (ou média) se reduz a

$$P_{ativa} = \frac{V_1 I_1}{2} \cos(\theta - \phi_1) = V_{1eficaz} \cdot I_{1eficaz} \cos(\theta - \phi_1) \text{ .}$$

Como os valores numéricos  $V_1$  e  $I_1$  não são dados, obtém-se  $P = P_{ativa}$  em função do produto  $V_1 I_1$  (que não é a potência aparente, pois  $V_1$  e  $I_1$  são aqui valores de pico das fundamentais!) e em função do ângulo de condução  $a$ . Note-se que pela fórmula (3-21a):

$$i(t) = \sum_{h=1}^{\infty} b_h \cos[h\omega t + tg^{-1}(\frac{-b_h}{a_h})], \quad \text{para } h \text{ ímpar} \text{ (note que esta série usa cossenos, resultando em}$$

$$\phi_1 = -\pi/2 \text{ !)}$$

Logo, a fase  $\phi_1$  da fundamental da corrente é igual à da tensão ( $0^\circ$  ou  $-90^\circ$  conforme se usa seno ou cosseno respectivamente na série de Fourier) e a potência ativa fica  $P_{ativa} = (V_1 \cdot I_1)/2$  ou, dividindo por  $V_1 I_1$ ,  $P_{ativa} = 1$  (p.u.). Os resultados estão em na tabela 2.3 a seguir.

d) **FP, FD e  $\cos(\phi_1)$** :

O fator de potência **FP** é dado por:  $FP = \frac{P}{S} = \frac{P}{V_{eficaz} I_{eficaz}} = \text{fator de potência}$

Como a tensão do gerador é senoidal (não distorcida),

$$FP = \frac{P}{V_{eficaz} I_{eficaz}} = \frac{V_{eficaz} I_{1eficaz} \cos(\theta - \phi_1)}{V_{eficaz} I_{eficaz}} = \frac{I_{1eficaz} \cos(\theta - \phi_1)}{I_{eficaz}} = FD \cos(\theta - \phi_1) \quad \text{onde:}$$

$\cos(\theta - \phi_1) = \text{fator de defasagem}$

$$FD = \frac{I_{1eficaz}}{I_{eficaz}} = \frac{I_{1eficaz}}{\sqrt{I_{1eficaz}^2 + I_{2eficaz}^2 + I_{3eficaz}^2 + \dots}} = \text{fator de deformação ou distorção}$$

Neste caso **FD=FP** numericamente!

A tabela 2.3 associa os resultados dos itens b), c) e d):

Tabela 2.3: valores eficazes de corrente (em p.u.), potência ativa (em p.u.), fator de potência **FP**, de distorção **FD** e de deslocamento  **$\cos(\phi_1)$**  para diversos valores de largura de pulso  **$a$** .

	$a=\pi$	$a=2\pi/3$	$a= \pi/6$
I <sub>eficaz</sub> /I <sub>1</sub> (p.u.)	0,9873	0,8083	0,3906
P <sub>ativa</sub> /(V <sub>1</sub> I <sub>1</sub> ) (p.u.)	0,6366	0,5513	0,1648
FP	0,9119	0,9647	0,5965
FD	0,9119	0,9647	0,5965
$\cos(\phi_1)$	1,0000	1,0000	1,0000

e) A inserção de um capacitor em paralelo com a carga somente aumentaria  $\phi_1$ , que já era inicialmente nulo (logo  $\cos\phi_1=1$  inicialmente). Qualquer valor diferente de  $\phi_1$  reduz  $\cos\phi_1$  e conseqüentemente diminui o **FP**. O **FP** é baixo (menor que a unidade) devido ao **FD**, e não ao  $\cos\phi_1$ . Como neste caso não se definiu a impedância da fonte de tensão  $v(t)$ , se for suposta fonte ideal (sem impedância em série) as harmônicas continuam preferindo circular pela fonte (que tem impedância nula) do que pelo capacitor em série. Se no entanto houver um  $L_{sistema} \neq 0$  em série com a fonte, haverá uma divisão de correntes entre a fonte e o capacitor em paralelo, o que pode diminuir a corrente eficaz dos harmônicos que passa pela fonte. Neste caso deve-se verificar este efeito frente à redução do fator deslocamento causado pelo capacitor na frequência fundamental.

**Observação:** A forma de onda de corrente da figura 2.1 não é arbitrária, mas aparece como corrente CA drenada

em vários circuitos de eletrônica de potência. Com  $\alpha=2\pi/3$ , é a corrente do lado CA drenada por um retificador trifásico de dois caminhos (3F2C), e com  $\alpha=\pi/6$  aproxima-se da corrente drenada por um retificador monofásico em ponte (1F2C) com filtro capacitivo.

**Exercício 3:** Uma resistência de valor  $R=1[\Omega]$  é alimentada por uma tensão  $v(t)=1+0,1\text{sen}(377t)+0,1\text{sen}(2*377t)[V]$ . Qual é a potência dissipada?

Resposta:

Sabe-se que  $P=V_0 I_0 + \sum_{h=1}^{\infty} V_{\text{eficaz}} I_{\text{eficaz}} \cos(\theta_h - \phi_h)$  onde:

- $V_0, I_0$  = valores médios de tensão e corrente;
- $(\theta_h - \phi_h)$  = defasagem entre  $v_h$  e  $i_h$  (h-ésima harmônica);
- $I_{\text{eficaz}} = \frac{V_{\text{eficaz}}}{R}$  .

Como a carga é resistiva,  $(\theta_h - \phi_h)=0, \forall h$  (todas as componentes de tensão e corrente estão em fase)

Portanto:  $P=V_0 I_0 + \sum_{h=1}^{\infty} V_{\text{eficaz}} I_{\text{eficaz}} = V_0 \frac{V_0}{R} + \sum_{h=1}^{\infty} V_{\text{eficaz}} \frac{V_{\text{eficaz}}}{R} = \frac{V_0^2}{R} + \sum_{h=1}^{\infty} \frac{V_{\text{eficaz}}^2}{R}$

substituindo-se pelos valores dados:  $P = \frac{1}{R} \left[ (1)^2 + \left( \frac{0,1}{\sqrt{2}} \right)^2 + \left( \frac{0,1}{\sqrt{2}} \right)^2 \right] = 1,01 [W]$

**Exercício 4:** Uma resistência  $R=1[\Omega]$  é alimentada por uma tensão  $v(t)=1\text{sen}(377t)-0,3\text{sen}(3*377t)[V]$ . Pedem-se:

- a) corrente instantânea  $i(t)$ ;
- b)  $V_{\text{eficaz}}, I_{\text{eficaz}}, P, FP$
- c) uma corrente deformada pode apresentar  $FP=1$ ? Explique.
- d) em que condições uma carga linear pode drenar uma corrente deformada?

Resposta:

a)  $i(t) = \frac{v(t)}{R} = 1 \text{sen}(377t) - 0,3 \text{sen}(3*377t) [A]$  Note que a corrente é deformada, mesmo com carga resistiva, pois a corrente acompanha a tensão, que é deformada.

b) Como no exercício anterior, as componentes harmônicas de tensão e corrente estão em fase (carga resistiva), logo:

$$P = \sum_{h=1}^{h=h_{\text{máximo}}} \frac{V_{\text{eficaz}}^2}{R} = \frac{1}{1} \left[ \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2 + \left( \frac{0,3}{\sqrt{2}} \right)^2 \right] = 0,54 [W]$$

Aqui a tensão  $v(t)$  não possui a componente contínua presente no exercício anterior.

$$V_{eficaz} = \sqrt{\left[\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{0,3}{\sqrt{2}}\right)^2\right]} = 0,7382 [V] \quad e \quad I_{eficaz} = \frac{V_{eficaz}}{R} = 0,7382 [A]$$

$$FP = \frac{P}{V_{eficaz} I_{eficaz}} = \frac{0,54}{0,7382 \cdot 0,7382} = 1,0000$$

c), d) Como visto acima, a corrente é deformada mas  $FP=1$ . A razão é que a carga (resistiva) é linear e acompanha a tensão deformada, o que gera os resultados acima. O fator de deformação  $FD$  da corrente é:

$$FD = \frac{I_{1eficaz}}{I_{eficaz}} = \frac{I_{1eficaz}}{\sqrt{I_{1eficaz}^2 + I_{2eficaz}^2 + \dots}} = \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}{\sqrt{\left[\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{0,3}{\sqrt{2}}\right)^2\right]}} = \frac{0,7071}{0,7382} = 0,9579, \quad e \quad FD < 1$$

Cuidado!  $FP = FD \cdot \cos(\theta - \phi_1)$  foi deduzido anteriormente para tensão não deformada. Com isso  $FP=1$ ,  $\cos(\theta - \phi_1)=1$  mas  $FD < 1$ . Neste caso, esta equação (acima) de  $FP$ , válida para tensão não deformada, não se aplica.

**Observação:** Uma possível variação dos exercícios 3 e 4 é uma carga do tipo RL série no lugar da carga R. Com esta modificação a corrente terá uma defasagem diferente em relação à tensão para cada harmônica. Como o circuito é linear, pode-se aplicar o teorema da superposição, resolvendo-se o circuito separadamente para cada frequência harmônica e somando-se os resultados parciais para se obter os valores totais.