Introdução à Cosmologia Física

Material Complementar 1

Caroline Macedo Guandalin

Notação tensorial

Considere os referenciais inerciais $\mathscr{S}$ e $\mathscr{S}'$, na ausência de campos gravitacionais. Podemos definir o intervalo espaço-temporal ds^2, em $\mathscr{S}$, como

$$ds^2 = -c^2dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2. \tag{1}$$

onde, para dois eventos $\mathscr{E}_1 = (t_1, x_1, y_1, z_1)$ e $\mathscr{E}_2 = (t_2, x_2, y_2, z_2)$, tem-se

$$-c^2(t_2 - t_1)^2 + (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 = \Delta s^2$$

Analogamente, em $\mathscr{S}'$, temos que

$$ds'^2 = -c^2dt'^2 + dx'^2 + dy'^2 + dz'^2. \tag{2}$$

Para dois eventos $\mathscr{E}_1 = (t_1, x_1, y_1, z_1)$ e $\mathscr{E}_2 = (t_2, x_2, y_2, z_2)$, em $\mathscr{S}$, tem-se

$$-c^2(t_2 - t_1)^2 + (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 = \Delta s^2,$$

ou

$$-c^2\Delta t^2 + \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2 = \Delta s^2.$$

Considerando os mesmos eventos, mas vistos pelo referencial inercial $\mathscr{S}'$, $\mathscr{E}_1 = (t'_1, x'_1, y'_1, z'_1)$ e $\mathscr{E}_2 = (t'_2, x'_2, y'_2, z'_2)$,

$$-c^2\Delta t'^2 + \Delta x'^2 + \Delta y'^2 + \Delta z'^2 = \Delta s'^2.$$

Note que a velocidade de propagação da luz entre $\mathscr{E}_1$ e $\mathscr{E}_2$ satisfaz

$$c^2 = \frac{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}{\Delta t^2}, \tag{3}$$

ou seja, $\Delta s = 0$. Da mesma forma, em $\mathscr{S}'$, $\Delta s' = 0$ nos leva a

$$c^2 = \frac{\Delta x'^2 + \Delta y'^2 + \Delta z'^2}{\Delta t'^2}. \tag{4}$$

O princípio da relatividade nos diz que a velocidade da luz é a mesma em qualquer referencial inercial. Portanto, se $\Delta s = 0$, então $\Delta s' = 0$. Note que, quando $\Delta s > 0$,

$$c^2 > \frac{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}{\Delta t^2}. \tag{5}$$

Este tipo de intervalo é conhecido como intervalo do tipo **tempo** (time-like interval). Esta condição implica que existe um sinal físico (com velocidade $v < c$) conectando os eventos $\mathscr{E}_1$ e $\mathscr{E}_2$. Tais eventos podem, então, estar causalmente conectados. Por outro lado, quando $\Delta s < 0$,

$$c^2 < \frac{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}{\Delta t^2}, \tag{6}$$

temos um intervalo do tipo **espaço** (space-like interval), significando que a única forma dos eventos $\mathscr{E}_1$ e $\mathscr{E}_2$ estarem conectados é se existir um sinal com velocidade $v > c$. Por isso dizemos que eventos separados por um intervalo do tipo espaço estão causalmente desconectados.

Talvez a consequência mais importante acerca dos intervalos espaço-temporais, equações (1) e (2), é que eles são invariantes ante transformações de Lorentz. Ou seja,

$$ds'^2 = ds^2. \tag{7}$$

Com isso, podemos fazer uma analogia entre as transformações de Lorentz, dadas pelo chamado grupo de Lorentz, e o grupo de rotações que age sobre as coordenadas espaciais: enquanto que rotações mantêm a distância $dr^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$ invariante, as transformações de Lorentz mantêm a "distância" $ds^2 = -c^2dt^2 + dr^2$ invariante. Vale ressalvar aqui que este último intervalo espaço-temporal encontra-se na ausência de campos gravitacionais. A presença de campos gravitacionais altera essa definição. Portanto, aqui estamos utilizando como exemplo a relatividade *restrita*.

1 Renomeando as variáveis

Vamos introduzir agora a notação comumente utilizada na literatura. Define-se, para qualquer evento,

$$\begin{aligned} ct &= x_0, \\ x &= x_1, \\ y &= x_2, \\ z &= x_3, \end{aligned}$$

de forma que a expressão (1) pode ser escrita como

$$-dx_0^2 + dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 = ds^2. \tag{8}$$

Assim, o intervalo espaço-temporal entre dois eventos $\mathscr{E}_1 = (x_0, x_1, x_2, x_3)$ e $\mathscr{E}_2 = (y_0, y_1, y_2, y_3)$ pode ser escrito como

$$\Delta s^2 = -(x_0 - y_0)^2 + (x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2 = \langle (x - y), \eta(x - y) \rangle, \tag{9}$$

ou seja,

$$\Delta s^2 = (x_0 - y_0, x_1 - y_1, x_2 - y_2, x_3 - y_3) \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 - y_0 \\ x_1 - y_1 \\ x_2 - y_2 \\ x_3 - y_3 \end{pmatrix}. \tag{10}$$

A matriz

$$\eta = \mathrm{diag}(-1, 1, 1, 1) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

é denominada *métrica de Minkowski*. Na presença de campos gravitacionais (ou seja, quando consideramos a relatividade *geral*) essa métrica deve ser modificada para que então possamos expressar intervalos entre eventos em um espaço-tempo.

2 Outras formas de escrever Δs^2

Convenciona-se que

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x^\mu \tag{11}$$

e

$$\begin{pmatrix} -x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_\mu, \tag{12}$$

onde x^μ representa as componentes **contravariantes** do (quadri) vetor x e x_μ as componentes **covariantes**.

É importante ressaltar que índices gregos $(\eta, \mu, \nu, \xi$, etc) vão de 0 a 3 e índices latinos (i, j, k) de 1 a 3. Ou seja, $\mu = 0, 1, 2, 3$ e $i = 1, 2, 3$, etc. Além disso, na representação matricial o primeiro índice de um tensor, tal como $\eta_{\mu\nu}$, refere-se as linhas da matriz, enquanto que o segundo índice indica as colunas.

Considerando, então, a notação de Einstein (Einstein's summation) de soma sobre índices repetidos, temos que

$$\begin{aligned} x^\mu x_\mu &= x^0 x_0 + x^1 x_1 + x^2 x_2 + x^3 x_3, \\ &= -x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2, \\ &\equiv -x_0 x_0 + \vec{x} \cdot \vec{x}. \end{aligned}$$

Dizemos que os índices gregos acima foram contraídos. Além disso, a combinação $x^\mu x_{\ \mu}$ nada mais é do que um produto escalar. Observe que

$$\begin{pmatrix} -x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \mathrm{diag}(-1, 1, 1, 1) \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},$$

ou seja, podemos transformar um tensor contravariante x^μ em um covariante x_μ aplicando a métrica a x^μ (é comum dizer que tal operação é um "abaixamento" de índice),

$$x_\mu = \eta_{\mu\nu} x^\mu.$$

Podemos ainda transformar um tensor covariante x_μ em um contravariante x^μ levantando o índice com a métrica:

$$x^\mu = \eta^{\mu\nu} x_\mu.$$

Assim, podemos escrever o intervalo espaço-temporal entre dois eventos como

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = dx_\nu dx^\nu. \tag{13}$$

3 Soma sobre índices

- **Índice mudo (dummy index)** Um índice repetido é chamado de *índice mudo*, o que significa que qualquer letra grega pode ser usada no seu lugar sem mudar o significado da expressão:
$$\Delta x^{\mu'} = \Lambda^{\mu'}_{\alpha} \Delta x^{\alpha} = \Lambda^{\mu'}_{\beta} \Delta x^{\beta}.$$
- **Sem soma implícita** Se um índice é repetido, mas ambos ocorrem na mesma posição (em cima ou embaixo), então não se atribui uma soma à expressão:
$$\Gamma^{\mu\mu} \neq \Gamma^{00} + \Gamma^{11} + \Gamma^{22} + \Gamma^{33}.$$
- **Sem significado** Se um índice é repetido mais de duas vezes, então nenhum significado é atribuído à expressão. Não se trata de uma ambiguidade, significa apenas que um erro ocorreu no decorrer das contas:
$$\nexists \Gamma^{\mu\mu}_{\mu}.$$
- **Índice livre** Qualquer índice não repetido é chamado de *índice livre*. Podemos atribuir qualquer um dos quatro valores possíveis a ele. Em uma equação, todos os índices livres devem aparecer dos dois lados da expressão, sem mudar de posição:
$$y^{\nu} = \Lambda^{\nu}_{\mu} y^{\mu}.$$
São exemplos de equações **incorretas**:
$$a_{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} a^{\nu},$$
$$G = g_{\mu\nu} x^{\nu}.$$

Resumo

Tensor contravariante:
$$\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x^{\mu}.$$
Tensor covariante:
$$\begin{pmatrix} -x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_{\mu}.$$
Métrica de Minkowski:
$$\eta_{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} = \mathrm{diag}(-1, 1, 1, 1).$$
Abaixamento de índice: $x_{\mu} = \eta_{\mu\nu} x^{\mu}$. Levantamento de índice: $x^{\mu} = \eta^{\mu\nu} x_{\mu}$.
Intervalo espaço-temporal (elemento de linha):
$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu} = -dx_0^2 + dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2.$$

Exercícios propostos

1. **Invariância dos intervalos espaço-temporais.** Verifique a condição de invariância (7). Para isso, escreva explicitamente os intervalos entre os eventos $\mathscr{E}_1'$ e $\mathscr{E}_2'$ em termos das transformações de Lorentz.

2. **Intervalo espaço-temporal em notação tensorial.** Verifique a igualdade (13). Para isso, note que se $\mu \neq \nu$, $\eta_{\mu\nu} = 0$:

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. **Inversas.** Verifique que $\eta^{\mu\alpha}\eta_{\alpha\nu} = \delta^{\mu}{}_{\nu}$, ou seja, que $\eta^{\mu\nu}$ é a inversa da matriz $\eta_{\mu\nu}$ definida no item anterior.

4. **Transformações de Lorentz.** As transformações de Lorentz podem ser escritas, de forma compacta, como $x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu}(v)x^{\mu}$, onde

$$\Lambda^{\mu}{}_{\nu}(v_x) = \begin{pmatrix} \gamma(v_x) & -v_x\gamma(v_x) & 0 & 0 \\ -v_x\gamma(v_x) & \gamma(v_x) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

corresponde à transformação de Lorentz na direção x e $\gamma(v)$ é o fator de Lorentz. Mostre que a ação da matriz $\Lambda^{\mu}{}_{\nu}$ corresponde, de fato, às transformações de Lorentz usuais, i.e. $(x^0)' = \gamma(v)(x^0 - vx^1)$, ou seja, $t' = \gamma(v)(t - vx)$, etc. Se achar necessário, verifique ainda que

$$\Lambda^{\mu}{}_{\nu}(v_y) = \begin{pmatrix} \gamma(v_y) & 0 & -v_y\gamma(v_y) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -v_y\gamma(v_y) & 0 & \gamma(v_y) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } \Lambda^{\mu}{}_{\nu}(v_z) = \begin{pmatrix} \gamma(v_z) & 0 & 0 & -v_z\gamma(v_z) \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -v_z\gamma(v_z) & 0 & 0 & \gamma(v_z) \end{pmatrix}$$

correspondem às transformações de Lorentz nas coordenadas espaciais y e z, respectivamente. Finalmente, mostre que $\Lambda^{\mu}{}_{\nu}(v)^{-1} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu}(-v) \equiv \Lambda^{\nu}{}_{\mu}$ é a transformação inversa de $\Lambda^{\mu}{}_{\nu}$. Ou seja, $\Lambda^{\mu}{}_{\alpha}\Lambda^{\alpha}{}_{\nu} = \delta^{\mu}{}_{\nu}$.

5. **Métrica de Friedmann-Lamaître-Robertson-Walker (FLRW).** O elemento de linha mais geral entre dois eventos em um universo homogêneo e isotrópico tem a forma

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^{\mu}dx^{\nu} = -c^2dt^2 + a^2(t)\left[\frac{dr^2}{1 - Kr^2} + r^2d\Omega^2\right], \tag{14}$$

onde $g_{\mu\nu}$ é chamada métrica FLRW, $x^{\mu} = (t, r, \theta, \varphi)$ são as coordenadas de eventos no espaço-tempo descrito pela métrica $g_{\mu\nu}$ e $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2$. A forma relativística de trabalhar com a cosmologia é obter as equações de Einstein,

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\delta_{\mu\nu}R - \Lambda\delta_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}, \tag{15}$$

que irão descrever como a geometria do espaço-tempo, descrita no lado esquerdo da equação (15), está relacionada com o conteúdo de matéria, descrito no lado direito de (15). $T_{\mu\nu}$ é o chamado tensor de energia-momento e descreve, basicamente, a densidade, pressão e possíveis formas de estresse anisotrópico de algum fluido que preenche o Universo. $R_{\mu\nu}$ e R são, respectivamnete, o tensor e escalar de Ricci, sendo derivados a partir do tensor de Riemann, o qual descreve a curvatura do espaço-tempo em questão.

Na primeira lista de exercícios, a questão 5 fará uso dos símbolos de Christoffel $\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\nu}$, ou conexões, da métrica FLRW. Aqui sugerimos que derive as conexões da métrica FLWR,

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{a^2(t)}{1-Kr^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^2(t)r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^2(t)r^2\sin^2\theta \end{pmatrix}, \tag{16}$$

ou seja, $g_{00} = -1$, $g_{11} = a^2/(1-Kr^2)$, $g_{22} = a^2r^2$, $g_{33} = a^2r^2\sin^2\theta$ e $g_{\mu\nu} = 0$, para $\mu \neq \nu$. Segue que $\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\nu}$ é definido como

$$\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}\left(\frac{\partial g_{\beta\mu}}{\partial x^{\nu}} + \frac{\partial g_{\beta\nu}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\beta}}\right). \tag{17}$$

6. **Não se esqueçam dos problemas propostos em aula (ver slides do curso).**

Leitura sugerida

BARATA, João. Notas para um Curso de Física-Matemática. Capítulo 22. v. 06/08/2018.

> O capítulo 22 das notas de aula do professor Barata apresenta alguns grupos de interesse físico, entre eles o grupo de Lorentz, passando por inúmeros teoremas, provas e definições matemáticas.

CARROLL, Sean. Spacetime and Geometry: an Introduction to General Relativity. San Francisco: **Addison-Wesley**.

> Excelente livro sobre relatividade geral, com o primeiro capítulo dedicado a uma revisão de relatividade restrita. É mais avançado do que o livro *A first course in general relativity*, de Bernard Schutz, mas seu conteúdo é adequado à graduação.

HARRISON, Edward. Cosmology: the Science of the Universe. Cambridge: **CUP**.

> Livro focando em aspectos conceituais. Ele toca pouco no formalismo matemático, mas é excelente para clarear conceitos. Na primeira edição (1981) o capítulo 6 discute a ideia de espaço, tempo e espaço-tempo; o capítulo 7 discute geometria não-Euclidiana e o capítulo 8 ataca a teoria da relatividade geral. Na sua edição mais recente (2000), tais conteúdos se encontram nos capítulos 9, 10, 11 e 12, com o capítulo 11 dedicado à teoria da relatividade restrita.

SCHUTZ, Bernard. A first course in general relativity. Cambridge: **CUP**.

> Livro introdutório de relatividade restrita e geral.

SHADOWITZ, Albert. Special Relativity. New York: **Dover Publications**.

> Livro de relatividade restrita com enfoque especial nos diagramas espaço-temporais.