Instituto de Física - USP - 2018
4300430 - Introdução à Cosmologia Física
Prof. Raul Abramo

Lista 1 – Data de entrega: 27 de agosto

1. **Paradoxo de Olbers**

   Uma floresta contém árvores de seção quadrada, todas com o mesmo lado R – veja a Fig. 1. O número médio de árvores por unidade de área é $\langle dN/dA \rangle = \bar{n}$. Um estudante de Iniciação Científica tenta fazer com que o feixe de uma ponteira laser atravesse toda a floresta. Considere que a probabilidade por unidade de comprimento de que um feixe atinja uma árvore é dada por $\dfrac{dp}{dx} = \dfrac{1}{\alpha} e^{-x/\alpha}$.

   (a) [**0.25**] Determine L tal que a probabilidade de que o laser **não** atravesse toda a floresta seja 99.99%. Utilize a fórmula $\alpha = \dfrac{1}{\bar{n}\, R}$, com $\bar{n} = 3,5 \times 10^{-3}$ m^{-2} e $R = 0,5$ m.

   (b) [**0.25**] Qual a relação deste exercício com o Paradoxo de Olbers?

   (c) [**0.5**] Derive a fórmula acima para dp/dx e calcule a expressão exata para α (a taxa com que os feixes de laser são obstruídos por unidade de comprimento), partindo de primeiros princípios.

   (*Dica: Considere $L \gg R$.*)

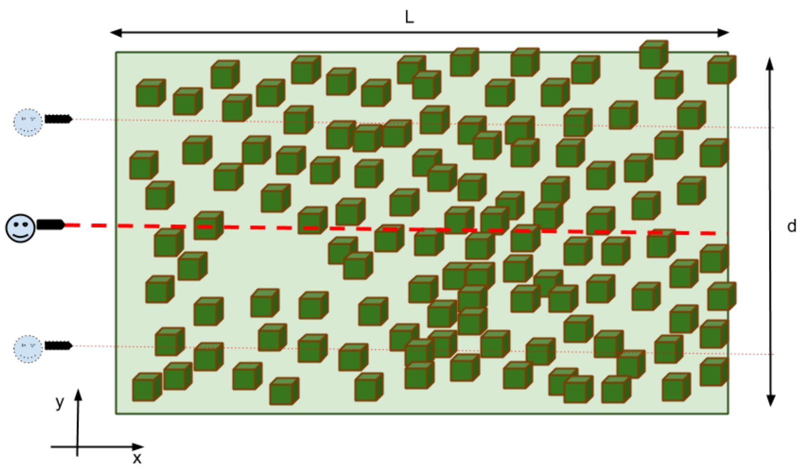

Figura 1: Geometria da floresta.

2. **Redshift e Distâncias**

   (a) [**0.25**] Uma galáxia possui velocidade peculiar de 700 km/s em direção ao centro de massa de seu aglomerado, fazendo um ângulo de 31° com a linha de visada de um observador. Considere que o centro de massa desse aglomerado de galáxias está muito mais distante do observador do que a galáxia em questão. Com uma medida espectroscópica, esse observador obtém um comprimento de onda da linha de Lyα em $\lambda_{obs} = 1364.352$ Å. Sabendo que a linha Lyα possui um comprimento de onda, medido em laboratório, de $\lambda_0 = 1216.00$ Å, determine o redshift e a distância dessa galáxia.

   (b) [**0.5**] Uma galáxia espiral está a um redshift $z = 0.1$. Vista da Terra, essa galáxia tem o seu disco orientado paralelamente à linha de visada. Sabemos que galáxias espirais possuem um certo momento angular – ou seja, os seus discos possuem uma rotação. Assuma que a velocidade de rotação do disco obedece uma lei $v_{rot}(r) = v_0\,(r/r_0)\,e^{-|r|/r_0}$, com $v_0 = 200$ km/s e $r_0 = 10$ kpc, e que esse disco possui uma densidade homogênea de gás até um raio máximo de 50 kpc. O gás no disco dessa galáxia (a maior parte Hidrogênio) emite radiação Lyα. Considere que a radiância em Lyα, em repouso, pode ser descrita por uma função δ de Dirac, ou seja, $I(\lambda) \simeq I_0\delta(\lambda - \lambda_0)$. Qual será o espectro observado dessa galáxia na Terra, na região próxima da linha Lyα?

(c) **[0.25]** Suponha agora que podemos fazer observações espectroscópicas ao longo de todo o disco, em regiões espaciais pequenas, que correspondem a intervalos de 10 kpc ao longo do disco. Esboce o espectro observado de cada um desses pedaços, na região próxima da linha de Lyα.

Utilize $H_0 = 72$ km s^{-1} Mpc^{-1} e $c \approx 3 \times 10^5$ km/s.

3. **Lei de Hubble**

[1.0] Considere a tabela abaixo contendo dados incompletos de magnitude aparente m, magnitude absoluta M, distância d e redshift z. Complete os dados a fim de utilizar a Lei de Hubble para obter uma estimativa de H_0, em unidades de km s^{-1} Mpc^{-1}, com um erro menor que 10%. Faça um esboço do diagrama de Hubble em $(m - M) \times z$ e $d \times v_H$. *(Dica: assuma que $v_H \approx cz$.)*

m	M	d (Mpc)	z
11.820		49.89	0.01200
	-22.680	63.01	0.01512
13.380	-20.907		0.01728
14.340	-20.724		0.02472
15.300		115.08	0.02760

4. **Projeção Estereográfica**

Vamos definir uma projeção estereográfica da superfície de uma esfera de raio R, desde o Polo Norte dessa esfera, como mostrado na Fig. 2:

(a) **[0.5]** Encontre a métrica no plano (x, y).

(b) **[0.5]** Mostre que a área total do plano é $4\pi R^2$ e que o comprimento de um meridiano, e do equador, é $2\pi R$.

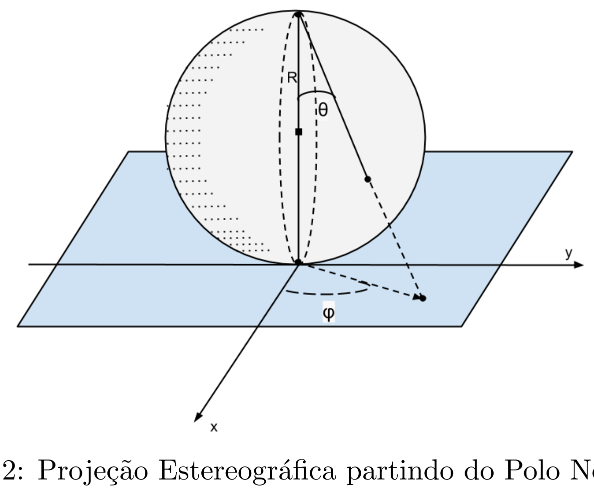

Figura 2: Projeção Estereográfica partindo do Polo Norte.

5. **Velocidades peculiares**

   Em sala de aula vimos que um corpo inicialmente em repouso no espaço-tempo de FLRW permanecerá em repouso. Vamos agora considerar o que acontece quando esse corpo tem alguma velocidade inicial $\vec{v}_0$ num certo instante $t = t_0$. Mais exatamente, considere uma partícula cuja 4-velocidade inicialmente é dada por:

   $$U^\mu(t = t_0) = \gamma(v_0)(1, \vec{v}_0) \ .$$

   (a) **[0.5]** Escreva a equação da geodésica para essa partícula – ou melhor, escrevas as equações para a parte temporal, U^0, e para as partes espaciais, U^i $(i = 1, 2, 3)$.

   (b) **[1.0]** Resolva as equações do item anterior. Faça aproximações se isso for absolutamente necessário (por exemplo, $v_0 \ll c$). O que acontece com a *direção* da velocidade ao longo do tempo? E o que acontece com o *módulo* da velocidade ao longo do tempo? Você é capaz de explicar esse resultado?

   [Atenção: Para esse exercício você vai precisar das conexões da métrica de FLRW, que serão eventualmente apresentadas em aula.]

6. **Densidade e curvatura espacial**

   (a) **[0.25]** Explique por quê um universo cuja densidade de energia é exatamente igual a:

   $$\rho(t) = \rho_c(t) = \frac{3H^2}{8\pi G}$$

   tem que necessariamente possuir curvatura nula. Essa densidade ρ_c é chamada de densidade crítica.

   (b) **[0.5]** Suponha agora que a densidade total do universo é diferente da densidade crítica. Usando as Equações de Friedmann e/ou a Equação da Continuidade, encontre as equações que descrevem como a fração $\Omega(t) = \rho(t)/\rho_c(t)$ evolui com o tempo. Discuta os casos $k > 0$ e $k < 0$.

   (c) **[0.25]** Mostre que, num universo dominado por matéria, e no qual a densidade de energia é igual à densidade crítica, a distância comóvel até um objeto a um redshift z é dada por:

   $$\chi = \frac{2c}{H_0}\left(1 - a_e^{1/2}\right) \ ,$$

   onde $1 + z = 1/a_e$.

7. **Medindo curvatura espacial**

   Infelizmente as galáxias reais não têm tamanhos bem definidos: elas podem ser pequenas, grandes, espirais, elípticas, irregulares. Porém, a distribuição de galáxias no universo tem uma escala de comprimento muito bem definida, que foi impressa na matéria durante a época conhecida como *recombinação*, que discutiremos mais para o final do curso. Esse comprimento, conhecida como *escala de BAOs* (*baryon acoustic oscillations*) tem um tamanho comóvel de exatamente 150 Mpc – ou seja, o comprimento físico num redshift z é $(1 + z) \times 150$ Mpc.

   Suponha que você seja capaz de medir essa escala de comprimento através de um mapa de galáxias que foi realizado observando galáxias com redshift médio $z_m = 0.5$. Após realizar as suas medidas, você nota que os seus resultados são consistentes com um universo plano $(k = 0)$, dentro da sua margem de erro na medida de distância, que é de ± 2 % .

   Responda:

(a) **[0.25]** Mostre que num universo onde $a(t) = (t/t_0)^{2/3}$ a distância comóvel até o redshift $z = z_m = 0.5$ é $\chi_m = 0.55\, c\, t_0$.

(b) **[0.25]** Suponha que temos valores exatos $t_0 = 14$ Gyr e $k = 0$. Qual é o tamanho na direção angular que corresponde à escala de BAOs em $z = z_m = 0.5$? Dê a sua resposta em graus.

(c) **[0.5]** Suponha que a sua medida é consistente com essa predição, mas que você tem uma margem de erro de ± 2 %. Qual é o limite superior que você pode impor no raio de curvatura $R_k = 1/\sqrt{|k|}$? Assuma que a única fonte de incerteza é a curvatura.

(d) **[0.5]** Vamos dizer que você não fica satisfeito com a sua resposta no item anterior. Você pensa em duas opções: (1) fazer um mapa de galáxias num redshift mais alto, $z \simeq 1$, com a mesma precisão (2%) do mapa original; ou (2) melhorar as medidas do mapa original, em $z \simeq 0.5$, de tal forma que a precisão da medida da escala de BAOs se torne 1%. Qual dessas opções vai fornecer um limite mais forte no raio de curvatura R_k?

8. **Universo dominado por uma constante cosmológica (Λ)**

Imagine que o universo contém apenas uma forma de energia tal que sua densidade é constante, $\rho = \rho_\Lambda =$ const. Ou seja: uma constante no espaço *e no tempo*. Vamos também supor que a curvatura espacial é desprezível.

(a) **[0.25]** Mostre que o fator de escala tem a solução $a(t) = e^{H_0(t-t_0)}$.

(b) **[0.25]** Qual é idade do universo em termos de H_0 e t_0? (Cuidado!)

(c) **[0.25]** Se assumirmos que o universo começou em $t = 0$, qual seria idade do universo em $z = 1$?

(d) **[0.25]** Qual é a distância comóvel até uma galáxia num redshift $z = 1$?

(e) **[0.25]** Qual é a distância física que separa duas galáxias em redshifts $z = 1$ que estão separadas por um ângulo $\Delta\theta = 0.01$ radianos?

(f) **[0.5]** Suponha que o universo atual é bem descrito por esse modelo, e sempre foi assim (note que isso *não* é verdade!) Se uma galáxia a uma distância comóvel $\chi = 5000$ Mpc emite luz em nossa direção hoje, essa luz vai chegar até nós, na Terra, em que instante no futuro? E se essa galáxia estiver a uma distância $\chi = 10^4$ Mpc?

(g) **[0.25]** Um universo como esse possui um "Big Bang"?...