Aula 2 – Matemática Revisão

Piracicaba, agosto de 2018

Professora Dra. Andréia Adami

Sumário

- Otimização Não Condicionada
  - ✓Condição de primeira ordem para máximo
  - ✓Condição de segunda ordem para máximo

- Otimização Condicionada
  - ✓O método de Lagrange
  - ✓Condição de primeira ordem para máximo
  - ✓Condição de segunda ordem para máximo

Otimização Não Condicionada

- Maximização sem restrição - Função de uma variável

✓ $y = f(x)$

✓Condição de primeira ordem (necessária): $\frac{dy}{dx} = f'(x) = 0$

✓Pela diferencial total da função temos que: $dy = f'(x)dx$

✓Se o ponto encontrado é um máximo, *dy* deve decrescer para pequenos incrementos de *x*:

$$d(dy) = d^2y = \frac{d[f'(x)dx]}{dx} = f''(x)dx.dx = f''(x)dx^2$$

Otimização Não Condicionada

- Condição de segunda ordem (suficiente)
- Para que o ponto encontrado seja um máximo da função, $d^2y < 0$, o que implica que: $f''(x)dx^2 < 0$, assim, $\mathrm{f}''(\mathrm{x}) < 0$.

✓No exemplo da maximização do lucro da aula anterior,

$$\pi = 1000q - 5q^2$$

$$\frac{d\pi}{dq} =$$

$$\frac{d^2\pi}{dq^2} =$$

Otimização Não Condicionada

- Condição de segunda ordem (suficiente)

- Para que o ponto encontrado seja um máximo da função, $d^2y < 0$, o que implica que: $f''(x)dx^2 < 0$, assim, $\mathrm{f}''(\mathrm{x}) < 0$.

✓No exemplo da maximização do lucro da aula anterior,

$$\pi = 1000q - 5q^2$$

$$\frac{d\pi}{dq} = 1000 - 2 * (5)q$$

$$\frac{d^2\pi}{dq^2} = -10 < 0$$

Otimização Não Condicionada -funções de várias variáveis

- Funções de duas variáveis

$$y = f(x_1, x_2)$$

- Condição necessária: $f_1 = f_2 = 0$
- Condição suficiente: $f_{11}f_{22} - f_{12}^2 > 0$

✓Demonstração: tomando a diferencial total de *y* temos:

$$dy = f_1 dx_1 + f_2 dx_2$$

✓Diferenciando mais uma vez – diferencial total de segunda ordem:

$$d^2y = (f_{11}dx_1 + f_{12}dx_2)dx_1 + (f_{21}dx_1 + f_{22}dx_2)dx_2$$
$$d^2y = f_{11}dx_1^2 + f_{12}dx_2dx_1 + f_{21}dx_1dx_2 + f_{22}dx_2^2$$

✓Pelo Teorema de Young, $f_{12} = f_{21}$

Otimização Não Condicionada -funções de várias variáveis

- Maximização sem restrição - Funções de duas variáveis

$$y = f(x_1, x_2)$$

- Condição necessária: $f_1 = f_2 = 0$
- Condição suficiente: $f_{11}f_{22} - f_{12}^2 > 0$

$$d^2y = f_{11}dx_1^2 + 2f_{12}dx_2dx_1 + f_{22}dx_2^2$$

✓A condição de segunda ordem para o máximo requer que as derivadas parciais f_{11} e f_{22} sejam negativas o suficiente, para que seu produto supere os efeitos das derivadas parciais cruzadas $(f_{12=}\, f_{21})$. Funções com essa características são conhecidas como funções côncavas.

Otimização Não Condicionada - funções de várias variáveis

- Condição suficiente: $f_{11}f_{22} - f_{12}^2 > 0$
- Exemplo: Seja y uma função de duas variáveis, x_1 e x_2

$$y = -(x_1 - 1)^2 - (x_2 - 2)^2 + 10 \text{ ou,}$$
$$y = -{x_1}^2 + 2x_1 - {x_2}^2 + 4x_2 + 5$$

✓Dado que y representa saúde do indivíduo e x_1 e x_2 , dosagens diárias de duas drogas, encontre os valores que e x_1 e x_2 que maximizam y e verifique se a função é côncava.

Otimização Não Condicionada - funções de várias variáveis

- Condição suficiente: $f_{11}f_{22} - f_{12}^2 > 0$
- Exemplo: Seja y uma função de duas variáveis, x_1 e x_2

$$y = -{x_1}^2 + 2x_1 - {x_2}^2 + 4x_2 + 5$$

$$\frac{\partial y}{\partial x_1} = f_1 = -2x_1 + 2 = 0$$
$$\frac{\partial y}{\partial x_2} = f_2 = -2x_2 + 4 = 0$$

$Portanto, x_1$*=1 e x_2*=2 e y*=10.

Otimização Não Condicionada - funções de várias variáveis

- Condição suficiente: $f_{11}f_{22} - f_{12}^2 > 0$

✓ *Solução:*

$$f_{11} = -2$$
$$f_{22} = -2$$
$$f_{22} = 0$$

$$f_{11}f_{22} - f_{12}^2 = 4 - 0 > 0$$

Otimização Não Condicionada - funções de várias variáveis

- Resumo para problema de maximização sem restrição – duas variáveis

Condição	Máximo	Mínimo
Primeira ordem	$f_1 = f_2 = 0$	$f_1 = f_2 = 0$
Segunda ordem	$f_{11}, f_{22} < 0$ e $f_{11}f_{22} > f_{12}^2$	$f_{11}, f_{22} > 0$ e $f_{11}f_{22} > f_{12}^2$

Otimização Não Condicionada - funções de várias variáveis

- Resumo para problema de maximização sem restrição de funções de *n* variáveis

Condição	Máximo	Mínimo
Primeira ordem	$f_1 = f_2 = \cdots = f_n 0$	$f_1 = f_2 = \cdots = f_n 0$
Segunda ordem	$\lvert H_1 \rvert < 0;\ \lvert H_2 \rvert > 0;$ $\lvert H_3 \rvert < 0; \ldots$ $d^2 y$ é $definida\ negativa$ A função é estritamente côncava	$\lvert H_1 \rvert > 0;\ \lvert H_2 \rvert > 0;$ $\lvert H_3 \rvert > 0; \ldots$ $d^2 y$ é $definida\ positiva$ A função é estritamente convexa

Otimização Não Condicionada - funções de várias variáveis

- H_1, H_2, ..., são os menores da matriz Hessiano construída a partir das derivadas parciais da forma quadrática d^2y.

- Exemplo para o caso de três variáveis

- $|H| = \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{vmatrix}$

Otimização Não Condicionada - funções de várias variáveis

- H_1, H_2, ..., são os menores da matriz Hessiano construída a partir das derivadas parciais da forma quadrática d^2y.

- Exemplo para o caso de três variáveis

- $|H_2| = \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{vmatrix}$ $\qquad |H_1| = |f_{11}|$

Otimização Não Condicionada - funções de várias variáveis

- H_1, H_2, ..., são os menores da matriz Hessiano construída a partir das derivadas parciais da forma quadrática d^2y.

- Exercício: para a função $y = -x_1^3 + 3x_1x_3 - x_2^2 + 2x_2 - 3x_3^2$

- Encontrar os pontos críticos e verificar se trata-se de um ponto de máximo ou de mínimo através do determinante da matriz Hessiano.

Otimização Condicionada

- Quando o indivíduo toma sua decisão de compra (consumo), ele não poderá escolher as quantidades dos bens que irá compor sua cesta de consumo sem levar em conta sua renda (restrição orçamentária). Assim, as quantidades consumidas dos bens estarão limitadas pela renda disponível do consumidor.

Otimização Condicionada

- Maximização com restrição

✓Um método para resolver problemas de maximização com restrição é o método do Multiplicador de Lagrange.

✓Problemas: Encontre os valores da variáveis $x_1 , x_2, \dots , x_n$ que maximizem a função y sujeito à restrição que permite que apenas alguns valores de *x* sejam escolhidos, $g(x_1 , x_2, \dots , x_n)$ representa a relação de restrição entre as variáveis.

$$y = f\,(x_1 , x_2, \dots , x_n)$$

$$g(x_1 , x_2, \dots , x_n) = 0$$

Otimização Condicionada

- O Método de Lagrange:
- $L = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \lambda g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$

✓ $\frac{\partial L}{\partial x_1} = f_1 + \lambda g_1$

✓ $\frac{\partial L}{\partial x_2} = f_2 + \lambda g_2$

$\vdots$

✓ $\frac{\partial L}{\partial x_n} = f_n + \lambda g_n$

✓ $\frac{\partial L}{\partial \lambda} = g(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$

Otimização Condicionada

- Interpretação do Multiplicador de Lagrange.

✓Solução geral: $\frac{f_1}{-g_1} = \frac{f_2}{-g_2} = \cdots = \frac{f_n}{-g_n} = \lambda$

✓$\lambda = \frac{benefício\ marginal\ de\ x_i}{custo\ marginal\ de\ x_i}$

✓A derivada g_i reflete o custo marginal relativo ao uso de x_i

Otimização Condicionada

- Condição de primeira ordem: $f_i + \lambda g_i = 0$

- A condição de segunda ordem para o problema com restrição fica:

- $|\overline{H_n}| = \begin{vmatrix} 0 & g_1 & g_2 & \ldots & g_n \\ g_1 & f_{11} & f_{12} & \cdots & f_{1n} \\ g_2 & f_{21} & f_{22} & \cdots & f_{2n} \\ \vdots & & & & \\ g_n & f_{n1} & f_{n2} & \cdots & f_{nn} \end{vmatrix}$

Otimização Condicionada

- Condição de primeira ordem: $f_i + \lambda g_i = 0$

- A condição de segunda ordem para o problema com restrição fica:

- $|\overline{H_2}| = \begin{vmatrix} 0 & g_1 & g_2 \\ g_1 & f_{11} & f_{12} \\ g_2 & f_{21} & f_{22} \end{vmatrix}$

Otimização Condicionada

- Condição de primeira ordem: $f_i + \lambda g_i = 0$

- A condição de segunda ordem para o problema com restrição fica:

- $|\overline{H_3}| = \begin{vmatrix} 0 & g_1 & g_2 & g_3 \\ g_1 & f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ g_2 & f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ g_3 & f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{vmatrix}$

Otimização Condicionada

- Exemplo 2.7 pg.42 (Nicholson)

- Retornado ao problema de maximização da saúde do indivíduo, o objetivo é maximizar a função: $y = -x_1^2 + 2x_1 - x_2^2 + 4x_2 + 5$,

- Mas agora, suponha que a escolha das doses de x_1 e x_2, estejam sujeitas a restrição de que o indivíduo possa tomar apenas uma dose por dia: $x_1 + x_2 = 1$, ou

$$1 - x_1 - x_2 = 0$$

Otimização Condicionada

- Exemplo 2.7 pg.42 (Nicholson)

- $L = -x_1^2 + 2x_1 - x_2^2 + 4x_2 + 5 + \lambda(1 - \ x_1 - x_2)$
- Condição de primeira ordem:

✓ $\frac{\partial L}{\partial x_1} = -2x_1 + 2 - \lambda = 0$

✓ $\frac{\partial L}{\partial x_2} = -2x_2 + 4 - \lambda = 0$

✓ $\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 1 - \ x_1 - x_2 = 0$

Otimização Condicionada

- Exemplo 2.7 pg.42 (Nicholson)
- $Solução$:

✓ $-2x_1 + 2 = -2x_2 + 4 = \lambda$
✓ $x_1 = x_2 - 1$

✓ $x_2^* = 1$ e $x_1^* = 0$ e λ=2

- Max sem restrição: $y^* = 10$
- Max com restrição: $y^* = 8$

Otimização Condicionada

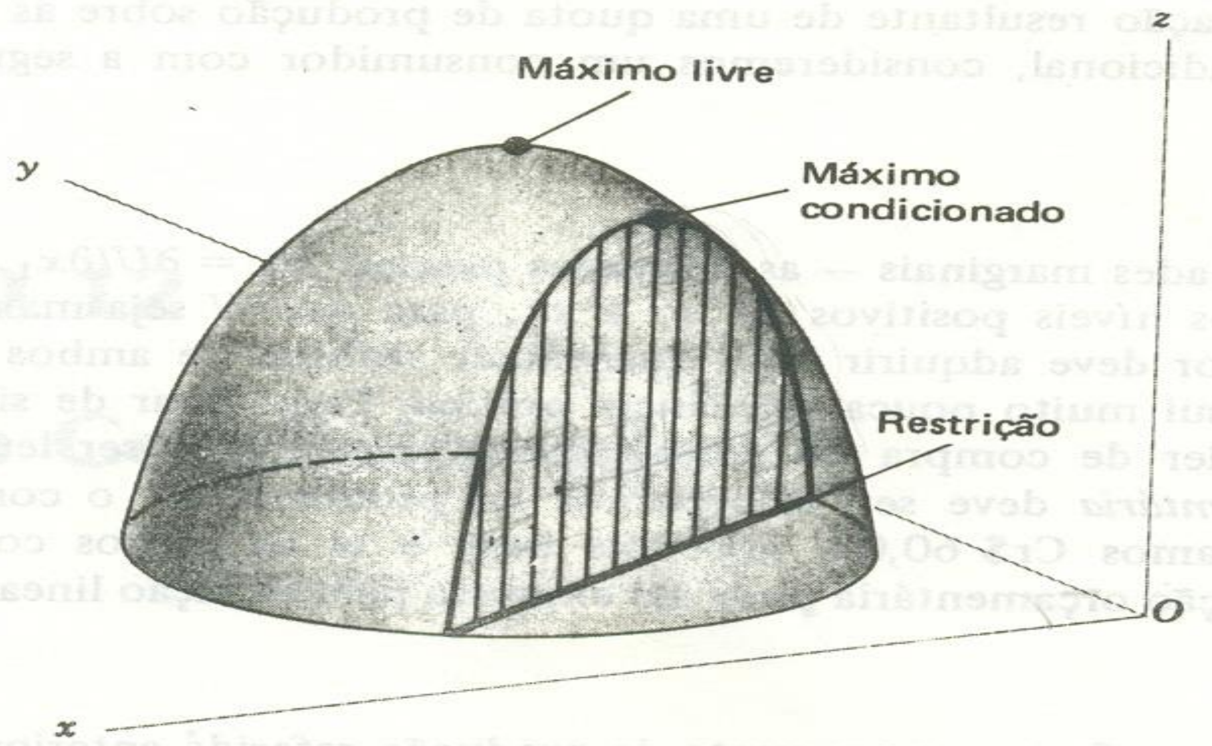

Figura 12.2

Otimização Condicionada

- A condição de segunda ordem para o problema com restrição fica:

✓Hessiano Orlado

- $|\overline{H_2}| = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \end{vmatrix}$

Otimização Condicionada

- A condição de segunda ordem para o problema com restrição fica:

✓Primeiro menor

- $|\overline{H_1}| = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = -1$

Otimização Condicionada

- A condição de segunda ordem para o problema com restrição fica:

- $|\overline{H_2}| = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 0 + 0 + 0 - (-2 + 0 - 2) = 4$

Portanto, em $x_2^* = 1$ e $x_1^* = 0$ a função atinge o máximo.

Maximização de funções de várias variáveis

- Resumo para problema de maximização com restrição de funções de *n* variáveis

Condição	Máximo	Mínimo
Primeira ordem	$f_1 = f_2 = \cdots = f_n 0$	$f_1 = f_2 = \cdots = f_n 0$
Segunda ordem	$\lvert\bar{H}_2\rvert > 0;\ \lvert\bar{H}_3\rvert < 0;$ $\lvert\bar{H}_4\rvert > 0; \ldots$ d^2y é $definida\ negativa$ A função é estritamente côncava	$\lvert\bar{H}_2\rvert < 0;\ \lvert\bar{H}_3\rvert < 0;$ $\lvert\bar{H}_4\rvert < 0; \ldots$ d^2y é $definida\ positiva$ A função é estritamente convexa

Referências Bibliográficas

- ✓ NICHOLSON, W; SNYDER, C. **Microeconomic Theory: Basic Principles and Extensions**. 11th Edition (International Edition), 2012 – cap. 2, pg. 39 - 85.