Aulas 1 – Matemática Revisão

Piracicaba, agosto de 2018

Professora Dra. Andréia Adami

Sumário

- Otimização

✓Maximização de Funções de uma variável

- Condição de primeira ordem para máximo
- Condição de segunda ordem

✓Maximização Funções de várias variáveis

- Condição de primeira ordem para máximo

Otimização

- Por que o uso da técnica matemática de derivação (diferenciação) é importante na análise econômica?

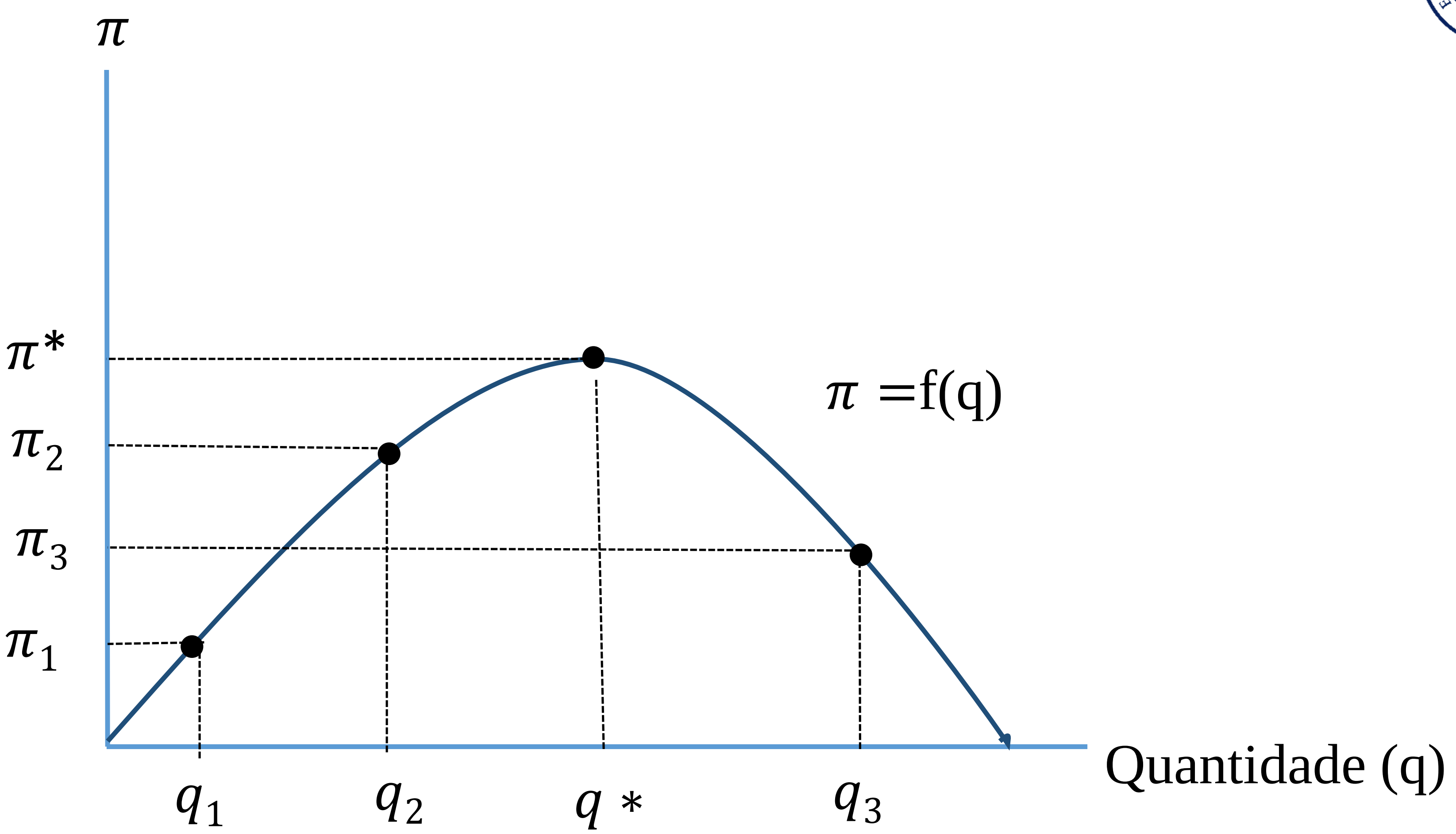
Otimização

- Vamos supor que a firma XYZ deseja maximizar seu lucro.

✓Matematicamente podemos escrever a função lucro como:

$$\pi = f(q)$$

Otimização



Otimização

- Até quando o gerente da fábrica deve continuar a aumentar a quantidade produzida – q?

Otimização

A empresa continuará a expandir a produção enquanto $\frac{\pi_2 - \pi_1}{q_2 - q_1} > 0$, ou

$$\frac{\Delta\pi}{\Delta q} > 0$$

Otimização

✓Matematicamente, quando tomamos o limite de $\frac{\Delta\pi}{\Delta q}$ para pequenas variações (infinitesimais) em *q* –, temos a derivada da função π=*f(q)*, e podemos escrever como: $\frac{d\pi}{dq}$ ou $\frac{df(\pi)}{dq}$ ou ainda *f'(q)*.

Assim, $\frac{d\pi}{dq} = \frac{df}{dq} = \rightarrow \lim_{h\rightarrow 0} \frac{f(q1+h)-f(q1)}{h}$.

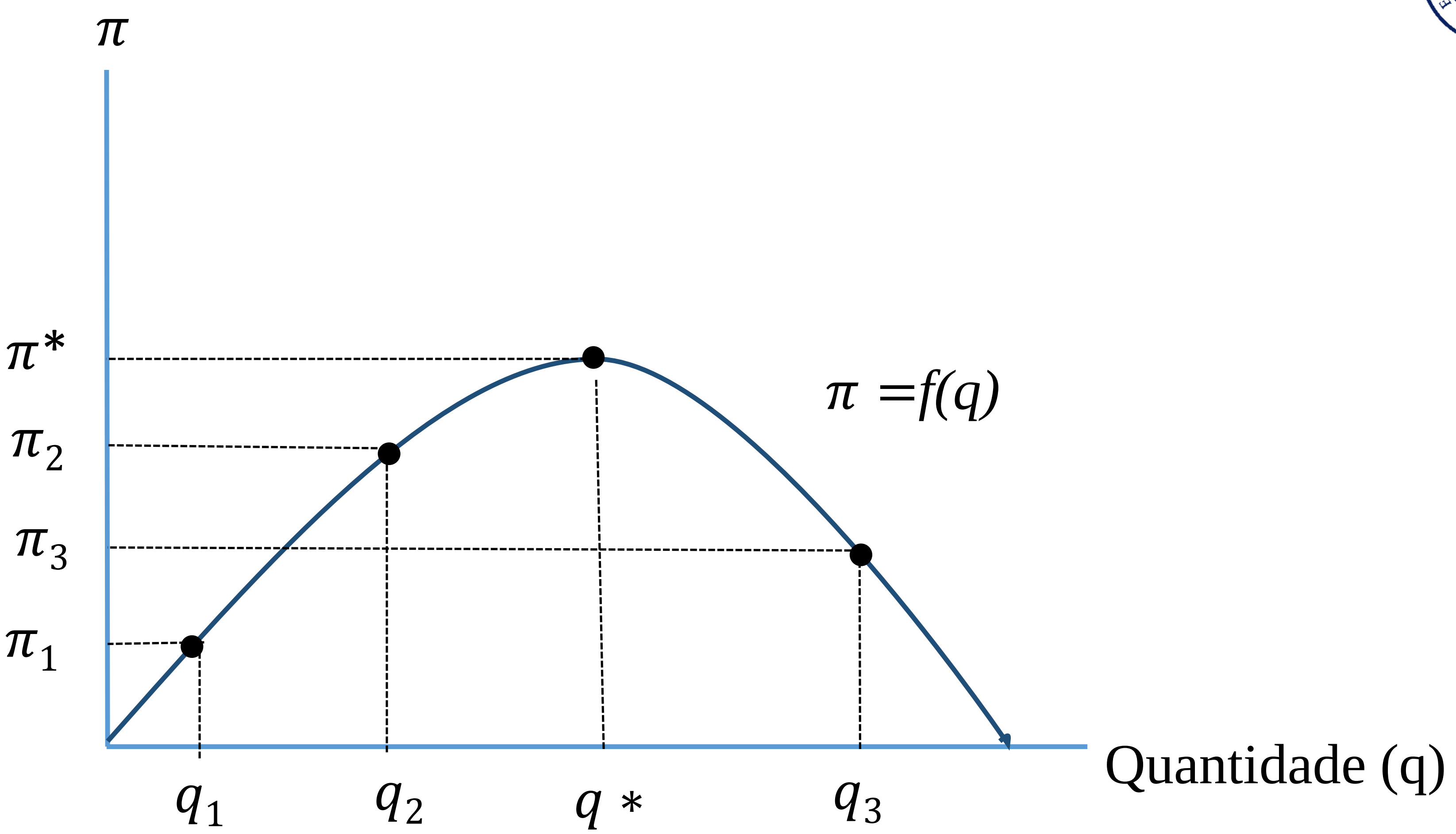
com $h = \Delta q$

Otimização

- Notação: Função derivada avaliada no ponto $q = q1$

$$\left.\frac{d\pi}{dq}\right|_{q=q1}$$

Otimização



Otimização

- Inclinação da curva: $\pi = f(q)$

$$\left.\frac{d\pi}{dq}\right|_{q=q1} > 0 \quad \text{e} \quad \left.\frac{d\pi}{dq}\right|_{q=q3} < 0$$

E em $\left.\frac{d\pi}{dq}\right|_{q=q*}$?

Otimização

- Condição de primeira ordem: $\frac{df}{dq} = 0$

$$\left.\frac{df}{dq}\right|_{q=q^*} = 0$$

Otimização

- Condição de segunda ordem:

$$\frac{d^2\pi}{dq^2} \quad ou \quad \frac{d^2f}{dq^2} \quad ou \quad f''(q)$$

Otimização

- Condição de segunda ordem para o máximo: $\frac{d^2 f}{dq^2} < 0$

$$\left.\frac{d^2 f}{dq^2}\right|_{q=q^*} < 0$$

Otimização

- Regras de derivação:

1)Função Constante: Seja $f(x) = a$, então $f'(x)=0$ para todo x pertencente ao domínio da função;

2)Função potência: Se $f(x) = x^n$, *então*: $f'(x) = nx^{n-1}$, para n real qualquer;

3)Função logarítmica: Se $f(x) = \ln x$, *então*: $f'(x) = \frac{1}{x}$, para $x > 0$;

4) Derivada do Produto de uma constante por uma função:

Seja f uma função e a uma constante, se g é definida por:

$$g(x) = af(x)$$
$$g'(x) = af'(x)$$

Regras de derivação

5)Derivada de uma soma e/ou diferença: Sejam f e g duas funções e h é definida por: $h(x) = f(x) + g(x)$. Se, $f'(x)$ e $g'(x)$ existirem, então: $h'(x) = f'(x) + g'(x)$.

Obs. O mesmo vale para: $h(x) = f(x) - g(x)$;

6) *Derivada de um produto:* Sejam f e g duas funções e h é definida por: $h(x) = f(x) * g(x)$. Se, $f'(x)$ e $g'(x)$ existirem, então:

$$h'(x) = f'(x) * g(x) + f(x) * g'(x)$$

Regras de derivação

7) *Derivada de um quociente:* Sejam f e g duas funções e h é definida por: $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ e g(x)≠ 0. Se, $f'(x)$ e $g'(x)$ existirem, então: $h'(x) = \frac{f'(x)*g(x) - f(x)*g\prime(x)}{[g(x)]^2}$

8) Derivada da função exponencial: Seja $f(x) = a^x$, então: $f'(x) = a^x lna$, para todo x real, com a>0 e a≠ 1

Caso especial: $f(x) = e^x$, $f'^{(x)} = e^x lne = e^x$

Regras de derivação

9) Função Composta – Regra da Cadeia

Utiliza-se a regra da cadeia para situações onde temos que derivar funções compostas, isto é, quando a variável independente também é uma função. Se $\mathrm{y} = \mathrm{f}(\mathrm{u}), \mathrm{u} = \mathrm{g}(\mathrm{x})$, e as deriva*das* $\frac{dy}{du}$ *e* $\frac{du}{dx}$ existem, *e*ntão, a função composta $\mathrm{y} = \mathrm{u}(\mathrm{g}(\mathrm{x}))$ tem

derivadas dadas por: $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$ ou seja: $f'(x) = f'(u).u'(x)$

Com $\frac{dy}{du} = f'(x)$ *e* $\frac{du}{dx} = u'(x)$

- Exemplos: 1) $y = e^{ax} =$

  2) $y = \ln(ax) =$

  3) $y = \ln(x^2) =$

Regras de derivação

9) Função Composta – Regra da Cadeia

Utiliza-se a regra da cadeia para situações onde temos que derivar funções compostas, isto é, quando a variável independente também é uma função. Se $y = f(u), u = g(x)$, e as derivadas $\frac{dy}{du}$ e $\frac{du}{dx}$ existem, $e$ntão, a função composta $y = u(g(x))$ tem

derivadas dadas por: $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$ ou seja: $f'(x) = f'(u).u'(x)$

Com $\frac{dy}{du} = f'(x)$ e $\frac{du}{dx} = u'(x)$

- Exemplos: 1) $y = e^{ax} = ae^{ax}$

  2) $y = \ln(ax) = \frac{1}{ax}.a = \frac{1}{x}$

  3) $y = \ln(x^2) = \frac{1}{x^2}.2x = \frac{2}{x}$

Exemplo Maximização Lucro

- Seja a função lucro: $\pi = 1.000q\ - 5q^2$

✓Encontre o valor de q que maximiza a função lucro

Exemplo Maximização Lucro

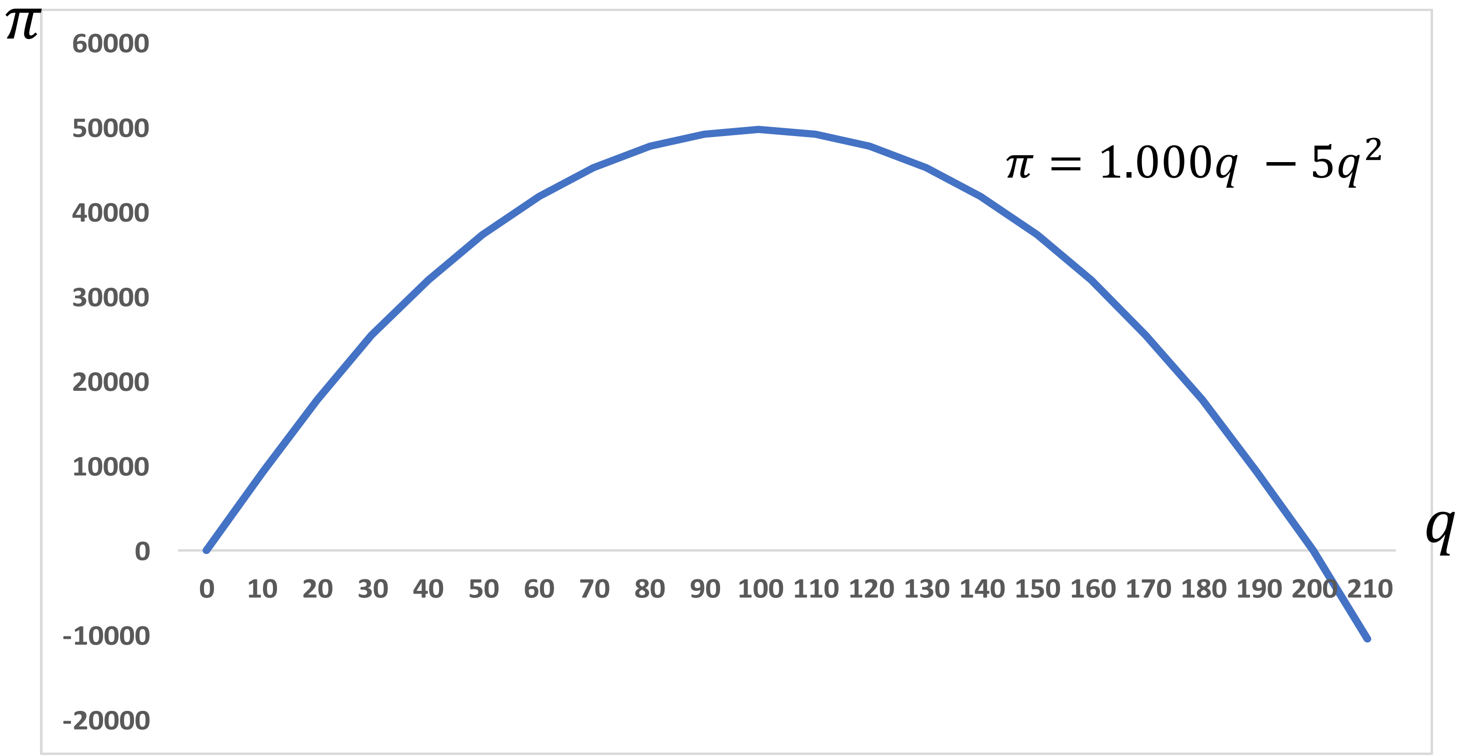
- Encontre o valor de q que maximiza a função lucro

✓ $\frac{d\pi}{dq} = 1.000 - 2(5q) = 1.000 - 10\,q$

✓ $q^* = ?$

✓ $\pi^* = ?$

Exemplo Maximização Lucro



Exemplo Maximização Lucro

- Encontre o valor de q que maximiza a função lucro

✓ $\frac{d\pi}{dq} = 1.000 - 2(5q) = 1.000 - 10\, q$

✓ $q^* = \frac{1000}{10} = 100$

✓ $\pi = 1.000\,(100) - 5(100)^2 = 50.000$

Maximização de funções de várias variáveis

- Funções de várias variáveis:

✓ $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$

- Derivadas parciais

✓ $\dfrac{\partial y}{\partial x_1} \quad ou \ \dfrac{\partial f}{\partial x_1}$

✓ $\left.\dfrac{\partial f}{\partial x_1}\right|_{\overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_1 + h, \overline{x_2}, \ldots, \overline{x_n}) - f(x_1, \overline{x_2}, \ldots, \overline{x_n})}{h}$

Maximização de funções de várias variáveis

- Seja y $= f(x_1, x_2) = ax_1^2 + bx_1x_2 + cx_2{}^2$

✓As derivadas parciais da função em relação às variáveis x_1 e x_2 são:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} \quad e \quad \frac{\partial f}{\partial x_2}$$

Maximização de funções de várias variáveis

- Calcular as seguintes derivadas parciais:

$$y = f(x_1, x_2) = ax_1^2 + bx_1x_2 + c{x_2}^2$$

✓ $\frac{\partial f}{\partial x_1} = f_1 = 2ax_1 + bx_2$

✓ $\frac{\partial f}{\partial x_2} = f_2 = bx_1 + 2cx_2$

Maximização de funções de várias variáveis

- Calcular as derivadas parciais da função:

$\text{y} = f(x_1, x_2) = aln\ x_1 + bln\ x_2$

✓ $\frac{\partial f}{\partial x_1} = f_1 =$

✓ $\frac{\partial f}{\partial x_2} = f_2 =$

Maximização de funções de várias variáveis

- Calcular as derivadas parciais da função:

$$y = f(x_1, x_2) = aln\ x_1 + bln\ x_2$$

✓ $\frac{\partial f}{\partial x_1} = f_1 = \frac{a}{x_1}$

✓ $\frac{\partial f}{\partial x_2} = f_2 = \frac{b}{x_2}$

Maximização de funções de várias variáveis

- Calcular as derivadas parciais da função: y $= f(x_1, x_2) = e^{ax_1 + bx_2}$

✓ $\frac{\partial f}{\partial x_1} = f_1 =$

✓ $\frac{\partial f}{\partial x_2} = f_2 =$

Maximização de funções de várias variáveis

- Calcular as derivadas parciais da função: y $= f(x_1, x_2) = e^{ax_1+bx_2}$

✓ $\frac{\partial f}{\partial x_1} = f_1 = ae^{ax_1+bx_2}$

✓ $\frac{\partial f}{\partial x_2} = f_2 = be^{ax_1+bx_2}$

Maximização de funções de várias variáveis

- Derivadas parciais de segunda ordem: $\frac{\partial(\frac{\partial f}{\partial x_i})}{\partial x_j}$ ou $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = f_{ij}$

✓Calcule as derivadas segunda ordem das funções:

$1) = f(x_1, x_2) = ax_1^2 + bx_1x_2 + c{x_2}^2$

$f_{11} =?$
$f_{12} =?$
$f_{21} =?$
$f_{22} =?$

Maximização de funções de várias variáveis

- Derivadas parciais de segunda ordem: $\frac{\partial(\frac{\partial f}{\partial x_i})}{\partial x_j}$ ou $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = f_{ij}$

1) $= f(x_1, x_2) = ax_1^2 + bx_1x_2 + cx_2{}^2$

$f_{11} = 2a$
$f_{12} = b$
$f_{21} = b$
$f_{22} = 2c$

Maximização de funções de várias variáveis

- Derivadas parciais de segunda ordem: $\frac{\partial(\frac{\partial f}{\partial x_i})}{\partial x_j}$ ou $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = f_{ij}$

2) $y = f(x_1, x_2) = e^{ax_1 + bx_2}$

$f_{11} =?$

$f_{12} =?$

$f_{21} =?$

$f_{22} =?$

Maximização de funções de várias variáveis

- Derivadas parciais de segunda ordem: $\frac{\partial(\frac{\partial f}{\partial x_i})}{\partial x_j}$ ou $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = f_{ij}$

2) $y = f(x_1, x_2) = e^{ax_1 + bx_2}$

$$f_{11} = a^2 e^{ax_1 + bx_2}$$
$$f_{12} = abe^{ax_1 + bx_2}$$
$$f_{21} = abe^{ax_1 + bx_2}$$
$$f_{22} = b^2 e^{ax_1 + bx_2}$$

Maximização de funções de várias variáveis

- Derivadas parciais de segunda ordem: $\frac{\partial(\frac{\partial f}{\partial x_i})}{\partial x_j}$ ou $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = f_{ij}$

3) $\mathrm{y} = f(x_1,\ x_2) = aln\ x_1 + bln\ x_2$

$f_{11} =?$
$f_{12} =?$
$f_{21} =?$

$f_{22} =?$

Maximização de funções de várias variáveis

- Derivadas parciais de segunda ordem: $\frac{\partial(\frac{\partial f}{\partial x_i})}{\partial x_j}$ ou $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = f_{ij}$

3) $\mathrm{y} = f(x_1,\ x_2) = aln\ x_1 + bln\ x_2$

$f_{11} = -ax^{-2}$
$f_{12} = 0$
$f_{21} = 0$
$f_{22} = -bx^{-2}$

Maximização de funções de várias variáveis

- Teorema de Young: $f_{ji} = f_{ij}$

Maximização de funções de várias variáveis

- Função implícita :y $= 0 = f(x_1, x_2) = f(x_1, g(x_1))$
- Obs.: x_2=$g(x_1)$
- Usando a regra da cadeia para diferenciar y em relação a x_1 temos:

$$0 = f_1 + f_2.\frac{dg(x_1)}{dx_1}$$

✓Reorganizando os termos temos:

$$\frac{dg(x_1)}{dx_1} = \frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{f_1}{f_2}$$

Maximização de funções de várias variáveis

- Função implícita: Exemplo

✓Seja a função fronteira de possibilidade de produção dada por:

$$x^2 + 0{,}25y^2 = 200$$

✓Como podemos estudar a relação entre as variáveis *x* e *y* usando os resultados da função implícita?

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{fx}{fy} = -\frac{2x}{0{,}5y} = -\frac{4x}{y}$$

Maximização de funções de várias variáveis

- Condição de primeira ordem: como no caso de uma única variável, a condição necessária é a de que $dy = 0$ para pequenas variações (infinitesimais) em x ao redor do ponto ótimo.
  - Assim, para o caso da função: $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, a medida que a função atinja um determinado ponto ótimo, movimentos em qualquer direção não devem alterar o valor da função, isso ocorre quando todas as derivadas parciais da função são zero:

$$f_1 = f_2 = f_3 = \cdots = f_n = 0$$

Maximização de funções de várias variáveis

- Condição de primeira ordem
- Exemplo: Seja y uma função de duas variáveis, x_1 e x_2

$$y = -(x_1 - 1)^2 - (x_2 - 2)^2 + 10 \text{ ou,}$$
$$y = -{x_1}^2 + 2x_1 - {x_2}^2 + 4x_2 + 5$$

✓Dado que *y* representa saúde do indivíduo e x_1 e x_2, dosagens diárias de duas drogas, encontre os valores que e x_1 e x_2 *que maximizam y:*

Maximização de funções de várias variáveis

- Condição de primeira ordem
- Exemplo: Seja y uma função de duas variáveis, x_1 e x_2

$$y = -(x_1 - 1)^2 - (x_2 - 2)^2 + 10 \text{ ou,}$$
$$y = -x_1{}^2 + 2x_1 - x_2{}^2 + 4x_2 + 5$$

✓Dado que y representa saúde do indivíduo e x_1 e x_2, dosagens diárias de duas drogas, encontre os valores que e x_1 e x_2 *que maximizam y:*

$$\frac{\partial y}{\partial x_1} = -2x_1 + 2 = 0$$
$$\frac{\partial y}{\partial x_2} = -2x_2 + 4 = 0$$

$Portanto,$ x_1*=1 e x_2*=2 e y*=10.

Referências Bibliográficas

- ✓ NICHOLSON, W; SNYDER, C. **Microeconomic Theory: Basic Principles and Extensions**. 11th Edition (International Edition), 2012 – cap. 2, pg. 21-33.