

# Breve Curso de Modelos Elastoplásticos

José Jorge Nader  
(Livre-Docente da Escola Politécnica da USP)

São Paulo  
2015

## FICHA CATALOGRÁFICA

**Nader, José Jorge**  
Breve curso de modelos elastoplásticos / J.J. Nader.  
-- São Paulo : s.n., 2015.  
120 p.

**ISBN 978-85-908651-2-4**

**1.Mecânica dos solos 2. Plasticidade 3. Elasticidade  
4.Mecânica clássica Il.t.**

**CDU 624.131**

## APRESENTAÇÃO

O estudo desenvolvido neste livro corresponde essencialmente às minhas aulas sobre modelos elastoplásticos clássicos da Mecânica dos Solos. Essas aulas fazem parte da disciplina de pós-graduação *Modelos Constitutivos*, que leciono há doze anos no Departamento de Engenharia de Estruturas e Fundações da Escola Politécnica da USP.

Três capítulos, de natureza mais fundamental, apresentam as equações constitutivas da Elasticidade Linear, Plasticidade Perfeita e Plasticidade (geral); os demais tratam de modelos baseados nessas teorias (von Mises, Drucker-Prager, Cam-Clay) e de exemplos de aplicação.

J. J. N.  
São Paulo  
Fevereiro de 2015



## ÍNDICE

- I.** Elasticidade Linear...7
  - II.** Elasticidade Linear. Problemas simples....15
  - III.** Plasticidade Perfeita...23
  - IV.** Critérios e superfícies de plastificação...31
  - V.** Modelos elastoplásticos perfeitos de von Mises e Drucker-Prager...41
  - VI.** Plasticidade...51
  - VII.** Modelo de von Mises com endurecimento...59
  - VIII.** Modelo Cam-Clay....67
  - IX.** Aplicações do Cam-Clay a ensaios triaxiais...79
- Bibliografia...109



# Capítulo I

## ELASTICIDADE LINEAR

### 1. Introdução

A Elasticidade Linear é a mais conhecida teoria constitutiva para sólidos. Por sua importância e relativa simplicidade, é o ponto de partida do nosso estudo.

A equação que caracteriza os materiais elásticos lineares relaciona, através de uma função linear, a *matriz de deformações*  $\mathbf{E}$ , definida como a parte simétrica do gradiente do deslocamento, e a *matriz de tensões*  $\mathbf{T}$  (a tensão de Cauchy), também simétrica, que supomos já serem conhecidas dos leitores.  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{T}$  são às vezes chamadas simplesmente de *deformação* e *tensão*. Em símbolos:  $\mathbf{T} = \mathbf{L}[\mathbf{E}]$ . O operador linear  $\mathbf{L}$  adquire forma particularmente simples no caso de materiais isotrópicos (os únicos que vamos examinar), conforme veremos na próxima seção.

Cabe já antecipar que em Plasticidade aparecerão nas equações as derivadas em relação ao tempo de  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{T}$ , simbolizadas por  $\dot{\mathbf{E}}$  (velocidade de deformação) e  $\dot{\mathbf{T}}$ . Mais especificamente, as equações

de Plasticidade têm a forma  $\dot{\mathbf{T}} = \mathbf{C}(\mathbf{T})[\dot{\mathbf{E}}]$ , em que, para cada  $\mathbf{T}$ ,  $\mathbf{C}(\mathbf{T})$  é um operador linear.

Para maior clareza, e a título de recordação, convém falar de alguns conceitos de Mecânica do Contínuo, ainda que de maneira muito sucinta. (Para estudo deste tema, ver livros relacionados na bibliografia.) Consideremos o movimento de um corpo em determinado intervalo de tempo. A posição de uma partícula  $X$  na configuração de referência será designada genericamente por  $\mathbf{X} = (X_1, X_2, X_3)$  (coordenadas cartesianas).

Sejam  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{E}$  as funções que para cada  $(\mathbf{X}, t)$  fornecem, respectivamente, o deslocamento  $\mathbf{u}(\mathbf{X}, t)$  e a matriz de deformações  $\mathbf{E}(\mathbf{X}, t)$  da partícula  $X$ , no instante  $t$ . Em componentes:  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ . Os coeficientes de  $\mathbf{E}(\mathbf{X}, t)$  são  $E_{ij}(\mathbf{X}, t) = [\partial u_i(\mathbf{X}, t) / \partial X_j + \partial u_j(\mathbf{X}, t) / \partial X_i] / 2$ . Pode-se mostrar que  $\mathbf{E}(\mathbf{X}, t)$  mede deformações nas vizinhanças de  $\mathbf{X}$ , no instante  $t$ , de forma aproximada (no sentido geométrico, teórico, não experimental). Por exemplo, o coeficiente  $E_{11}(\mathbf{X}, t)$  mede, aproximadamente, a deformação específica (aumento de comprimento dividido por comprimento inicial) na direção 1. A mesma interpretação vale, nas respectivas direções, para os demais coeficientes da diagonal principal. O coeficiente  $E_{12}(\mathbf{X}, t)$  (que é igual a  $E_{21}(\mathbf{X}, t)$ ) mede, aproximadamente, metade da distorção ocorrida entre as direções 1 e 2. O traço de  $\mathbf{E}(\mathbf{X}, t)$  é aproximadamente igual à deformação volumétrica de  $X$ , no instante  $t$ . Essas medidas aproximadas são tão mais precisas quanto menores forem as deformações. Por isso, as teorias constitutivas que trabalham com  $\mathbf{E}$  são ditas teorias para pequenas deformações.

Seja  $\mathbf{T}$  a função que a cada  $(\mathbf{X}, t)$  associa a matriz de tensões  $\mathbf{T}(\mathbf{X}, t)$ , atuante na partícula  $X$ , no instante  $t$ . Se  $\mathbf{n}$  é vetor unitário, o resultado da multiplicação de  $\mathbf{T}(\mathbf{X}, t)$  pela matriz coluna formada



pelas coordenadas de  $\mathbf{n}$  tem como resultado o vetor tensão que age em  $X$ , no instante  $t$ , sobre o plano de normal exterior  $\mathbf{n}$ . Em geral, o vetor tensão tem componentes normal e tangencial ao plano. Há pelo menos três planos, ortogonais entre si, em que os respectivos vetores tensão lhes são normais: são planos principais. Os vetores normais aos planos principais são então autovetores de  $\mathbf{T}(\mathbf{X}, t)$ ; aos autovalores correspondentes chamamos tensões principais.

Com as funções  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{T}$  temos portanto a descrição material (ou *lagrangiana*) da deformação e da tensão. As derivadas parciais de  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{T}$  em relação ao tempo, indicadas por  $\dot{\mathbf{E}}$  e  $\dot{\mathbf{T}}$ , quando calculadas em  $(\mathbf{X}, t)$  (ou seja,  $\dot{\mathbf{E}}(\mathbf{X}, t)$ ,  $\dot{\mathbf{T}}(\mathbf{X}, t)$ ) fornecem a velocidade de deformação da partícula  $X$  e a velocidade com que se altera a tensão na mesma partícula, no instante  $t$ . Nas equações constitutivas deste curso comparecerão as matrizes  $\mathbf{E}(\mathbf{X}, t)$ ,  $\dot{\mathbf{E}}(\mathbf{X}, t)$ ,  $\mathbf{T}(\mathbf{X}, t)$  e  $\dot{\mathbf{T}}(\mathbf{X}, t)$ . Para que fiquem compactas e mais fáceis de ler, não escreveremos o argumento  $(\mathbf{X}, t)$ .

## 2. Equação constitutiva

A equação constitutiva dos materiais elásticos lineares isotrópicos é

$$\mathbf{T} = \Lambda(\text{tr}\mathbf{E})\mathbf{I} + 2G\mathbf{E} \quad , \quad (1)$$

em que  $\mathbf{I}$  é a matriz identidade de ordem 3 e  $\text{tr}\mathbf{E} = E_{11} + E_{22} + E_{33}$  é o traço da matriz  $\mathbf{E}$ . Nessa equação estão presentes duas constantes características de cada material elástico, chamadas módulos de Lamé ( $\Lambda$  e  $G$ ), que são positivas. A constante  $G$  é chamada de módulo de cisalhamento, por uma razão que ficará clara mais adiante. É

importante notar já de início que  $\mathbf{E} = \mathbf{0}$  corresponde a  $\mathbf{T} = \mathbf{0}$ , ou seja, a tensão é nula na configuração de referência.

Para a solução de problemas específicos, convém ter à mão, explicitamente, as relações entre os coeficientes de  $\mathbf{T}$  e  $\mathbf{E}$ :

$$T_{11} = \Lambda(E_{11} + E_{22} + E_{33}) + 2GE_{11} , \quad (2)$$

$$T_{22} = \Lambda(E_{11} + E_{22} + E_{33}) + 2GE_{22} , \quad (3)$$

$$T_{33} = \Lambda(E_{11} + E_{22} + E_{33}) + 2GE_{33} , \quad (4)$$

$$T_{12} = 2GE_{12} , \quad (5)$$

$$T_{13} = 2GE_{13} , \quad (6)$$

$$T_{23} = 2GE_{23} . \quad (7)$$

Além dos módulos de Lamé, são também interessantes no estudo do material elástico linear o módulo de elasticidade (ou módulo de Young)  $E$ , o coeficiente de Poisson  $\nu$  e o módulo volumétrico  $K$ , que se definem a partir de  $\Lambda$  e  $G$  da seguinte forma:

$$E = \frac{G(3\Lambda + 2G)}{\Lambda + G} , \quad (8)$$

$$\nu = \frac{\Lambda}{2(\Lambda + G)} , \quad (9)$$

$$K = \frac{3\Lambda + 2G}{3} . \quad (10)$$

Dado que são positivos os módulos de Lamé, também o são o módulo de elasticidade, o coeficiente de Poisson e o módulo volumétrico. Ademais, depois de reescrever (9) assim:  $\nu = [2(G/\Lambda + 1)]^{-1}$ , concluímos facilmente que  $\nu < 1/2$ .

Trabalhando nas equações 8, 9 e 10, podemos exprimir  $\Lambda$ ,  $G$  e  $K$  em função de  $E$  e  $\nu$ :

$$\Lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}, \quad (11)$$

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}, \quad (12)$$

$$K = \frac{E}{3(1 - 2\nu)}. \quad (13)$$

O significado físico desses módulos será discutido no próximo capítulo. Note-se que, sendo  $0 < \nu < 1/2$ , o denominador em (13) jamais se anula.

Conhecida a matriz  $\mathbf{E}$ , a equação 1 nos permite determinar a matriz  $\mathbf{T}$ . Em certos problemas, entretanto, a situação é inversa: conhecemos  $\mathbf{T}$  e queremos calcular  $\mathbf{E}$ . Nesses casos é conveniente inverter a relação dada por (1). Para isolar  $\mathbf{E}$  em (1), calculamos o traço de ambos os membros e obtemos:  $tr\mathbf{E} = tr\mathbf{T}/(3\Lambda + 2G)$ . Substituímos em (1) e isolamos  $\mathbf{E}$ :

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2G} \left[ \mathbf{T} - \frac{\Lambda}{3\Lambda + 2G} (tr\mathbf{T})\mathbf{I} \right]. \quad (14)$$

Os coeficientes da matriz  $\mathbf{E}$  podem então ser facilmente expressos em função dos coeficientes da matriz  $\mathbf{T}$ :

$$E_{11} = \frac{1}{E} [T_{11} - \nu(T_{22} + T_{33})], \quad (15)$$

$$E_{22} = \frac{1}{E} [T_{22} - \nu(T_{11} + T_{33})], \quad (16)$$

$$E_{33} = \frac{1}{E} [T_{33} - \nu(T_{11} + T_{22})], \quad (17)$$

$$E_{12} = \frac{T_{12}}{2G}, \quad (18)$$

$$E_{13} = \frac{T_{13}}{2G}, \quad (19)$$

$$E_{23} = \frac{T_{23}}{2G}. \quad (20)$$

É uma importante propriedade dos materiais governados pela equação 1 que deformações volumétricas só ocorram se  $tr\mathbf{T} \neq 0$  e que distorções só aconteçam na presença de tensões de cisalhamento, e vice-versa. Isso ficará claro depois de deduzirmos equações especiais para as partes esférica e desviadora (ou anti-esférica) de  $\mathbf{T}$ , definidas, respectivamente por  $\mathbf{T}_e = (tr\mathbf{T}/3)\mathbf{I}$  e  $\mathbf{T}_d = \mathbf{T} - \mathbf{T}_e$ . De (1) obtemos

$$\mathbf{T}_e = 3K\mathbf{E}_e , \quad (21)$$

$$\mathbf{T}_d = 2G\mathbf{E}_d , \quad (22)$$

em que  $\mathbf{E}_e = (tr\mathbf{E}/3)\mathbf{I}$  é a parte esférica de  $\mathbf{E}$ , que mede deformação volumétrica, e  $\mathbf{E}_d = \mathbf{E} - \mathbf{E}_e$  é a parte desviadora de  $\mathbf{E}$ , que mede distorção. Desse modo (1) pode ser escrita assim:

$$\mathbf{T} = 3K\mathbf{E}_e + 2G\mathbf{E}_d . \quad (23)$$

No próximo capítulo analisaremos deformações especiais, nas quais surge a interpretação física de  $\Lambda$ ,  $G$ ,  $E$ ,  $\nu$  e  $K$ .

Quando se aplica Elasticidade Linear a solos, faz-se uma importante modificação na equação 1. Sabemos que os solos, em sua configuração inicial, no terreno ou no laboratório, estão de modo geral sujeitos a tensão não-nula; a equação 1 é então tradicionalmente usada de forma a fornecer a variação de tensão que acompanha a deformação sofrida a partir da configuração inicial. Isto corresponde a reescrever (1) assim:

$$\mathbf{T} - \mathbf{T}_0 = \Lambda(tr\mathbf{E})\mathbf{I} + 2G\mathbf{E} , \quad (24)$$

em que  $\mathbf{T}_0$  é a tensão inicial. Ou, derivando-se em relação ao tempo:

$$\dot{\mathbf{T}} = \Lambda(tr\dot{\mathbf{E}})\mathbf{I} + 2G\dot{\mathbf{E}} . \quad (25)$$

Em Mecânica dos Solos, conforme se faça análise em tensões efetivas ou totais,  $\mathbf{T}$  é interpretada, evidentemente, como matriz de tensões efetivas ou totais. Nas análises em termos de tensões

efetivas, estuda-se o comportamento do sólido (teórico) que representa a estrutura de grãos, cujo movimento é independente do movimento dos fluidos que preenchem os poros do solo (água e ar). Os módulos elásticos deste sólido são chamados *efetivos* ou *drenados*. Por sua vez, nas análises em tensões totais, supõe-se não haver movimento relativo entre as fases que constituem o solo: a estrutura de grãos e os fluidos são tratados na teoria como se formassem um único sólido, com módulos elásticos próprios (*totais* ou *não-drenados*). Se se supõe que os fluidos não oferecem resistência ao cisalhamento, então o módulo de cisalhamento deve ser o mesmo nos dois casos (ver, no próximo capítulo, o cisalhamento simples do material elástico; equação II.12). Em solos saturados, graças à baixa compressibilidade da água, o módulo volumétrico total é muito mais alto que o efetivo.

## Capítulo II

### ELASTICIDADE LINEAR

#### Problemas Simples

Vamos aqui analisar o comportamento de um cubo constituído de material elástico linear. Suponhamos, por facilidade, que na configuração de referência o cubo esteja no primeiro octante do sistema de coordenadas, tendo um vértice na origem e faces, duas a duas, paralelas aos planos coordenados. Nessa configuração seus pontos ocupam posições designadas genericamente por  $\mathbf{X} = (X_1, X_2, X_3)$ . Os versores do sistema cartesiano de coordenadas são  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$  e  $\mathbf{e}_3$ .

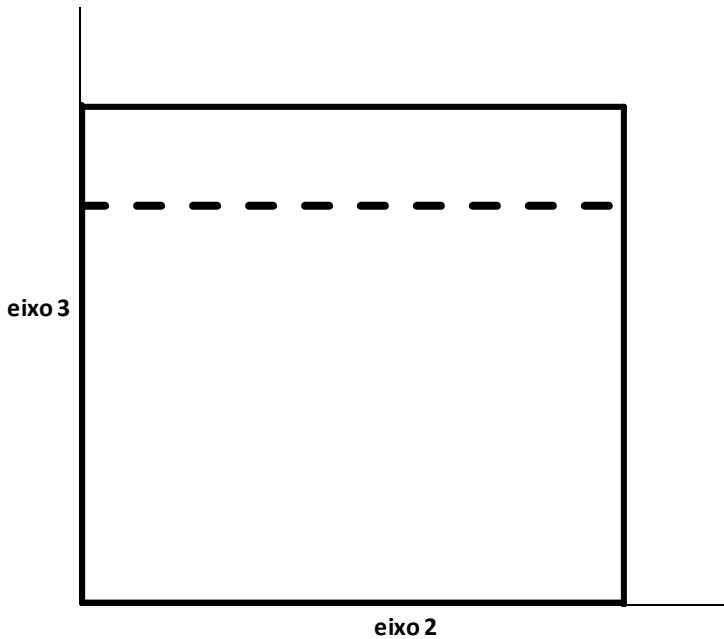
Usando a equação I.1, isto é, a equação 1 do capítulo I (ou equações dela obtidas), estudaremos a resposta a alguns campos de deslocamento (indicados por  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ ).

**a.** Compressão ou extensão vertical, sem deformação horizontal (figura 1).

$$u_1 = u_2 = 0, \quad (1)$$

$$u_3 = aX_3, \quad (2)$$

em que  $a$  é uma constante. (Se estivéssemos analisando o movimento, seria importante reconhecer que  $a$  depende do tempo; mas aqui só a deformação nos interessa.)



**Figura 1.** Compressão vertical, sem deformação horizontal.

A matriz de deformações é



$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}. \quad (3)$$

Conforme seja  $a < 0$  ou  $a > 0$ , o cubo sofre respectivamente compressão ou extensão vertical (direção do eixo 3), sem deformação horizontal. A correspondente matriz de tensões é

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \Lambda a & 0 & 0 \\ 0 & \Lambda a & 0 \\ 0 & 0 & (\Lambda + 2G)a \end{bmatrix}. \quad (4)$$

Logo, nas faces do cubo atuam apenas tensões normais:  $(\Lambda + 2G)a$  nas faces superior e inferior,  $\Lambda a$  nas faces laterais, todas elas de compressão, caso ocorra compressão vertical ( $a < 0$ ), ou de tração, caso ocorra extensão vertical ( $a > 0$ ).

Este exemplo fornece uma interpretação física para  $\Lambda$ : no caso analisado, é o quociente entre a tensão horizontal e a deformação específica vertical. Às vezes, em Mecânica dos Solos, o fator  $\Lambda + 2G$  é denominado módulo edométrico (é, neste exemplo, o quociente entre a tensão e a deformação específica verticais).

Da equação I.16, com  $E_{22} = 0$  e  $T_{11} = T_{22}$ , concluímos que a relação entre a tensão horizontal e a tensão vertical envolve apenas o coeficiente de Poisson:

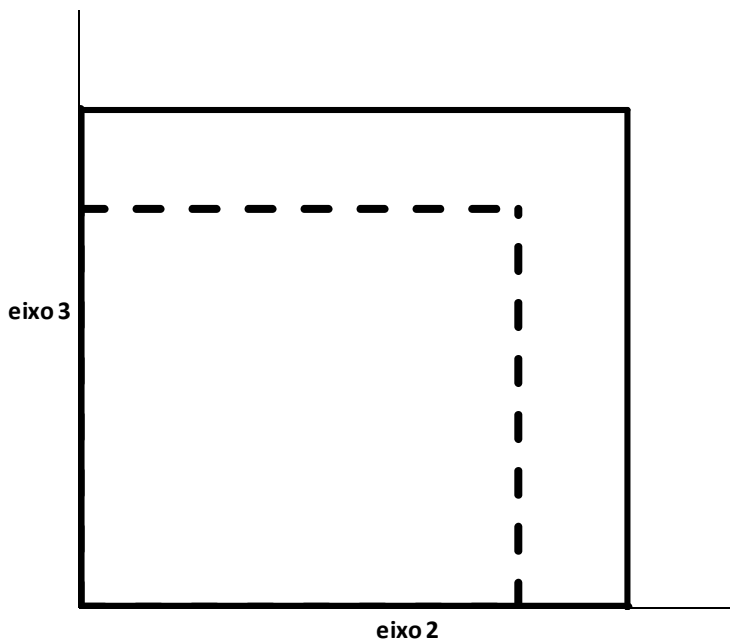
$$T_{22} = \frac{\nu}{1 - \nu} T_{33}. \quad (5)$$

b. Compressão ou expansão isotrópica (figura 2).

$$\mathbf{u} = b\mathbf{X} , \quad (6)$$

sendo  $b$  uma constante. A matriz de deformações é  $\mathbf{E} = b\mathbf{I}$  (puramente esférica). Portanto, da equação I.23 obtemos a seguinte matriz de tensões:

$$\mathbf{T} = 3Kb\mathbf{I} . \quad (7)$$



**Figura 2.** Compressão isotrópica.

É o chamado estado isotrópico ou hidrostático de tensões: todas as faces estão sujeitas à mesma tensão normal  $T = 3Kb$  (de compressão se  $b < 0$ ; de tração se  $b > 0$ ).

Introduzindo a deformação volumétrica  $E_v = \text{tr}\mathbf{E} = 3b$ , obtemos

$$T = KE_v . \quad (8)$$

Como  $K > 0$ , tensão de compressão ( $b < 0$ ) causa compressão volumétrica, e tensão de tração ( $b > 0$ ) causa expansão volumétrica, conforme se espera. Temos aqui a interpretação física do módulo volumétrico: neste exemplo, é o quociente entre a pressão (ou tração) aplicada e a deformação volumétrica decorrente.

**c. Cisalhamento simples (figura 3).**

$$u_1 = u_3 = 0 , \quad (9)$$

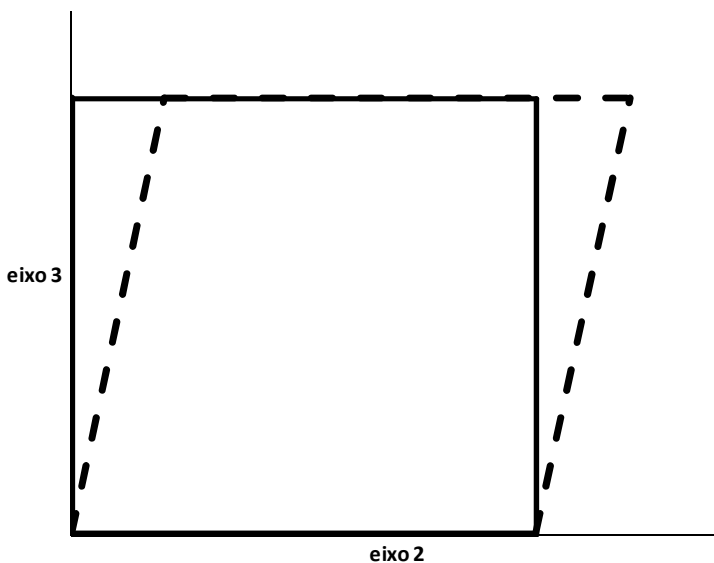
$$u_2 = \gamma X_3 , \quad (10)$$

em que  $\gamma$  é uma constante positiva. Ocorre distorção de ângulo  $\theta$  ( $\gamma = \text{tg}\theta$ ) envolvendo as faces normais aos eixos 2 e 3; as faces inicialmente normais ao eixo 2 se inclinam (no sentido positivo do eixo 2), enquanto as faces normais ao eixo 3 assim permanecem. A matriz  $\mathbf{E}$  é, neste caso,

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma/2 \\ 0 & \gamma/2 & 0 \end{bmatrix} . \quad (11)$$

Pelas equações de I.2 a I.7, deduzimos que a matriz  $\mathbf{T}$  é

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G\gamma \\ 0 & G\gamma & 0 \end{bmatrix}. \quad (12)$$



**Figura 3.** Cisalhamento simples.

Portanto, nas faces horizontais atuam tensões cisalhantes de magnitude  $G\gamma$ . Sendo  $G$  positivo, o vetor tensão de cisalhamento atuante na face que se desloca tem o mesmo sentido do deslocamento provocado.

**d.** Compressão ou extensão vertical, por aplicação de tensão normal nas faces horizontais, com demais tensões nulas (figura 4).

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}, \quad (13)$$

sendo  $c$  uma constante. Das equações de I.15 a I.20 resulta a matriz de deformações:

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} -\frac{\nu c}{E} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\nu c}{E} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{c}{E} \end{bmatrix}. \quad (14)$$

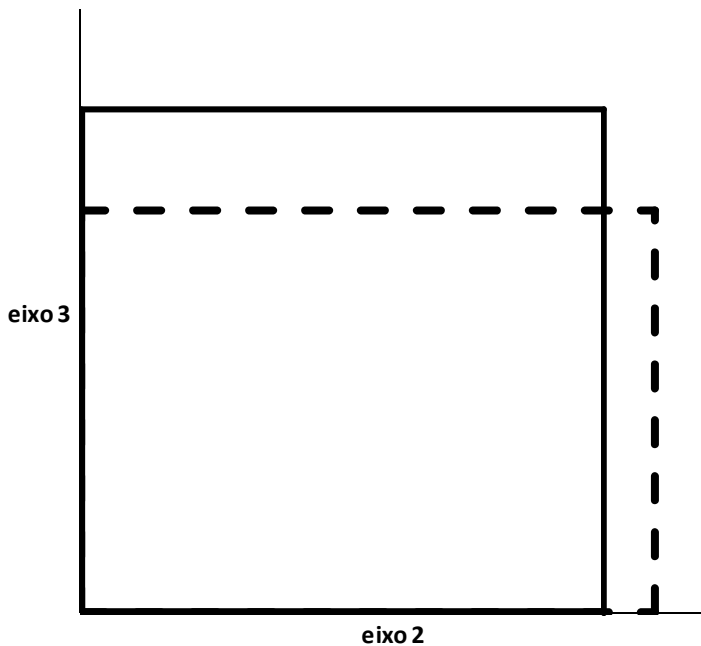
A tensão vertical é portanto acompanhada de deformação específica vertical de mesmo sinal, pois  $E$  é positivo. Como  $\nu$  também é positivo, a deformação específica horizontal tem sinal contrário ao da deformação vertical (figura 4). Neste exemplo temos clara interpretação física para  $E$  e  $\nu$ : o primeiro é o quociente entre tensão e deformação verticais; o segundo é o quociente entre deformações horizontal e vertical, multiplicado por -1.

Um campo de deslocamentos que corresponde a (14) é

$$u_1 = -\frac{\nu c}{E} X_1, \quad (15)$$

$$u_2 = -\frac{\nu c}{E} X_2, \quad (16)$$

$$u_3 = \frac{c}{E} X_3 . \quad (17)$$



**Figura 4.** Compressão por aplicação de tensão vertical.

## Capítulo III

### PLASTICIDADE PERFEITA

#### 1. Introdução

Plasticidade Perfeita é a teoria constitutiva que estuda os materiais elastoplásticos perfeitos. Nesta teoria desempenham papel essencial o *domínio elástico* (D), que é o interior de uma região fixa do espaço das tensões (o espaço das matrizes  $3 \times 3$ ), e sua fronteira, a *superfície de plastificação* (S). A tensão  $\mathbf{T}$  (num ponto do corpo, num instante qualquer) jamais se pode encontrar na região externa a S; isto é, ou encontra-se em S ou em D. Desse modo, S estabelece um limite para as tensões que podem atuar sobre o material e, por isso, é frequentemente identificada, nas aplicações, à superfície de ruptura. Veremos no próximo capítulo que a superfície de plastificação pode ser representada no espaço das tensões principais: a superfície de von Mises, por exemplo, é cilíndrica; a de Drucker-Prager, cônica (o eixo de ambas é o eixo hidrostático).

Em Plasticidade, duas equações constitutivas (a elástica e a elastoplástica), usadas em situações diferentes, relacionam  $\mathbf{T}$ ,  $\dot{\mathbf{T}}$  (derivada de  $\mathbf{T}$  em relação ao tempo) e  $\dot{\mathbf{E}}$  (velocidade de

deformação, isto é, a derivada de  $\mathbf{E}$  em relação ao tempo). Essas equações serão apresentadas e analisadas na próxima seção. Ambas têm a forma  $\dot{\mathbf{T}} = \mathbf{C}(\mathbf{T})[\dot{\mathbf{E}}]$ , sendo  $\mathbf{C}(\mathbf{T})$  um operador linear (para cada  $\mathbf{T}$ ) que associa  $\dot{\mathbf{E}}$  a  $\dot{\mathbf{T}}$ . Há uma função  $\mathbf{C}$  para *resposta elástica* e outra para *resposta elastoplástica*. Assim, conhecidos  $\mathbf{T}$  e  $\dot{\mathbf{E}}$  em certo instante, a equação constitutiva (a elástica ou a elastoplástica, conforme o caso) fornece nesse instante o valor de  $\dot{\mathbf{T}}$ , que representa a resposta instantânea do material. Vejamos o critério que estabelece qual das duas equações se aplica em cada uma das situações possíveis.

Já sabemos que, num instante qualquer, existem apenas duas possibilidades para o estado de tensão: ou  $\mathbf{T}$  está em D ou está em S. No primeiro caso ( $\mathbf{T}$  em D),  $\dot{\mathbf{T}}$  é dado pela equação elástica, qualquer que seja  $\dot{\mathbf{E}}$ . No segundo caso ( $\mathbf{T}$  em S), o critério que define a resposta instantânea do material é o seguinte. Dado  $\dot{\mathbf{E}}$ , calcula-se  $\dot{\mathbf{T}}$  com a equação elástica. Se  $\dot{\mathbf{T}}$  assim calculado apontar para o interior de S ou lhe for tangente, então tal valor de  $\dot{\mathbf{T}}$  representa efetivamente a resposta do material. (Ver na próxima seção a função  $\psi$ , que avalia a direção do  $\dot{\mathbf{T}}$  dado pela equação elástica.) Se, entretanto,  $\dot{\mathbf{T}}$  calculado com a equação elástica apontar para o exterior de S, então este deve ser desconsiderado; a verdadeira resposta é dada por  $\dot{\mathbf{T}}$  calculado com a equação elastoplástica. É importante assinalar que a equação elastoplástica é projetada de forma que produza  $\dot{\mathbf{T}}$  sempre tangente a S, de maneira que  $\mathbf{T}$  não possa jamais dirigir-se para o exterior de S.

Num intervalo de tempo em que a resposta é elástica, dizemos que o regime é elástico. Num intervalo em que a resposta é elastoplástica, o regime denomina-se elastoplástico. Quando, em regime elastoplástico,  $\mathbf{T}$  permanece fixo em S, dizemos que ocorre *escoamento plástico*.



Um dos objetivos da teoria é resolver o seguinte problema. Suponhamos que sejam dados: a) o valor de  $\mathbf{T}$  no instante inicial de um intervalo de tempo; b) a trajetória de deformação nesse intervalo, isto é, a função que a cada instante do intervalo fornece o valor de  $\mathbf{E}$ , da qual se obtém também  $\dot{\mathbf{E}}$ . O objetivo é determinar a trajetória de tensão, ou seja, a função que a cada instante do intervalo fornece o valor de  $\mathbf{T}$ . Vistas dessa forma, as equações da teoria são equações diferenciais ordinárias na variável  $\mathbf{T}$ ; as trajetórias de tensão são determinadas pelas soluções dessas equações.

## 2. Equações constitutivas

No estudo das equações constitutivas da Plasticidade, empregaremos o conceito de produto escalar de duas matrizes. Sejam  $\mathbf{M}$  e  $\mathbf{N}$  duas matrizes quadradas; o produto escalar de  $\mathbf{M}$  e  $\mathbf{N}$ , simbolizado por  $\mathbf{M}:\mathbf{N}$ , é o número definido por

$$\mathbf{M}:\mathbf{N} = tr(\mathbf{M}^T\mathbf{N}) \quad (1)$$

( $\mathbf{M}^T$  é a transposta de  $\mathbf{M}$ ). Usando a definição (equação 1) podemos concluir que, em termos dos coeficientes das matrizes, o produto escalar é a soma dos produtos dos coeficientes correspondentes. Por exemplo, para matrizes  $3 \times 3$ , que são as que nos interessam:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}:\mathbf{N} = & M_{11}N_{11} + M_{12}N_{12} + M_{13}N_{13} + M_{21}N_{21} + M_{22}N_{22} + \\ & + M_{23}N_{23} + M_{31}N_{31} + M_{32}N_{32} + M_{33}N_{33} \end{aligned} \quad (2)$$

Analogamente ao que ocorre com os vetores da Geometria, dizemos que duas matrizes são ortogonais quando seu produto escalar é nulo.

A superfície de plastificação  $S$  é definida como uma superfície de nível de uma função chamada *função de plastificação*. Introduce-se, então, primeiramente, a função de plastificação  $f$ , que associa a cada tensão  $\mathbf{T}$  de seu domínio um número. A equação de  $S$  é  $f(\mathbf{T}) = k$  (sendo  $k$  uma constante característica do material). Além disso,  $f$  é tal que, se  $\mathbf{T}$  estiver em  $D$ , então  $f(\mathbf{T}) < k$  (ao passo que  $f(\mathbf{T}) > k$  corresponde a  $\mathbf{T}$  na região externa a  $S$ , o que a teoria proíbe). A equação  $f(\mathbf{T}) = k$  é denominada *critério de plastificação*.

A matriz

$$\nabla f(\mathbf{T}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f(\mathbf{T})}{\partial T_{11}} & \frac{\partial f(\mathbf{T})}{\partial T_{12}} & \frac{\partial f(\mathbf{T})}{\partial T_{13}} \\ \frac{\partial f(\mathbf{T})}{\partial T_{12}} & \frac{\partial f(\mathbf{T})}{\partial T_{22}} & \frac{\partial f(\mathbf{T})}{\partial T_{23}} \\ \frac{\partial f(\mathbf{T})}{\partial T_{13}} & \frac{\partial f(\mathbf{T})}{\partial T_{23}} & \frac{\partial f(\mathbf{T})}{\partial T_{33}} \end{pmatrix} \quad (3)$$

é o gradiente da função de plastificação. Calculado num ponto  $\mathbf{T}$  de  $S$ ,  $\nabla f(\mathbf{T})$  lhe é ortogonal nesse ponto, apontando para o exterior ( $\nabla f(\mathbf{T})$  indica a direção de maior crescimento de  $f$ ). A função  $f$  deve ser tal que  $\nabla f(\mathbf{T})$  nunca se anule.

As equações para resposta elástica ou elastoplástica, discutidas brevemente na seção anterior, serão agora apresentadas.

A equação constitutiva elástica é

$$\dot{\mathbf{T}} = \mathbf{A}(\mathbf{T})[\dot{\mathbf{E}}] , \quad (4)$$

em que  $\mathbf{A}(\mathbf{T})$  é, para cada  $\mathbf{T}$ , um operador linear inversível. Caso  $\mathbf{A}(\mathbf{T})$  seja constante, isto é, não varie com  $\mathbf{T}$ , o comportamento é de material elástico linear:  $\mathbf{A}(\mathbf{T})[\dot{\mathbf{E}}] = \Lambda \text{tr} \dot{\mathbf{E}} \mathbf{I} + 2G \dot{\mathbf{E}}$ ; sendo  $\Lambda$  e  $G$  os módulos de Lamé.

Por sua vez, a equação constitutiva elastoplástica é

$$\dot{\mathbf{T}} = \mathbf{A}(\mathbf{T})[\dot{\mathbf{E}}] + \psi(\mathbf{T}, \dot{\mathbf{E}})\mathbf{B}(\mathbf{T}), \quad (5)$$

em que  $\psi(\mathbf{T}, \dot{\mathbf{E}}) = \nabla f(\mathbf{T}) : \mathbf{A}(\mathbf{T})[\dot{\mathbf{E}}]$  (linear em  $\dot{\mathbf{E}}$ , portanto) e  $\mathbf{B}$  é uma função constitutiva cujos valores são matrizes simétricas, e que satisfaz

$$\mathbf{1} + \mathbf{B}(\mathbf{T}) : \nabla f(\mathbf{T}) = 0. \quad (6)$$

(logo, não se anula). Veremos a seguir que a restrição imposta por (6) sobre a função  $\mathbf{B}$  tem a finalidade de garantir que, na resposta elastoplástica,  $\dot{\mathbf{T}}$  seja tangente a  $S$ . Cumpre assinalar que, quando  $\psi(\mathbf{T}, \dot{\mathbf{E}}) = 0$ , a equação 5 se reduz à equação 4.

É importante agora estabelecer claramente as situações em que a resposta é elástica ou elastoplástica.

**Resposta elástica:**  $\dot{\mathbf{T}}$  será dado por (4) nas situações I e II descritas abaixo.

I)  $f(\mathbf{T}) < k$ , qualquer que seja  $\dot{\mathbf{E}}$ .

II)  $f(\mathbf{T}) = k$  e  $\psi(\mathbf{T}, \dot{\mathbf{E}}) \leq 0$ .

Notemos que  $\psi(\mathbf{T}, \dot{\mathbf{E}}) < 0$  significa que  $\mathbf{A}(\mathbf{T})[\dot{\mathbf{E}}]$  aponta para o interior de  $S$ , pois seu produto escalar por  $\nabla f(\mathbf{T})$  é negativo. Mas,

por (4),  $\mathbf{A}(\mathbf{T})[\dot{\mathbf{E}}]$  é o próprio  $\dot{\mathbf{T}}$ , que aponta então para o interior de  $S$ , indicando que a tensão entra no domínio elástico. Já  $\psi(\mathbf{T}, \dot{\mathbf{E}}) = 0$  significa que  $\dot{\mathbf{T}}$  é tangente a  $S$ .

**Resposta elastoplástica:**  $\dot{\mathbf{T}}$  será dado por (5) se  $f(\mathbf{T}) = k$  e  $\psi(\mathbf{T}, \dot{\mathbf{E}}) > 0$ .

A equação 4 preveria que, sendo  $\psi(\mathbf{T}, \dot{\mathbf{E}}) > 0$ ,  $\dot{\mathbf{T}}$  apontasse para o exterior de  $S$ , o que não poderia acontecer. Segundo a equação 5, que é a que vale nesta situação (resposta elastoplástica), o produto escalar de  $\nabla f(\mathbf{T})$  por  $\dot{\mathbf{T}}$  é nulo:

$$\nabla f(\mathbf{T}) : \dot{\mathbf{T}} = \psi(\mathbf{T}, \dot{\mathbf{E}})(1 + \nabla f(\mathbf{T}) : \mathbf{B}(\mathbf{T})) = 0, \quad (7)$$

haja vista (6). Logo  $\dot{\mathbf{T}}$  é ortogonal a  $\nabla f(\mathbf{T})$  e, portanto, tangente a  $S$ . Fica clara a importância da restrição expressa por (6).

Qualquer que seja a resposta, elástica ou elastoplástica, define-se velocidade de deformação elástica  $\dot{\mathbf{E}}^e$  por

$$\dot{\mathbf{E}}^e = \mathbf{A}(\mathbf{T})^{-1}[\dot{\mathbf{T}}], \quad (8)$$

e velocidade de deformação plástica pela diferença

$$\dot{\mathbf{E}}^p = \dot{\mathbf{E}} - \dot{\mathbf{E}}^e. \quad (9)$$

Quando é elástica a resposta, decorre de (4) e (9) que  $\dot{\mathbf{E}}^e = \dot{\mathbf{E}}$  e  $\dot{\mathbf{E}}^p = \mathbf{0}$ . Em caso de resposta elastoplástica, a relação de  $\dot{\mathbf{E}}^p$  com  $\mathbf{T}$  e  $\dot{\mathbf{T}}$  é determinada do seguinte modo: isola-se  $\dot{\mathbf{E}}$  em (5) e subtrai-se  $\dot{\mathbf{E}}^e$  dada por (8):

$$\dot{\mathbf{E}}^p = -\psi(\mathbf{T}, \dot{\mathbf{E}})\mathbf{A}(\mathbf{T})^{-1}[\mathbf{B}(\mathbf{T})] \quad (10)$$

(que não é nula, portanto).

Dizemos que acontece escoamento plástico, quando, em regime elastoplástico,  $\mathbf{T}$  permanece constante (fixo em  $S$ ). Assim, no escoamento plástico, sendo  $\dot{\mathbf{T}} = \mathbf{0}$ , também  $\dot{\mathbf{E}}^e = \mathbf{0}$ , e, desse modo,  $\dot{\mathbf{E}} = \dot{\mathbf{E}}^p$ . Logo, segundo (10),  $\dot{\mathbf{E}}$  deve ser necessariamente da forma  $\dot{\mathbf{E}} = -a\mathbf{A}(\mathbf{T})^{-1}[\mathbf{B}(\mathbf{T})]$ , com  $a > 0$  (pois  $\psi(\mathbf{T}, \dot{\mathbf{E}}) > 0$ ). Para mostrar que qualquer  $\dot{\mathbf{E}}$  dessa forma leva a escoamento plástico, basta substituir  $\dot{\mathbf{E}} = -a\mathbf{A}(\mathbf{T})^{-1}[\mathbf{B}(\mathbf{T})]$  em (5) e concluir que  $\dot{\mathbf{T}} = \mathbf{0}$  (tendo em vista a equação 6).

Definir um modelo elastoplástico perfeito significa escolher as funções  $\mathbf{A}$ ,  $f$  e  $\mathbf{B}$ . No capítulo V veremos exemplos. Usualmente, porém, na construção de um modelo, em vez de se especificar diretamente  $\mathbf{B}$ , prefere-se adotar uma outra função  $\mathbf{P}$ , cujo papel estará claro em breve, para, em seguida, com auxílio de equações apropriadas, deduzir a expressão de  $\mathbf{B}$ . Isso se passa da seguinte forma.

Com base em (10), inicia-se por postular que  $\dot{\mathbf{E}}^p$  seja, em cada instante, múltiplo positivo de  $\mathbf{P}(\mathbf{T})$ :

$$\dot{\mathbf{E}}^p = m\mathbf{P}(\mathbf{T}) . \quad (11)$$

sendo  $m$  uma função escalar do tempo, com valores positivos, cuja relação com as funções já conhecidas será determinada adiante. A equação 11 é conhecida pelo nome *lei de fluxo*.

Quando se escolhe  $\mathbf{P} = \nabla f$ , diz-se tradicionalmente que "o fluxo é associado" e que vale a *condição de normalidade*, pois, neste

caso,  $\dot{\mathbf{E}}^p$  é múltiplo de  $\nabla f(\mathbf{T})$  e, portanto, normal a  $S$  em  $\mathbf{T}$ . Pode-se também introduzir  $\mathbf{P}$  através de outra função escalar:  $\mathbf{P} = \nabla g$ . A função escalar  $g$  é denominada potencial plástico. Claramente, no caso de fluxo associado,  $g = f$ . A vantagem de se empregar a função  $\mathbf{P}$  para definir  $\dot{\mathbf{E}}^p$  está em poder controlar o tipo de deformação com que se dá o escoamento plástico, se a volume constante ( $\mathbf{P}(\mathbf{T})$  com traço nulo), se com aumento de volume ( $\mathbf{P}(\mathbf{T})$  com traço positivo) ou com diminuição de volume ( $\mathbf{P}(\mathbf{T})$  com traço negativo). Exige-se de  $\mathbf{P}$  que  $\psi(\mathbf{T}, \mathbf{P}(\mathbf{T})) > 0$  (para validade das equações 13 e 14 abaixo).

De acordo com (8), (9) e (11):

$$\dot{\mathbf{T}} = \mathbf{A}(\mathbf{T})[\dot{\mathbf{E}} - \dot{\mathbf{E}}^p] = \mathbf{A}(\mathbf{T})[\dot{\mathbf{E}}] - m\mathbf{A}(\mathbf{T})[\mathbf{P}(\mathbf{T})] . \quad (12)$$

Mas  $\nabla f(\mathbf{T}) : \dot{\mathbf{T}} = 0$  na resposta elastoplástica. Logo, usando (12) e a definição de  $\psi$ , chegamos a

$$\nabla f(\mathbf{T}) : \dot{\mathbf{T}} = \psi(\mathbf{T}, \dot{\mathbf{E}}) - m\psi(\mathbf{T}, \mathbf{P}(\mathbf{T})) = 0 , \quad (13)$$

e, então:

$$m = \frac{\psi(\mathbf{T}, \dot{\mathbf{E}})}{\psi(\mathbf{T}, \mathbf{P}(\mathbf{T}))} . \quad (14)$$

Comparando (10), (11) e (14), concluímos finalmente que

$$\mathbf{B}(\mathbf{T}) = - \frac{1}{\psi(\mathbf{T}, \mathbf{P}(\mathbf{T}))} \mathbf{A}(\mathbf{T})[\mathbf{P}(\mathbf{T})] . \quad (15)$$

## Capítulo IV

### CRITÉRIOS E SUPERFÍCIES DE PLASTIFICAÇÃO

No caso de materiais isotrópicos, as tensões principais ( $T_1$ ,  $T_2$  e  $T_3$ ) bastam para determinar se certa matriz  $\mathbf{T}$  pertence à superfície de plastificação  $S$ , pois as propriedades do material não variam com a direção. Assim, à superfície  $S$  corresponde uma superfície no espaço das tensões principais (de dimensão 3), também denominada superfície de plastificação.

Uma vez que os solos resistem nada ou muito pouco a tensões normais de tração, as tensões principais  $T_1$ ,  $T_2$  e  $T_3$  são, na maioria dos casos, números negativos. Para facilidade de representação geométrica da superfície de plastificação, convém às vezes trabalhar com a matriz  $\boldsymbol{\sigma} = -\mathbf{T}$ , cujos autovalores, denominados também tensões principais, são  $\sigma_1 = -T_1$ ,  $\sigma_2 = -T_2$  e  $\sigma_3 = -T_3$  (positivos, portanto, na maioria dos casos).

Entre as mais conhecidas superfícies de plastificação estão a superfície de Tresca (superfície lateral de um prisma hexagonal regular), a de von Mises (superfície lateral de um cilindro), a de Mohr–Coulomb (superfície lateral de uma pirâmide) e a de Drucker–Prager (superfície lateral de um cone), todas tendo a

diagonal do espaço como eixo (ver *Plasticity and Geomechanics*, de Davis e Selvadurai). Por exemplo, as duas primeiras aplicam-se a metais e a solos saturados analisados em tensões totais, em situações não-drenadas; as duas últimas são usadas em análise por tensões efetivas de solos em geral (a pirâmide e o cone se abrem no sentido das tensões octaédricas de compressão). É importante salientar que a superfície de Mohr-Coulomb é uma pirâmide com seção hexagonal irregular (isso ocorre porque se supõe, com base experimental, que o ângulo de atrito obtido em ensaios triaxiais de compressão seja igual ao ângulo de atrito obtido em ensaios triaxiais de extensão).

Vejam os abaixo as equações que definem as superfícies mencionadas acima. Estas equações são denominadas critérios de plastificação.

Tanto no critério de plastificação de Tresca, como no de Mohr-Coulomb, não intervém a tensão principal intermediária. Sendo  $\sigma_M$  a tensão principal maior e  $\sigma_m$  a tensão principal menor, a equação do critério de Tresca é

$$\sigma_M = \sigma_m + 2c \quad , \quad (1)$$

em que  $c$  é a coesão. E a equação do critério de Mohr-Coulomb, por sua vez, é

$$\sigma_M = K\sigma_m + 2c\sqrt{K} \quad , \quad (2)$$

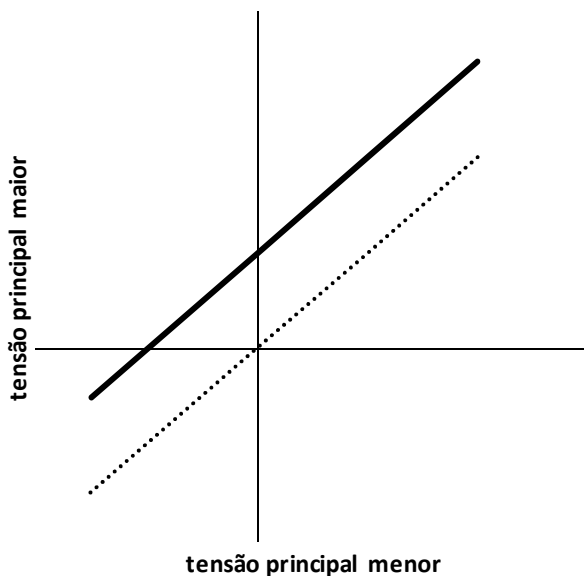
com

$$K = \frac{1 + \text{sen } \varphi}{1 - \text{sen } \varphi} \quad , \quad (3)$$

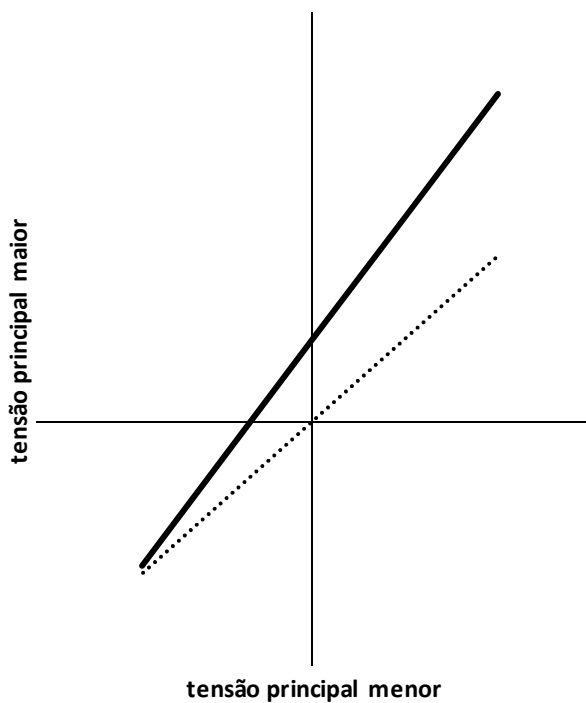


sendo  $\varphi$  o ângulo de atrito. Claramente, (2) se reduz a (1) se  $\varphi$  for nulo. Não demonstraremos aqui que (1) e (2) definem de fato o prisma de Tresca e a pirâmide de Mohr-Coulomb no espaço das tensões principais.

No plano  $(\sigma_m, \sigma_M)$  os critérios de Tresca e de Mohr-Coulomb se representam como nas figuras 1 e 2. A linha tracejada é bissetriz do ângulo reto. O domínio elástico corresponde à união da linha tracejada com o interior da região delimitada pelas duas linhas. A superfície de plastificação corresponde à linha cheia.



**Figura 1.** Critério de Tresca.



**Figura 2.** Critério de Mohr-Coulomb.

Para estabelecer a equação das superfícies de von Mises e de Drucker-Prager, calculemos primeiramente a parte desviadora (anti-esférica) de  $\boldsymbol{\sigma}$  :

$$\boldsymbol{\sigma}_d = \boldsymbol{\sigma} - (tr\boldsymbol{\sigma} / 3)\mathbf{I} , \quad (4)$$

cujos autovalores são as tensões desviadoras principais  $\sigma_{d1}$ ,  $\sigma_{d2}$  e  $\sigma_{d3}$ . Sua norma é

$$\|\sigma_d\| = \sqrt{\sigma_{d1}^2 + \sigma_{d2}^2 + \sigma_{d3}^2} , \quad (5)$$

Seja  $\mathbf{P} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$  um ponto no espaço das tensões principais e  $\mathbf{Q}$  sua projeção ortogonal sobre a diagonal do espaço. Mostraremos que  $tr\sigma$  e  $\sigma_d$  estão relacionados de modo bem simples com a distância de  $\mathbf{O} = (0,0,0)$  a  $\mathbf{Q}$  e com a distância de  $\mathbf{P}$  a  $\mathbf{Q}$ , respectivamente. Para encontrar  $\mathbf{Q}$ , projetamos o vetor  $\mathbf{OP}$  sobre o versor  $\mathbf{v} = (1,1,1)/\sqrt{3}$ , obtendo assim o vetor  $\mathbf{OQ}$ :

$$\mathbf{OQ} = (\mathbf{OP} \cdot \mathbf{v}) \mathbf{v} = \frac{tr\sigma}{\sqrt{3}} \mathbf{v} . \quad (6)$$

Logo:

$$\|\mathbf{OQ}\| = \frac{|tr\sigma|}{\sqrt{3}} . \quad (7)$$

Determinemos agora a distância do ponto P ao ponto Q. De  $\mathbf{OP} = \mathbf{OQ} + \mathbf{QP}$  obtemos

$$\mathbf{QP} = \mathbf{OP} - \mathbf{OQ} = (\sigma_{d1}, \sigma_{d2}, \sigma_{d3}) . \quad (8)$$

Portanto:

$$\|\mathbf{QP}\| = \|\sigma_d\| . \quad (9)$$

Com isso podemos exprimir facilmente a equação da superfície cilíndrica de von Mises:

$$\|\boldsymbol{\sigma}_d\| = R, \quad (10)$$

em que  $R$  é o raio do cilindro (os pontos da superfície cilíndrica são os pontos do espaço que distam  $R$  da diagonal do espaço).

Para a interpretação física de  $R$ , devemos relacioná-lo com tensões que levam o material à plastificação em solicitações bem conhecidas. (Levar à plastificação significa obedecer à equação 10.)

No caso de um ensaio triaxial em que a pressão confinante vale  $\sigma_c$ , atua lateralmente o próprio  $\sigma_c$  e, verticalmente,  $\sigma_c$  mais o acréscimo  $\Delta\sigma$ , ambos positivos. (Na compressão simples,  $\sigma_c = 0$ .)

Assim:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_c & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_c & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_c + \Delta\sigma \end{bmatrix}. \quad (11)$$

As tensões desviadoras correspondentes são  $\sigma_{d1} = \sigma_{d2} = -\Delta\sigma/3$  e  $\sigma_{d3} = 2\Delta\sigma/3$ , independentes, portanto, da pressão confinante. Concluimos então, por (10), que ocorre plastificação se

$$R = \sqrt{\frac{2}{3}} \Delta\sigma. \quad (12)$$

Num ensaio de cisalhamento simples:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tau \\ 0 & \tau & 0 \end{bmatrix}, \quad (13)$$

(com  $\tau > 0$ ). Aqui  $\boldsymbol{\sigma}_d = \boldsymbol{\sigma}$ . Portanto, há plastificação se

$$R = \tau\sqrt{2}. \quad (14)$$

Por último, a equação da superfície de plastificação cônica de Drucker-Prager é:

$$\|\boldsymbol{\sigma}_d\| = \left( \frac{tr\boldsymbol{\sigma}}{\sqrt{3}} + d \right) \operatorname{tg}\alpha, \quad (15)$$

em que  $\alpha$  é o ângulo de abertura do cone e  $d$  a distância de seu vértice à origem. A equação só é válida para  $tr\boldsymbol{\sigma} \geq -3d/\sqrt{3}$ , pois  $\|\boldsymbol{\sigma}_d\|$  nunca é negativo. O cone tem abertura voltada para o lado da compressão hidrostática. O vértice localiza-se sobre a diagonal do espaço, do lado da expansão ( $tr\boldsymbol{\sigma} < 0$ ) ou na origem (se  $d = 0$ ).

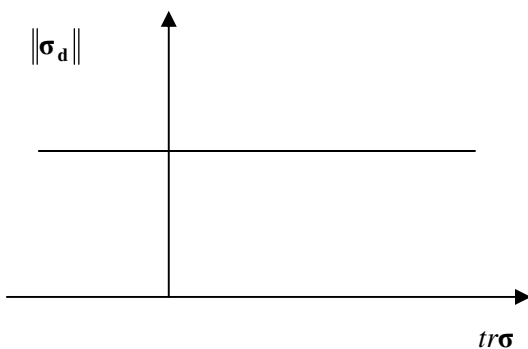
Se forem conhecidos a coesão ( $c$ ) e o ângulo de atrito ( $\varphi$ ) de um solo (parâmetros do critério de Mohr-Coulomb), podemos, em função deles, determinar  $d$  e  $\alpha$ , de modo que, por exemplo, o vértice da pirâmide coincida com o do cone e as arestas da pirâmide onde estão pontos com duas tensões principais iguais à tensão principal menor (como no ensaio de compressão triaxial) estejam contidas na superfície cônica. No vértice,  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = -d/\sqrt{3}$ ; logo,  $\sigma_M = \sigma_m = -d/\sqrt{3}$ . De (2) obtemos

$$d = \frac{2c\sqrt{3K}}{K-1} = \sqrt{3} c \cotg \varphi . \quad (16)$$

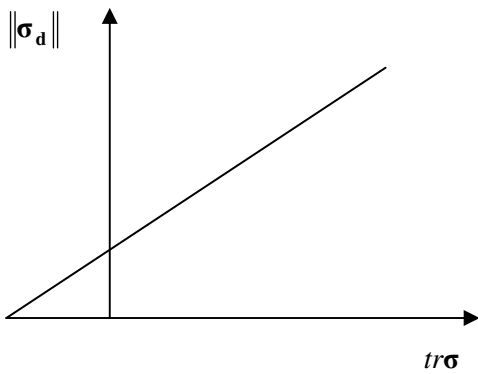
Para encontrar a relação entre  $\alpha$  e  $\varphi$ , escolhemos  $\sigma_1 = 2x > 0$  e  $\sigma_2 = \sigma_3 = -x$ , de modo que  $tr\sigma = 0$  e  $\|\sigma_d\| = x\sqrt{6}$ . Na equação de Drucker-Prager (15), usando (16):  $x\sqrt{6} = \sqrt{3} c \cotg \varphi \operatorname{tg} \alpha$ . Na equação de Mohr-Coulomb (2):  $2x = -Kx + 2c\sqrt{K}$ . Eliminando  $x$  chegamos a

$$\operatorname{tg} \alpha = 2\sqrt{2} \frac{\operatorname{sen} \varphi}{3 - \operatorname{sen} \varphi} . \quad (17)$$

Nas figuras 3 e 4 estão representados, no plano  $(tr\sigma, \|\sigma_d\|)$ , os critérios de von Mises e de Drucker-Prager. O domínio elástico corresponde ao interior da região delimitada pela reta e pelo eixo das abscissas unido ao conjunto dos pontos localizados sobre o próprio eixo das abscissas. A superfície de plastificação corresponde à reta.



**Figura 3.** Critério de von Mises.



**Figura 4.** Critério de Drucker-Prager.





## Capítulo V

### MODELOS ELASTOPLÁSTICOS PERFEITOS DE VON MISES E DRUCKER-PRAGER

Neste capítulo discutiremos três modelos elastoplásticos perfeitos (casos particulares da teoria geral), um deles com superfície de plastificação de von Mises, dois com superfície de plastificação de Drucker-Prager.

Definir um modelo significa especificar as três funções  $\mathbf{A}$ ,  $f$  e  $\mathbf{B}$  ou então, em vez de  $\mathbf{B}$ , a função  $\mathbf{P}$ . É esta última alternativa a que escolheremos. Especificadas as três funções  $\mathbf{A}$ ,  $f$  e  $\mathbf{P}$ , poderemos escrever todas as equações que caracterizam o modelo.

Nos três modelos examinados aqui, adotaremos a função  $\mathbf{A}$  da elasticidade linear:

$$\mathbf{A}(\mathbf{T})[\dot{\mathbf{E}}] = \Lambda(\text{tr}\dot{\mathbf{E}})\mathbf{I} + 2G\dot{\mathbf{E}} \quad , \quad (1)$$

de modo que a equação elástica é

$$\dot{\mathbf{T}} = \Lambda(\text{tr}\dot{\mathbf{E}})\mathbf{I} + 2G\dot{\mathbf{E}} \quad . \quad (2)$$

Para a completa caracterização dos modelos, falta então escolher  $f$  e  $\mathbf{P}$ .

**a. Modelo de von Mises com  $\mathbf{P} = \nabla f$ .**

A função de plastificação é dada por

$$f(\mathbf{T}) = \|\mathbf{T}_d\|, \quad (3)$$

em que  $\mathbf{T}_d = \mathbf{T} - (tr\mathbf{T}/3)\mathbf{I}$  (tensão desviadora) e  $\|\mathbf{T}_d\| = \sqrt{tr(\mathbf{T}_d^2)}$  é sua norma. A equação  $f(\mathbf{T}) = R$  define a superfície cilíndrica representada pela equação IV.10. Claramente, para tensões no domínio elástico,  $f(\mathbf{T}) < R$ .

Podemos agora determinar  $\psi$ ,  $\mathbf{B}$  e  $\dot{\mathbf{E}}^p$ . Para isso é necessário calcular  $\nabla f(\mathbf{T})$ , cujos coeficientes são as derivadas parciais  $\partial f(\mathbf{T})/\partial T_{ij}$ . Convém então primeiro exprimir  $\|\mathbf{T}_d\|^2$  em função dos coeficientes  $T_{ij}$  e depois usar  $\partial\|\mathbf{T}_d\|^2/\partial T_{ij} = 2\|\mathbf{T}_d\|\partial\|\mathbf{T}_d\|/\partial T_{ij}$  para chegar a  $\partial\|\mathbf{T}_d\|/\partial T_{ij}$ . Assim:

$$\|\mathbf{T}_d\|^2 = tr(\mathbf{T}_d^2) = tr(\mathbf{T}^2) - \frac{(tr\mathbf{T})^2}{3}, \quad (4)$$

com  $tr(\mathbf{T}^2) = T_{11}^2 + T_{22}^2 + T_{33}^2 + 2T_{12}T_{21} + 2T_{23}T_{32} + 2T_{31}T_{13}$  e  $tr(\mathbf{T}) = T_{11} + T_{22} + T_{33}$ . Decorre diretamente

$$\frac{\partial tr(\mathbf{T}^2)}{\partial T_{ij}} = 2T_{ij}, \quad (5)$$

$$\frac{\partial \text{tr} \mathbf{T}}{\partial T_{ij}} = \delta_{ij} , \quad (6)$$

e

$$\frac{\partial \|\mathbf{T}_d\|^2}{\partial T_{ij}} = 2T_{ij} - \frac{2(\text{tr} \mathbf{T})\delta_{ij}}{3} = 2T_{dij} , \quad (7)$$

sendo  $\delta_{ij} = 1$  para  $i = j$ , e  $\delta_{ij} = 0$  para  $i \neq j$ .

Assim, os coeficientes de  $\nabla f(\mathbf{T})$  são

$$\frac{\partial \|\mathbf{T}_d\|}{\partial T_{ij}} = \frac{T_{dij}}{\|\mathbf{T}_d\|} \quad (8)$$

e, portanto:

$$\nabla f(\mathbf{T}) = \frac{\mathbf{T}_d}{\|\mathbf{T}_d\|} . \quad (9)$$

Quando  $\nabla f$  é calculado em pontos que estão na superfície de plastificação ( $\|\mathbf{T}_d\| = R$ ), que é o que interessa, torna-se

$$\nabla f(\mathbf{T}) = \frac{\mathbf{T}_d}{R} . \quad (10)$$

Para montar a equação elastoplástica (III.5), falta conhecer  $\psi(\mathbf{T}, \dot{\mathbf{E}}) = \mathbf{A}(\mathbf{T})[\dot{\mathbf{E}}] : \nabla f(\mathbf{T})$  e  $\mathbf{B}(\mathbf{T})$ . De (1) e (10), obtemos

$$\psi(\mathbf{T}, \dot{\mathbf{E}}) = \frac{2G}{R} \dot{\mathbf{E}} : \mathbf{T}_d , \quad (11)$$

Determinaremos  $\mathbf{B}(\mathbf{T})$  pela equação III.15. Com  $\mathbf{P} = \nabla f$  calculamos

$$\mathbf{A}(\mathbf{T})[\nabla f(\mathbf{T})] = \frac{2G}{R} \mathbf{T}_d , \quad (12)$$

$$\psi(\mathbf{T}, \nabla f(\mathbf{T})) = 2G . \quad (13)$$

Então:

$$\mathbf{B}(\mathbf{T}) = -\frac{1}{R} \mathbf{T}_d . \quad (14)$$

Por fim, a equação elastoplástica é

$$\dot{\mathbf{T}} = \Lambda(\text{tr} \dot{\mathbf{E}}) \mathbf{I} + 2G \dot{\mathbf{E}} - \frac{2G}{R^2} (\dot{\mathbf{E}} : \mathbf{T}_d) \mathbf{T}_d . \quad (15)$$

Para determinar  $\dot{\mathbf{E}}^P$  combinam-se (III.11) e (10):

$$\dot{\mathbf{E}}^P = m \frac{\mathbf{T}_d}{R} , \quad (16)$$

em que  $m$  vale (ver (III.14)),

$$m = \frac{\dot{\mathbf{E}} : \mathbf{T}_d}{R} . \quad (17)$$

Finalmente:

$$\dot{\mathbf{E}}^P = \frac{\dot{\mathbf{E}} : \mathbf{T}_d}{R^2} \mathbf{T}_d . \quad (18)$$

A grandeza  $\|\dot{\mathbf{E}}_d^P\|$  é uma medida escalar da velocidade de distorção plástica ( $\dot{\mathbf{E}}_d^P$  é a parte desviadora de  $\dot{\mathbf{E}}^P$ ). De (16) obtemos  $\|\dot{\mathbf{E}}_d^P\| = m$ , o que fornece uma interpretação para  $m$  neste modelo.

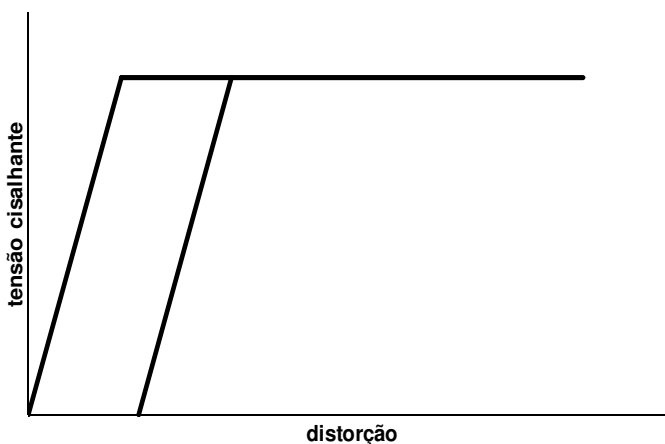
Conforme vimos, adotar  $\mathbf{P} = \nabla f$ , significa optar pela condição de normalidade. Em cada instante do regime elastoplástico, o vetor formado pelos autovalores de  $\dot{\mathbf{E}}^P$  (as velocidades principais de deformação plástica) é ortogonal à superfície cilíndrica, no ponto que representa a tensão, naquele instante. A equação 18 deixa claro que não ocorre deformação volumétrica plástica neste modelo, pois  $tr\dot{\mathbf{E}}^P = 0$ . Quando a tensão se move sobre a superfície de plastificação, a deformação volumétrica é puramente elástica. O escoamento plástico, situação em que a tensão permanece fixa sobre a superfície de plastificação, dá-se a volume constante, pois nem deformação volumétrica elástica acontece, já que a tensão não se altera. De acordo com a análise feita no capítulo III (logo em seguida à equação III.10), os valores de  $\dot{\mathbf{E}}$  que levam a escoamento plástico são  $\dot{\mathbf{E}} = -a\mathbf{T}_d$ , com  $a > 0$ .

Vejam agora o comportamento deste modelo no cisalhamento simples. No primeiro exemplo (figura 1), a tensão cisalhante e a distorção são inicialmente nulas. A distorção  $\gamma$  é então aumentada monotonicamente. Em regime elástico, a tensão cisalhante  $\tau$  aumenta segundo a equação  $\tau = G\gamma$  (ver a equação I ou a II.12), até que atinge o valor  $\tau_M = R/\sqrt{2}$  (equação IV.14), quando então começa o escoamento plástico, sob tensão cisalhante constante.



**Figura 1.** Cisalhamento simples com distorção monotonicamente crescente.

No segundo exemplo (figura 2), primeiramente  $\gamma$  cresce em regime elástico, seguindo-se escoamento plástico. Depois  $\gamma$  decresce em regime elástico até que a tensão cisalhante volte a ser nula. Finalmente,  $\gamma$  volta a crescer monotonicamente: novamente ocorre regime elástico, seguido de escoamento plástico.



**Figura 2.** Cisalhamento simples com ciclo.

**b. Modelo de Drucker-Prager com  $\mathbf{P} = \nabla f$  .**

A função de plastificação é expressa por

$$f(\mathbf{T}) = \|\mathbf{T}_d\| \left( \frac{-tr\mathbf{T}}{\sqrt{3}} + d \right)^{-1} . \quad (19)$$

A equação da superfície cônica (IV.15) se obtém com  $f(\mathbf{T}) = tg\alpha$  .

Seguindo os mesmos passos trilhados na construção do modelo de von Mises, obtemos as seguintes equações. De (6), (8) e (19):

$$\nabla f(\mathbf{T}) = \frac{1}{\Gamma(\mathbf{T})} \left( \frac{\mathbf{T}_d}{\|\mathbf{T}_d\|} + \frac{\|\mathbf{T}_d\|}{\sqrt{3}\Gamma(\mathbf{T})} \mathbf{I} \right) , \quad (20)$$

com

$$\Gamma(\mathbf{T}) = -tr\mathbf{T} / \sqrt{3} + d . \quad (21)$$

$\nabla f(\mathbf{T})$  deve ser calculado em pontos que estão sobre a superfície de plastificação, isto é, pontos para os quais vale  $\|\mathbf{T}_d\| = \Gamma(\mathbf{T})tg\alpha$ :

$$\nabla f(\mathbf{T}) = \frac{tg\alpha}{\|\mathbf{T}_d\|} \left( \frac{\mathbf{T}_d}{\|\mathbf{T}_d\|} + \frac{tg\alpha}{\sqrt{3}} \mathbf{I} \right) . \quad (22)$$

Com (1) e (20), calculamos

$$\psi(\mathbf{T}, \dot{\mathbf{E}}) = \frac{tg\alpha}{\|\mathbf{T}_d\|} \left( \frac{3Ktg\alpha}{\sqrt{3}} tr\dot{\mathbf{E}} + \frac{2G}{\|\mathbf{T}_d\|} \dot{\mathbf{E}} : \mathbf{T}_d \right) \quad (23)$$

(sendo  $K = (3\Lambda + 2G)/3$  o módulo volumétrico),

$$\mathbf{A}(\mathbf{T})[\nabla f(\mathbf{T})] = \frac{tg\alpha}{\|\mathbf{T}_d\|} \left( \frac{3Ktg\alpha}{\sqrt{3}} \mathbf{I} + \frac{2G}{\|\mathbf{T}_d\|} \mathbf{T}_d \right) , \quad (24)$$

$$\psi(\mathbf{T}, \nabla f(\mathbf{T})) = \frac{tg\alpha}{\|\mathbf{T}_d\|} (3Ktg^2\alpha + 2G) , \quad (25)$$

com as quais ficam determinados  $\dot{\mathbf{E}}^p$  (III.11),  $m$  (III.14),  $\mathbf{B}(\mathbf{T})$  (III.15) e a equação elastoplástica (III.5).

Uma medida comparativa da velocidade de deformação volumétrica plástica relativamente à velocidade de distorção plástica



é feita pelo *índice de dilatância*:  $tr\dot{\mathbf{E}}^P / \|\dot{\mathbf{E}}_d^P\|$ . De  $\dot{\mathbf{E}}^P = m\nabla f(\mathbf{T})$  e (20), concluímos que, neste modelo,

$$\frac{tr\dot{\mathbf{E}}^P}{\|\dot{\mathbf{E}}_d^P\|} = \frac{3tg\alpha}{\sqrt{3}}, \quad (26)$$

o qual depende apenas do ângulo de abertura do cone e é positivo. Portanto, no escoamento plástico ocorre expansão volumétrica.

### c. Modelo de Drucker-Prager com $\mathbf{P} \neq \nabla f$ .

Aqui valem também as equações 19, 22 e 23. Para  $\mathbf{P}(\mathbf{T})$  adotaremos:

$$\mathbf{P}(\mathbf{T}) = \frac{\mathbf{T}_d}{\|\mathbf{T}_d\|} + \frac{tg\beta}{\sqrt{3}} \mathbf{I}. \quad (27)$$

Recordando que  $\dot{\mathbf{E}}^P = m\mathbf{P}(\mathbf{T})$  (III.11), chegamos ao seguinte índice de dilatância:

$$\frac{tr\dot{\mathbf{E}}^P}{\|\dot{\mathbf{E}}_d^P\|} = \frac{3tg\beta}{\sqrt{3}}. \quad (28)$$

Vemos assim que a dilatância é controlada pelo ângulo  $\beta$ . Quando se escolhe  $\beta = 0$ , resulta escoamento plástico a volume constante, como no estado crítico dos solos.

A seguir apresentam-se as equações que faltam para determinar todas as que caracterizam este modelo:

$$\mathbf{A}(\mathbf{T})[\mathbf{P}(\mathbf{T})] = \frac{3Ktg\beta}{\sqrt{3}} \mathbf{I} + \frac{2G}{\|\mathbf{T}_d\|} \mathbf{T}_d, \quad (29)$$

$$\psi(\mathbf{T}, \mathbf{P}(\mathbf{T})) = 3Ktg\beta t g \alpha + 2G. \quad (30)$$

# Capítulo VI

## PLASTICIDADE

### 1. Introdução

Este capítulo se ocupará da teoria constitutiva dos materiais elastoplásticos que podem sofrer endurecimento, amolecimento ou escoamento plástico. Por ser abrangente, será chamada simplesmente de Plasticidade. Nesta introdução apresentaremos conceitos que serão estudados mais detidamente na próxima seção. O leitor notará diferenças e semelhanças em relação à Plasticidade Perfeita, que é um caso particular da presente teoria. Também aqui são elementos essenciais o domínio elástico ( $D$ ) e a superfície de plastificação ( $S$ ); porém, em geral,  $S$  agora não é fixa (e, portanto,  $D$  também não). Em regime elastoplástico,  $S$  pode modificar-se segundo a chamada *lei de endurecimento*, sempre de forma que permaneça sobre ela a tensão  $T$ .

Existem dois tipos elementares de endurecimento, ou seja, duas maneiras básicas pelas quais a superfície de plastificação se altera no espaço das tensões. (Endurecimento é a palavra genérica para indicar mudança de  $S$ ; pode significar endurecimento

propriamente dito ou amolecimento.) No *endurecimento isotrópico* S pode expandir-se ou contrair-se. O tamanho de S é controlado por um parâmetro escalar denominado *parâmetro de endurecimento* ( $k$ ). Quando S se expande ( $k$  crescente), acontece endurecimento; quando se contrai ( $k$  decrescente), amolecimento. No endurecimento *cinemático* ocorre mudança na posição de S no espaço das tensões, enquanto sua forma e seu tamanho se mantêm. Esses dois tipos de endurecimento podem ser combinados para modelar comportamentos complexos. Neste livro estudaremos apenas o endurecimento isotrópico.

Há uma equação para resposta elástica e outra para resposta elastoplástica, ambas com a forma  $\dot{\mathbf{T}} = \mathbf{C}(\mathbf{T})[\dot{\mathbf{E}}]$ . Quando se impõe determinado  $\dot{\mathbf{E}}$ , a resposta do material (isto é,  $\dot{\mathbf{T}}$ ) é fornecida por uma das duas equações, conforme explicado abaixo.

Num instante qualquer, ou  $\mathbf{T}$  está em D ou em S. Se está em D,  $\dot{\mathbf{T}}$  é dado pela equação elástica, qualquer que seja  $\dot{\mathbf{E}}$ . Se está em S, calcula-se primeiramente  $\dot{\mathbf{T}}$  com a equação elástica. Se  $\dot{\mathbf{T}}$  assim calculado se dirigir para o interior de S ou lhe for tangente, então a resposta é elástica e esse  $\dot{\mathbf{T}}$  representa de fato a resposta do material; além disso, S não se altera. (A avaliação da direção de  $\dot{\mathbf{T}}$  é feita com auxílio da função  $\psi$ ; ver próxima seção.) Todavia, se  $\dot{\mathbf{T}}$  calculado pela equação elástica se dirigir para o exterior de S, então a verdadeira resposta é elastoplástica e o valor correto de  $\dot{\mathbf{T}}$  deve ser calculado com a equação elastoplástica. Sendo elastoplástica a resposta, há três possibilidades: caso  $\dot{\mathbf{T}}$ , calculado com a equação elastoplástica, se dirija para o exterior de S, então ocorre endurecimento (S se expande); se, ao contrário,  $\dot{\mathbf{T}}$  se dirigir para o interior de S, ocorre amolecimento (S se contrai); se, finalmente,  $\dot{\mathbf{T}}$  for nulo, ocorre escoamento plástico (S não se altera: estado de plasticidade perfeita ou estado crítico).

Em Plasticidade Perfeita, a superfície de plastificação, sendo fixa, estabelece um limite para as tensões, podendo ser interpretada como superfície de ruptura. É importante assinalar, entretanto, que ensaios de laboratório mostram que, mesmo quando os solos e outros materiais estão submetidos a tensões distantes das de ruptura, seu comportamento não é elástico, conforme revelam os ciclos de carga feitos em ensaios triaxiais ou em ensaios edométricos (e nestes a ruptura jamais é atingida). Fica claro, assim, que ruptura e ocorrência de deformações plásticas (deformações irreversíveis observadas em ciclos) são fenômenos distintos. Isso foi especialmente reconhecido no importante artigo *Soil Mechanics and Work–Hardening Theories of Plasticity*, de Drucker, Gibson e Henkel (publicado em 1957) e foi incorporado no primeiro modelo elastoplástico para solos, o Cam–Clay. Esses fenômenos podem ser adequadamente modelados com as equações da teoria geral examinada neste capítulo.

## 2. Equações constitutivas

Na definição da superfície de plastificação ( $S$ ), em Plasticidade geral, emprega-se a função de plastificação  $f$  e o parâmetro de endurecimento  $k$ , um número que varia durante regimes elastoplásticos de uma forma que veremos mais adiante. Em cada instante,  $S$  é definida pela equação

$$f(\mathbf{T}) = k, \quad (1)$$

ou seja, tensões  $\mathbf{T}$  que satisfazem (1) se encontram em  $S$ . Além disso, a função  $f$  é definida de tal forma que tensões  $\mathbf{T}$  que se

encontram em  $D$  (a região interna a  $S$ ) satisfazem  $f(\mathbf{T}) < k$  (nesta teoria jamais ocorre  $f(\mathbf{T}) > k$ ).

Discutiremos em seguida as equações elástica e elastoplástica que fornecem  $\dot{\mathbf{T}}$  (a resposta instantânea do material) em função de  $\dot{\mathbf{E}}$  e  $\mathbf{T}$ , a lei de evolução de  $k$  em regime elastoplástico, como também os critérios que determinam a ocorrência de resposta elástica ou elastoplástica (conforme visto preliminarmente na seção 1).

A equação constitutiva elástica é

$$\dot{\mathbf{T}} = \mathbf{A}(\mathbf{T})[\dot{\mathbf{E}}] . \quad (2)$$

Para cada  $\mathbf{T}$ ,  $\mathbf{A}(\mathbf{T})$  é um operador linear inversível, que associa  $\dot{\mathbf{E}}$  a  $\dot{\mathbf{T}}$ . Caso  $\mathbf{A}(\mathbf{T})$  seja constante, o comportamento é de material elástico linear.

A equação constitutiva elastoplástica é

$$\dot{\mathbf{T}} = \mathbf{A}(\mathbf{T})[\dot{\mathbf{E}}] + \psi(\mathbf{T}, \dot{\mathbf{E}})\mathbf{B}(\mathbf{T}) , \quad (3)$$

em que  $\mathbf{B}$  é uma função constitutiva (que não se anula), cujos valores são matrizes simétricas, e  $\psi(\mathbf{T}, \dot{\mathbf{E}}) = \nabla f(\mathbf{T}) : \mathbf{A}(\mathbf{T})[\dot{\mathbf{E}}]$ . Note-se que, se  $\psi(\mathbf{T}, \dot{\mathbf{E}}) = 0$ , então (3) se reduz a (2). (Aqui não se aplica a restrição que foi imposta à função  $\mathbf{B}$  em Plasticidade Perfeita)

Quando a resposta é elástica,  $\dot{k} = 0$ . Portanto, em regime elástico, o parâmetro de endurecimento  $k$  permanece constante; logo permanece também inalterada a superfície de plastificação  $S$  (ver equação 1). Porém, quando a resposta é elastoplástica,  $k$  deve alterar-se de forma que  $\mathbf{T}$  permaneça sobre a superfície móvel  $S$ , isto é, deve valer  $f(\mathbf{T}) = k$  enquanto ocorre regime elastoplástico: é a

chamada *condição de consistência*. Assim, quando a resposta é elastoplástica, a velocidade de variação de  $k$  é dada por

$$\dot{k} = \frac{d}{dt} f(\mathbf{T}) = \nabla f(\mathbf{T}) : \dot{\mathbf{T}} . \quad (4)$$

Na última igualdade de (4) foi usada a regra da cadeia.

O próximo passo consiste em estabelecer os critérios que definem a ocorrência de uma ou outra resposta (ver a descrição feita na seção 1).

**Resposta elástica:**  $\dot{\mathbf{T}}$  será dado por (2) e  $\dot{k} = 0$  nas situações I e II descritas abaixo.

I)  $f(\mathbf{T}) < k$ , qualquer que seja  $\dot{\mathbf{E}}$ .

II)  $f(\mathbf{T}) = k$  e  $\psi(\mathbf{T}, \dot{\mathbf{E}}) \leq 0$ .

Como  $\psi(\mathbf{T}, \dot{\mathbf{E}})$  é o produto escalar de  $\nabla f(\mathbf{T})$  por  $\mathbf{A}(\mathbf{T})[\dot{\mathbf{E}}]$ , podemos afirmar que, se  $\psi(\mathbf{T}, \dot{\mathbf{E}}) < 0$ , então  $\dot{\mathbf{T}}$  aponta para o interior de  $S$ , e que, se  $\psi(\mathbf{T}, \dot{\mathbf{E}}) = 0$ ,  $\dot{\mathbf{T}}$  é tangente a  $S$ .

**Resposta elastoplástica:**  $\dot{\mathbf{T}}$  será dado por (3) e  $\dot{k}$  por (4) se  $f(\mathbf{T}) = k$  e  $\psi(\mathbf{T}, \dot{\mathbf{E}}) > 0$ .

Combinando (3) e (4), chegamos a

$$\dot{k} = \nabla f(\mathbf{T}) : [\mathbf{A}(\mathbf{T})[\dot{\mathbf{E}}] + \psi(\mathbf{T}, \dot{\mathbf{E}})\mathbf{B}(\mathbf{T})] = \psi(\mathbf{T}, \dot{\mathbf{E}})\mu(\mathbf{T}) , \quad (5)$$

em que se introduziu  $\mu(\mathbf{T}) = 1 + \nabla f(\mathbf{T}) : \mathbf{B}(\mathbf{T})$ . Endurecimento, amolecimento ou plastificação perfeita acontecem, respectivamente, quando  $\dot{k}$  (que é igual a  $\nabla f(\mathbf{T}) : \dot{\mathbf{T}}$ ) é positivo ( $\dot{\mathbf{T}}$  aponta para fora de S; S se expande), negativo ( $\dot{\mathbf{T}}$  aponta para dentro de S; S se contrai) ou nulo ( $\dot{\mathbf{T}}$  tangente a S ou nulo; S não se altera), o que é determinado por  $\mu(\mathbf{T})$ , já que  $\psi(\mathbf{T}, \mathbf{D}) > 0$  sempre que a resposta for elastoplástica. A equação  $\mu(\mathbf{T}) = 0$  define a *superfície de escoamento plástico*. Ela divide o espaço das tensões em duas regiões: numa delas ( $\mu(\mathbf{T}) > 0$ ) ocorre endurecimento, na outra ( $\mu(\mathbf{T}) < 0$ ), amolecimento.

A velocidade de deformação elástica  $\dot{\mathbf{E}}^e$  é definida por

$$\dot{\mathbf{E}}^e = \mathbf{A}(\mathbf{T})^{-1}[\dot{\mathbf{T}}] \quad (6)$$

(que é igual a  $\dot{\mathbf{E}}$  quando a resposta é elástica (ver a equação 2)). E a velocidade de deformação plástica, pela diferença

$$\dot{\mathbf{E}}^p = \dot{\mathbf{E}} - \dot{\mathbf{E}}^e . \quad (7)$$

Esta vale  $\mathbf{0}$  quando a resposta é elástica. Para determinar  $\dot{\mathbf{E}}^p$  em caso de resposta elastoplástica, isolamos  $\dot{\mathbf{E}}$  na equação 3 e subtraímos  $\dot{\mathbf{E}}^e$  (equação 6):

$$\dot{\mathbf{E}}^p = -\psi(\mathbf{T}, \dot{\mathbf{E}})\mathbf{A}(\mathbf{T})^{-1}[\mathbf{B}(\mathbf{T})] , \quad (8)$$

que fornece  $\dot{\mathbf{E}}^p$  em função de  $\mathbf{T}$  e  $\dot{\mathbf{E}}$  (útil, por exemplo, quando a trajetória de deformações é dada). Quando  $\mu(\mathbf{T}) \neq 0$ , com auxílio de (5) podemos escrever



$$\dot{\mathbf{E}}^p = -\frac{\nabla f(\mathbf{T}) : \dot{\mathbf{T}}}{\mu(\mathbf{T})} \mathbf{A}(\mathbf{T})^{-1} [\mathbf{B}(\mathbf{T})] , \quad (9)$$

útil quando a trajetória de tensões é dada.

Para definir um modelo em particular, basta escolher as funções  $\mathbf{A}$ ,  $f$  e  $\mathbf{B}$ . Normalmente, em vez de se especificar a função  $\mathbf{B}$ , prefere-se obtê-la a partir de uma função  $\mathbf{P}$  (às vezes introduzida como gradiente de um potencial plástico  $g$ :  $\mathbf{P} = \nabla g$ ) e de uma lei de endurecimento, estabelecida possivelmente com base experimental, que fornece a velocidade de alteração de  $k$  em função de  $\mathbf{T}$  e  $\dot{\mathbf{E}}^p$ :

$$\dot{k} = \xi(\mathbf{T}, \dot{\mathbf{E}}^p) , \quad (10)$$

Na equação acima  $\xi$  é função positiva homogênea de grau 1 em  $\dot{\mathbf{E}}^p$ . Com  $\mathbf{P}$  e  $\xi$  pode-se obter  $\mathbf{B}$ , conforme veremos a seguir.

Primeiramente, supõe-se que  $\dot{\mathbf{E}}^p$  seja, em cada instante, múltiplo positivo de  $\mathbf{P}(\mathbf{T})$ :

$$\dot{\mathbf{E}}^p = m\mathbf{P}(\mathbf{T}) \quad (11)$$

(lei de fluxo). Adotar a condição de normalidade significa escolher  $\mathbf{P} = \nabla f$ ;  $\dot{\mathbf{E}}^p$  torna-se então múltiplo positivo de  $\nabla f(\mathbf{T})$  e, portanto, é normal a  $S$  em  $\mathbf{T}$ , apontando para fora. Mostraremos a seguir a relação existente entre  $m$ ,  $\xi$  e outras grandezas já apresentadas. De (6) e (7) imediatamente decorre

$$\dot{\mathbf{T}} = \mathbf{A}(\mathbf{T})[\dot{\mathbf{E}}^e] = \mathbf{A}(\mathbf{T})[\dot{\mathbf{E}} - \dot{\mathbf{E}}^p] . \quad (12)$$

Levando-se em conta (4) e (10), resulta

$$\xi(\mathbf{T}, \dot{\mathbf{E}}^P) = \nabla f(\mathbf{T}) : \mathbf{A}(\mathbf{T})[\dot{\mathbf{E}} - \dot{\mathbf{E}}^P] . \quad (13)$$

Introduzindo-se (11), fica determinado  $m$ :

$$m = \frac{\psi(\mathbf{T}, \dot{\mathbf{E}})}{\xi(\mathbf{T}, \mathbf{P}(\mathbf{T})) + \psi(\mathbf{T}, \mathbf{P}(\mathbf{T}))} , \quad (14)$$

em que supomos ser positivo o denominador (pois  $m$  o deve ser e o numerador já o é). De (8) e (11) resulta, finalmente,

$$\mathbf{B}(\mathbf{T}) = - \frac{\mathbf{A}(\mathbf{T})[\mathbf{P}(\mathbf{T})]}{\xi(\mathbf{T}, \mathbf{P}(\mathbf{T})) + \psi(\mathbf{T}, \mathbf{P}(\mathbf{T}))} . \quad (15)$$

Notemos também que, de (4), (10) e (11), obtém-se para  $m$  a seguinte expressão, função de  $\mathbf{T}$  e  $\dot{\mathbf{T}}$ :

$$m = \frac{\nabla f(\mathbf{T}) : \dot{\mathbf{T}}}{\xi(\mathbf{T}, \mathbf{P}(\mathbf{T}))} . \quad (16)$$

## Capítulo VII

### MODELO DE VON MISES COM ENDURECIMENTO

Veremos agora um modelo baseado na teoria exposta no capítulo anterior. Trata-se de um modelo com critério de plastificação de von Mises, fluxo associado e endurecimento, e que, em regime elástico, é elástico linear. O parâmetro de endurecimento (indicado até agora pela letra  $k$ ) é, neste caso, o raio do cilindro, e por isso será simbolizado pela letra  $R$ .

Em primeiro lugar, escrevamos a equação constitutiva elástica:

$$\dot{\mathbf{T}} = \Lambda(\text{tr}\dot{\mathbf{E}})\mathbf{I} + 2G\dot{\mathbf{E}} . \quad (1)$$

Em seguida, a expressão da função de plastificação:

$$f(\mathbf{T}) = \|\mathbf{T}_d\| , \quad (2)$$

cujo gradiente é  $\nabla f(\mathbf{T}) = \mathbf{T}_d / \|\mathbf{T}_d\|$  (V.9). Quando calculado na superfície de plastificação ( $\|\mathbf{T}_d\| = R$ ), o gradiente se torna, evidentemente,

$$\nabla f(\mathbf{T}) = \frac{\mathbf{T}_d}{R} . \quad (3)$$

A lei de endurecimento adotada para este modelo é a seguinte:

$$\dot{R} = \xi_5(\mathbf{T}, \dot{\mathbf{E}}^P) = (R_M - R) \|\dot{\mathbf{E}}_d^P\| . \quad (4)$$

A constante  $R_M$  é o máximo raio que o cilindro pode ter ( $R \leq R_M$ ). No processo de endurecimento, o raio do cilindro aumenta, sem jamais ultrapassar esse valor. A superfície do cilindro máximo funciona, portanto, como superfície limite. De fato, na equação 4, enquanto for  $R < R_M$ , será  $\dot{R} > 0$  (endurecimento). Quando for  $R = R_M$ , será  $\dot{R} = 0$  e cessará o endurecimento, atingindo o material estado plástico perfeito.

As três equações seguintes são as mesmas do modelo elastoplástico perfeito de von Mises estudado no capítulo V:

$$\psi(\mathbf{T}, \dot{\mathbf{E}}) = \frac{2G}{R} \dot{\mathbf{E}} : \mathbf{T}_d , \quad (5)$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{T})[\nabla f(\mathbf{T})] = \frac{2G}{R} \mathbf{T}_d , \quad (6)$$

$$\psi(\mathbf{T}, \nabla f(\mathbf{T})) = 2G . \quad (7)$$

Além disso, de (4), com  $\nabla f(\mathbf{T}) = \mathbf{T}_d / \|\mathbf{T}_d\|$ , resulta

$$\xi(\mathbf{T}, \nabla f(\mathbf{T})) = R_M - R . \quad (8)$$

E de (VI.14):

$$m = \frac{2G}{R} \frac{\dot{\mathbf{E}} : \mathbf{T}_d}{R_M - R + 2G} . \quad (9)$$

Com isso chegamos à expressão de  $\dot{\mathbf{E}}^p$  (VI.11):

$$\dot{\mathbf{E}}^p = \frac{2G}{R^2} \frac{\dot{\mathbf{E}} : \mathbf{T}_d}{R_M - R + 2G} \mathbf{T}_d , \quad (10)$$

que, conforme já ditava a escolha do potencial plástico, é puramente desviadora ( $tr \dot{\mathbf{E}}^p = 0$ , não ocorre deformação volumétrica plástica).

Também vale, por (VI.16),

$$m = \frac{\dot{\mathbf{T}} : \mathbf{T}_d}{R(R_M - R)} \quad (11)$$

e

$$\dot{\mathbf{E}}^p = \frac{\dot{\mathbf{T}} : \mathbf{T}_d}{R(R_M - R)} \mathbf{T}_d \quad (12)$$

De (VI.15) decorre a expressão de  $\mathbf{B}(\mathbf{T})$ :

$$\mathbf{B}(\mathbf{T}) = -\frac{2G}{R} \frac{\mathbf{T}_d}{R_M - R + 2G}. \quad (13)$$

A equação constitutiva elastoplástica (VI.3) é

$$\dot{\mathbf{T}} = \Lambda(\text{tr}\dot{\mathbf{E}})\mathbf{I} + 2G\dot{\mathbf{E}} - \left(\frac{2G}{R}\right)^2 (\dot{\mathbf{E}} : \mathbf{T}_d) \frac{\mathbf{T}_d}{R_M - R + 2G}. \quad (14)$$

Notemos que, sendo  $\mu(\mathbf{T}) = 1 + \nabla f(\mathbf{T}) : \mathbf{B}(\mathbf{T})$ , então

$$\mu(\mathbf{T}) = \frac{R_M - R}{R_M - R + 2G}, \quad (15)$$

positivo se  $R < R_M$ , nulo se  $R = R_M$  ( $\mu(\mathbf{T}) = 0$  é a equação da superfície cilíndrica máxima, a superfície de escoamento plástico).

Vamos agora aplicar este modelo ao cisalhamento simples.

Suponhamos que em  $t = 0$  a matriz de tensões seja nula e a superfície de plastificação (a superfície cilíndrica) tenha raio  $R_0$  (menor que  $R_M$ ).  $\mathbf{T}$  está, portanto, inicialmente, no domínio elástico. O material é então submetido a cisalhamento simples, com distorção crescente, descrita matematicamente pela função  $t \mapsto \gamma(t)$ , definida em  $[0, \infty)$ , com  $\gamma(0) = 0$ . Em cada instante, a matriz de deformações é

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma/2 \\ 0 & \gamma/2 & 0 \end{bmatrix}, \quad (16)$$

e a matriz de velocidade de deformação:

$$\dot{\mathbf{E}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dot{\gamma}/2 \\ 0 & \dot{\gamma}/2 & 0 \end{bmatrix}. \quad (17)$$

Enquanto for elástico o regime, pela equação 1,

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tau \\ 0 & \tau & 0 \end{bmatrix}, \quad (18)$$

com  $\tau = G\gamma$  (como em II.12).

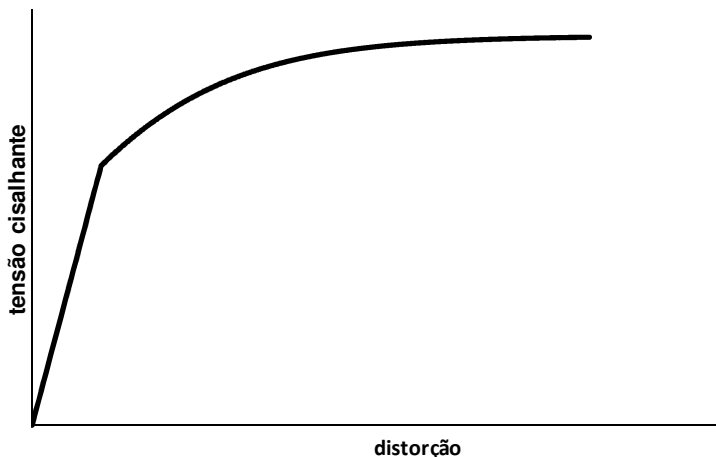
O regime será elástico enquanto  $\|\mathbf{T}_d\| \leq R_0$ . Como, neste caso,  $\|\mathbf{T}_d\| = \sqrt{2}\tau$ , será elástico o regime enquanto valer  $\tau < R_0/\sqrt{2}$ . Notemos, na figura 1, o trecho inicial elástico linear da curva  $\tau \times \gamma$ , correspondente à equação  $\tau = G\gamma$ , para  $\tau < R_0/\sqrt{2}$ . O regime elastoplástico se inicia no instante em que  $\tau = R_0/\sqrt{2}$ , pois a superfície de plastificação é atingida e  $\psi(\mathbf{T}, \dot{\mathbf{E}}) = 2G\dot{\gamma}/\sqrt{2} > 0$ . A partir de então passa a valer a equação 14, que neste caso adquire a forma simples:

$$\dot{\tau} = G \left( 1 - \frac{2G}{R_M - \sqrt{2}\tau + 2G} \right) \dot{\gamma}. \quad (19)$$

Trata-se de uma equação diferencial não-linear em  $\tau$  (função do tempo). Recordemos que a função  $\gamma$  é dada e é crescente. Uma vez integrada a equação 19, produz-se o trecho final da curva  $\tau \times \gamma$  exibido na figura, que tende assintoticamente à reta horizontal de

ordenada  $\tau_M = R_M / \sqrt{2}$ . O quociente  $\dot{\tau}(t) / \dot{\gamma}(t)$  é o coeficiente angular da reta tangente à curva elastoplástica em cada ponto. De acordo com (19), ele é sempre positivo e menor que a declividade da reta elástica; decresce com o aumento de  $\tau$ , tendendo a zero à medida que  $\tau$  tende a  $\tau_M$ .

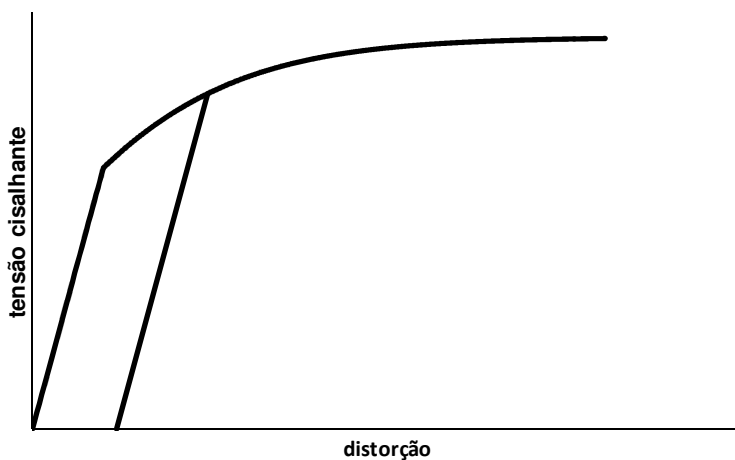
Como  $\dot{\gamma}(t) > 0$ , existe a inversa  $\gamma^{-1}$ . Podemos então construir a função  $\hat{\gamma} \mapsto \tilde{\tau}(\hat{\gamma})$  que a cada valor  $\hat{\gamma} = \gamma(t)$  associa o valor  $\tilde{\tau}(\hat{\gamma}) = \tau(t)$ . A derivada dessa função é  $\tilde{\tau}'(\hat{\gamma}) = \dot{\tau}(t) / \dot{\gamma}(t)$ , o que permite reescrever (19) como equação diferencial na incógnita  $\tilde{\tau}$ .



**Figura 1.** Cisalhamento simples com distorção monotonicamente crescente.



Na figura 2 está a curva  $\tau \times \gamma$  de um cisalhamento simples com ciclo de carregamento. Primeiramente,  $\gamma$  cresce em regime elástico até que a tensão de plastificação inicial é atingida; depois disso, cresce em regime elastoplástico até certo ponto. A partir desse ponto,  $\gamma$  decresce em regime elástico até que  $\tau$  volte a ser nula. Então  $\gamma$  volta a crescer em regime elástico até que  $\tau$  se iguale à tensão de plastificação vigente (maior que a inicial; daí o termo endurecimento), a partir de quando volta a ocorrer regime elastoplástico.



**Figura 2.** Cisalhamento simples com ciclo.



## Capítulo VIII

### MODELO CAM-CLAY

#### 1. Introdução

O Cam–Clay foi o primeiro modelo elastoplástico especialmente criado para representar o comportamento mecânico dos solos. Sua primeira versão, surgida no início da década de 1960, pode ser encontrada no livro *Critical State Soil Mechanics*, de Schofield e Wroth, publicado em 1968. Nesse mesmo ano, num trabalho de Roscoe e Burland, aparece o *Cam-Clay modificado*, com sua superfície de plastificação elipsoidal, que melhora a versão anterior. Hoje, quando se fala em Cam-Clay, refere-se usualmente ao Cam-Clay modificado. É dele que nos ocuparemos neste e no próximo capítulo. Construiremos o modelo com as equações da teoria geral estudada no capítulo VI. Resultarão equações matriciais válidas para estados gerais de tensão e deformação (equações que relacionam as matrizes  $\dot{\mathbf{T}}$ ,  $\mathbf{T}$  e  $\dot{\mathbf{E}}$ ), apropriadas para a análise de problemas de engenharia. Essas equações gerais não são normalmente encontradas nos livros sobre este tema, que se limitam a apresentar relações escalares entre invariantes, ficando por isso

restritos aos casos em que não há alteração das direções principais de tensão e deformação (ver próximo capítulo). Mas justamente por tratarem apenas de casos simples, além de discutirem mais detidamente características dos solos, os livros tradicionais são recomendados para estudo (por exemplo, *Soil Behaviour and Critical State Soil Mechanics*, de D. M. Wood).

Apesar de sua relativa simplicidade, o Cam-Clay é capaz de descrever endurecimento, amolecimento e plastificação perfeita (estado crítico) e de reproduzir razoavelmente bem, às vezes apenas qualitativamente, às vezes mesmo quantitativamente, curvas tensão-deformação típicas de ensaios triaxiais. Além de ser útil para a análise de problemas de engenharia, o Cam-Clay é uma valiosa ferramenta para o ensino de Mecânica dos Solos e para o estudo da própria teoria geral que lhe serve de base (a teoria da Plasticidade vista no capítulo VI). O Cam-Clay também tem servido como ponto de partida para o desenvolvimento de modelos mais complexos: modifica-se ou recebe novos elementos para ampliar ou corrigir sua capacidade de descrição. (Na tese [13] encontra-se uma versão do modelo que obedece ao *princípio da objetividade material* e que se aplica, em princípio, a problemas com deformações de qualquer magnitude.)

## 2. Equações gerais do modelo

Para definir o modelo com base na teoria estudada no capítulo VI, devemos apresentar as funções  $f$ ,  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$ . É o que veremos nesta seção.

Há no Cam-Clay quatro constantes características do material:  $\lambda$ ,  $\kappa$ ,  $G$  e  $M$  (letra grega *mi* maiúscula). Todas as quatro são

positivas.  $G$  é o módulo de cisalhamento elástico; tem dimensão física de tensão. As outras três são adimensionais.  $M$  é a declividade da reta de estado crítico; relaciona-se por  $M = 6\text{sen}\phi/(3 - \text{sen}\phi)$  com o ângulo de atrito efetivo  $\phi$  de um solo normalmente adensado (neste modelo a coesão efetiva nula).  $\lambda$  é a declividade (em módulo) da reta de compressão isotrópica elastoplástica no plano  $(\ln p, e)$  ( $p = -tr\mathbf{T}/3$ ;  $e$  é o índice da vazios). E  $\kappa$  é a declividade (em módulo) da reta de expansão ou compressão isotrópica elástica no plano  $(\ln p, e)$ . Sempre  $\lambda > \kappa$ . A matriz de tensões presente nas equações do modelo Cam-Clay é sempre a matriz de tensões efetivas de Terzaghi.

#### a. Função e superfície de plastificação.

A função de plastificação do Cam-Clay é dada por

$$f(\mathbf{T}) = p + \frac{q^2}{M^2 p}, \quad (1)$$

definida apenas para  $p > 0$ , sendo

$$p = \frac{-tr\mathbf{T}}{3}, \quad (2)$$

$$q = \frac{\sqrt{6}\|\mathbf{T}_d\|}{2}, \quad (3)$$

( $\mathbf{T}_d = \mathbf{T} - (tr\mathbf{T}/3)\mathbf{1}$ ; tensão desviadora).

O parâmetro de endurecimento, indicado no capítulo VI pela letra  $k$ , é no Cam-Clay simbolizado por  $p_0$ , sempre positivo. Seu significado físico ficará claro brevemente. A equação da superfície de plastificação é, portanto,  $f(\mathbf{T}) = p_0$ .

No espaço das tensões principais, a superfície de plastificação é um elipsoide de revolução, conforme verificaremos agora. A descrição da superfície de plastificação ficará mais simples se trabalharmos no espaço das tensões principais  $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ , que são positivas na compressão. Vimos no capítulo IV que a distância do ponto  $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$  ao eixo hidrostático vale  $\|\sigma_d\|$ . E que a projeção ortogonal do ponto  $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$  sobre o eixo hidrostático dista  $|tr\sigma|/\sqrt{3}$  da origem. Isso nos ajudará a identificar o elipsoide e a encontrar suas dimensões.

Introduzindo  $\sigma = -\mathbf{T}$ ,  $p = tr\sigma/3$  e  $q = \sqrt{6}\|\sigma_d\|/2$  em  $f(\mathbf{T}) = p_0$ , obtemos:

$$\frac{\left(\frac{tr\sigma}{\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{3}p_0}{2}\right)^2}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}p_0\right)^2} + \frac{\|\sigma_d\|^2}{\left(\frac{\sqrt{6}}{6}Mp_0\right)^2} = 1 . \quad (4)$$

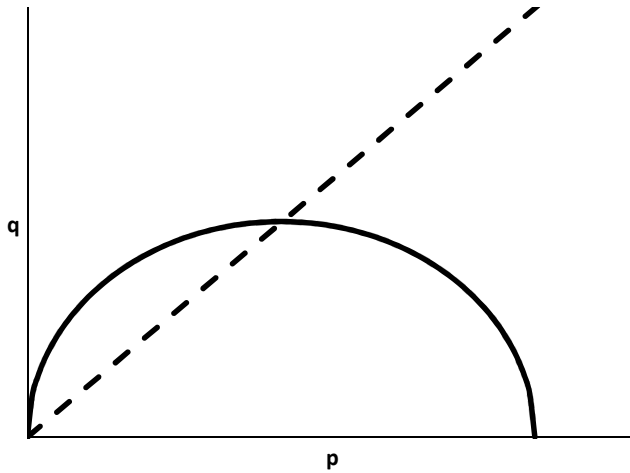
Talvez esteja claro que se trata de fato de um elipsoide. Seu eixo de revolução está contido na diagonal do espaço, estendendo-se desde a origem até o ponto  $(p_0, p_0, p_0)$ ; tem, portanto, comprimento  $\sqrt{3}p_0$ . Os eixos transversais medem  $\sqrt{6}Mp_0/3$  (diâmetro da maior circunferência transversal). Note-se que o quociente entre a medida dos eixos transversais e a medida do eixo de revolução vale  $\sqrt{2}M/3$ ; é independente de  $p_0$ .

Tanto no endurecimento ( $p_0$  crescente) como no amolecimento ( $p_0$  decrescente) a forma e a orientação do elipsoide não se alteram. Além disso, o ponto que está em  $(0,0,0)$  permanece fixo. A superfície cônica definida pela maior circunferência transversal e pela origem,  $\|\sigma_d\| = \sqrt{6} \text{Mtr}\sigma / 9$  ou  $q = Mp$  (como no critério de Drucker-Prager), denomina-se superfície de estado crítico (ou de plasticidade perfeita). Metade do elipsoide fica dentro do cone, metade fica fora.

Por ser de revolução o elipsoide, a superfície de plastificação pode ser representada no plano por uma curva de plastificação. De (1) e  $f(\mathbf{T}) = p_0$ , ou diretamente de (4), obtém-se

$$\frac{\left(p - \frac{p_0}{2}\right)^2}{\left(\frac{p_0}{2}\right)^2} + \frac{q^2}{\left(\frac{Mp_0}{2}\right)^2} = 1, \quad (5)$$

que é a equação da curva de plastificação no plano  $(p, q)$ : uma semi-elipse de eixos paralelos aos eixos coordenados, conforme mostra a figura 1 (é semi-elipse, e não elipse completa, pois, por definição,  $q$  nunca é negativo). O eixo horizontal, de medida  $p_0$ , está contido no eixo das abscissas: estende-se desde a origem até o ponto  $(p_0, 0)$ . O semi-eixo vertical mede  $Mp_0 / 2$ . A superfície de estado crítico é representada pela semi-reta de equação  $q = Mp$ , com  $p > 0$ , denominada reta de estado crítico ou de plasticidade perfeita (representada em linha tracejada na figura 1).



**Figura 1.** Curva de plastificação e reta de estado crítico (ou de plasticidade perfeita).

Por simplicidade introduzimos

$$\eta = \frac{q}{p}, \quad (6)$$

de modo que a reta de estado crítico passa a ser descrita pela equação  $\eta = M$ .

Quando ocorre endurecimento ou amolecimento, o ponto  $(p_0/2, Mp_0/2)$  move-se sobre a reta de estado crítico, subindo ou descendo, respectivamente.



No capítulo V, calculamos as derivadas de  $tr\mathbf{T}$  e  $\|\mathbf{T}_d\|^2$  em relação aos coeficientes da matriz  $\mathbf{T}$ . Com aqueles resultados, chegamos facilmente a  $\nabla f(\mathbf{T})$  no presente modelo:

$$\nabla f(\mathbf{T}) = \zeta \mathbf{I} + \theta \mathbf{T}_d, \quad (7)$$

em que

$$\zeta = \frac{1}{3} \left( \frac{\eta^2}{M^2} - 1 \right), \quad (8)$$

$$\theta = \frac{3}{pM^2}. \quad (9)$$

Notemos que, quando  $\eta = M$  (estado crítico),  $\zeta$  se anula e  $\nabla f(\mathbf{T})$  torna-se anti-esférico (isto é, tem traço nulo). Abaixo da reta de estado crítico,  $\zeta$  é negativo; acima, positivo. Já  $\theta$  é sempre positivo.

**b. Lei de endurecimento. Ocorrência de endurecimento, amolecimento ou estado crítico (estado plástico perfeito).**

A lei de endurecimento do Cam-Clay é

$$\dot{p}_0 = \xi(\mathbf{T}, \dot{\mathbf{E}}^P) = \frac{-v p_0 tr \dot{\mathbf{E}}^P}{\lambda - \kappa}, \quad (10)$$

em que  $v = 1 + e_i$ , sendo  $e_i$  o índice de vazios na configuração de referência. Deve estar claro que  $p_0$  está ligado a  $p$  e  $q$  por  $f(\mathbf{T}) = p_0$  (ver equação 1). Desse modo:

$$\dot{p}_0 = \xi(\mathbf{T}, \dot{\mathbf{E}}^P) = \frac{-\nu p}{\lambda - \kappa} \left( 1 + \frac{\eta^2}{M^2} \right) tr \dot{\mathbf{E}}^P . \quad (11)$$

Note-se por (10) que, no amolecimento ( $\dot{p}_0 < 0$ ), ocorre expansão volumétrica plástica ( $tr \dot{\mathbf{E}}^P > 0$ ), ao passo que, no endurecimento ( $\dot{p}_0 > 0$ ), ocorre contração volumétrica plástica ( $tr \dot{\mathbf{E}}^P < 0$ ). E estado plástico perfeita, ou estado crítico, ocorre com valor nulo de  $tr \dot{\mathbf{E}}^P$  e, portanto, de  $\dot{p}_0$ .

Como  $\dot{\mathbf{E}}^P = m \nabla f(\mathbf{T})$  e  $m$  é positivo,  $tr \dot{\mathbf{E}}^P$  e  $tr \nabla f(\mathbf{T})$  têm o mesmo sinal. Por (7)  $tr \nabla f(\mathbf{T}) = 3\zeta$ . Este número é positivo se  $\eta > M$ ; é negativo se  $\eta < M$ . Portanto, a ocorrência de amolecimento ou endurecimento está ligada à posição da tensão na curva de plastificação. Ocorre amolecimento quando o ponto  $(p, q)$  está na metade esquerda da curva elíptica ( $\eta > M$ ). E endurecimento ocorre se o ponto  $(p, q)$  está na metade direita da curva elíptica ( $\eta < M$ ). Estado crítico ocorre para  $\eta = M$ .

Sendo  $\dot{p}_0 = \nabla f(\mathbf{T}) : \dot{\mathbf{T}}$  (equação VI.4), verificamos imediatamente que no amolecimento  $\nabla f(\mathbf{T}) : \dot{\mathbf{T}} < 0$  e, portanto,  $\dot{\mathbf{T}}$  aponta para dentro do domínio elástico. No endurecimento, ao contrário,  $\nabla f(\mathbf{T}) : \dot{\mathbf{T}} > 0$ , e  $\dot{\mathbf{T}}$  aponta para fora do domínio elástico.

Para uso na próxima seção, com (7) calculamos

$$\nabla f(\mathbf{T}) : \dot{\mathbf{T}} = \left( 1 - \frac{\eta^2}{M^2} \right) \dot{p} + \frac{2\eta}{M^2} \dot{q} \quad (12)$$

ou

$$\nabla f(\mathbf{T}) : \dot{\mathbf{T}} = \left[ \left( 1 - \frac{\eta^2}{M^2} \right), \frac{2\eta}{M^2} \right] \cdot (\dot{p}, \dot{q}) . \quad (13)$$

Temos no segundo membro o produto escalar de dois vetores do  $R^2$ . Serve para refazermos, no plano, a interpretação geométrica do parágrafo anterior:  $[(1 - \eta^2 / M^2), 2\eta / M^2]$  é vetor normal exterior à curva de plastificação. Assim, no amolecimento  $(\dot{p}, \dot{q})$  aponta para dentro do domínio elástico; no endurecimento, para fora.

### c. Equações elástica e elastoplástica.

A equação elástica é

$$\dot{\mathbf{T}} = \mathbf{A}(\mathbf{T})[\dot{\mathbf{E}}] = \frac{vp \operatorname{tr} \dot{\mathbf{E}}}{\kappa} \mathbf{I} + 2G \dot{\mathbf{E}}_d . \quad (14)$$

(note-se que não é a equação elástica linear). Interessa também inverter a relação (14), exprimindo-se  $\dot{\mathbf{E}}^e$  (que é igual a  $\dot{\mathbf{E}}$  na resposta elástica) em função de  $\dot{\mathbf{T}}$  e  $\mathbf{T}$ :

$$\dot{\mathbf{E}}^e = \frac{-\kappa \dot{p}}{3vp} \mathbf{I} + \frac{1}{2G} \dot{\mathbf{T}}_d . \quad (15)$$

No modelo Cam-Clay,  $\psi(\mathbf{T}, \dot{\mathbf{E}})$  ( $= \nabla f(\mathbf{T}) : \mathbf{A}(\mathbf{T})[\dot{\mathbf{E}}]$ ) se torna

$$\psi(\mathbf{T}, \dot{\mathbf{E}}) = \frac{vp}{\kappa} \left( \frac{\eta^2}{M^2} - 1 \right) \operatorname{tr} \dot{\mathbf{E}} + \frac{6G}{pM^2} \operatorname{tr}(\mathbf{T}_d \dot{\mathbf{E}}_d) . \quad (16)$$

Chegaremos à função  $\mathbf{B}$  da resposta elasto-plástica através da equação VI.15, que a relaciona com as funções  $\mathbf{P}$  e  $\xi$ :  $\mathbf{B}(\mathbf{T}) = -\{\mathbf{A}(\mathbf{T})[\mathbf{P}(\mathbf{T})]\} / [\xi(\mathbf{T}, \mathbf{P}(\mathbf{T})) + \psi(\mathbf{T}, \mathbf{P}(\mathbf{T}))]$ . No Cam-Clay  $\mathbf{P} = \nabla f$  (fluxo associado). Para obter  $\mathbf{B}$  bastam então

$$\mathbf{A}(\mathbf{T})[\nabla f(\mathbf{T})] = \frac{\nu p}{\kappa} \left( \frac{\eta^2}{M^2} - 1 \right) \mathbf{I} + \frac{6G}{pM^2} \mathbf{T}_d, \quad (17)$$

$$\xi(\mathbf{T}, \nabla f(\mathbf{T})) = \frac{\nu p}{\lambda - \kappa} \left( 1 - \frac{\eta^4}{M^4} \right), \quad (18)$$

$$\psi(\mathbf{T}, \nabla f(\mathbf{T})) = \frac{\nu p}{\kappa} \left( \frac{\eta^2}{M^2} - 1 \right)^2 + \frac{12G\eta^2}{M^4}. \quad (19)$$

Dispomos já de todas as funções necessárias para o estabelecimento da equação elasto-plástica (VI.3):  $\dot{\mathbf{T}} = \mathbf{A}(\mathbf{T})[\dot{\mathbf{E}}] + \psi(\mathbf{T}, \dot{\mathbf{E}})\mathbf{B}(\mathbf{T})$ .

Com (VI.14), (16), (18) e (19) podemos obter  $m$  e, com (7), podemos encontrar a expressão de  $\dot{\mathbf{E}}^p = m \nabla f(\mathbf{T})$ .

Segundo a equação VI.16 ( $m = \nabla f(\mathbf{T}) : \dot{\mathbf{T}} / \xi(\mathbf{T}, \nabla f(\mathbf{T}))$ ), podemos exprimir  $m$  em função de  $\dot{\mathbf{T}}$  para chegar a uma expressão de  $\dot{\mathbf{E}}^p$  adequada para casos em que a trajetória de tensões é conhecida. O numerador é dado por (7) e o denominador, por (18) (só se anula se  $\eta = M$ ). Logo, para  $\eta \neq M$  (isto é, para  $\zeta \neq 0$ ):

$$\dot{\mathbf{E}}^P = \frac{3\zeta\dot{p} + 2\theta q\dot{q}/3}{\frac{-3\nu p}{\lambda - \kappa} \left(1 + \frac{\eta^2}{M^2}\right)} \left( \mathbf{I} + \frac{\theta}{\zeta} \mathbf{T}_d \right). \quad (20)$$

À medida que uma trajetória de tensão se aproxima de um ponto em que  $\eta = M$ , a norma da parte desviadora de  $\dot{\mathbf{E}}^P$  tende a infinito, enquanto a parte esférica permanece finita.  $\dot{\mathbf{E}}$  se obtém, evidentemente, da soma de  $\dot{\mathbf{E}}^P$  com  $\dot{\mathbf{E}}^e$  (dada por 15).

Com  $\dot{\mathbf{E}}^P = m\nabla f(\mathbf{T})$  e (7) calculamos facilmente  $tr\dot{\mathbf{E}}^P = 3m\zeta$  e  $\|\dot{\mathbf{E}}_d^P\| = 2m\theta q/\sqrt{6}$ . O índice de dilatância (definido apenas para  $\eta \neq 0$ ) é, portanto,

$$\frac{tr\dot{\mathbf{E}}^P}{\|\dot{\mathbf{E}}_d^P\|} = \frac{\eta^2 - M^2}{\sqrt{6}\eta}. \quad (21)$$

É positivo ou negativo, conforme seja  $\eta > M$  ou  $\eta < M$ , respectivamente. E tende a zero à medida que uma trajetória de tensão se aproxima de um ponto em que  $\eta = M$ .



## Capítulo IX

### APLICAÇÕES DO CAM-CLAY A ENSAIOS TRIAXIAIS

Para lidar com situações em que as direções principais de tensão e de deformação são as mesmas e são fixas, como no caso de ensaios triaxiais, são úteis quatro equações escalares relativamente simples que podem ser obtidas das equações gerais (VIII.15) e (VIII.20). Normalmente são essas as equações apresentadas pelos livros que tratam do modelo Cam-Clay. Juntamente com  $p$ ,  $q$ ,  $\eta$  e suas derivadas em relação ao tempo, figuram nas equações escalares tradicionais do modelo as seguintes medidas de velocidade de deformação:

$$\dot{\epsilon}_v^e = -tr\dot{\mathbf{E}}^e, \quad (1)$$

$$\dot{\epsilon}_d^e = \frac{\sqrt{6}\|\dot{\mathbf{E}}_d^e\|}{3}, \quad (2)$$

$$\dot{\epsilon}_v^p = -tr\dot{\mathbf{E}}^p, \quad (3)$$

$$\dot{\epsilon}_d^p = \frac{\sqrt{6}\|\dot{\mathbf{E}}_d^p\|}{3}. \quad (4)$$

$\dot{\epsilon}_v^e$  e  $\dot{\epsilon}_v^p$  são as velocidades de deformação volumétrica elástica e plástica (positivas na contração volumétrica). Segundo (2) e (4),  $\dot{\epsilon}_d^e$  e  $\dot{\epsilon}_d^p$  são múltiplos das velocidades escalares de distorção elástica e plástica ( $\|\dot{\mathbf{E}}_d^e\|$  e  $\|\dot{\mathbf{E}}_d^p\|$ ). O fator  $\sqrt{6}/3$  é incluído apenas para que o vetor  $(\dot{\epsilon}_v^p, \dot{\epsilon}_d^p)$  resulte normal à curva de plastificação, no ponto associado a ele, e, desta forma, permita interpretação da condição de normalidade também no plano  $(p, q)$ .

Consideremos, em primeiro lugar, problemas em que é dada a trajetória de tensões efetivas e devem ser encontradas as deformações correspondentes. Com as definições acima, e com (VIII.15) e (VIII.20), obtemos

$$\dot{\epsilon}_v^e = \frac{\kappa \dot{p}}{v p}, \quad (5)$$

$$\dot{\epsilon}_d^e = \frac{1}{3G} \dot{q}. \quad (6)$$

$$\dot{\epsilon}_v^p = \frac{\lambda - \kappa}{v} \left( \frac{\dot{p}}{p} + \frac{2\eta}{M^2 + \eta^2} \dot{\eta} \right), \quad (7)$$

$$\dot{\epsilon}_d^p = \frac{2\eta}{M^2 - \eta^2} \dot{\epsilon}_v^p. \quad (8)$$



Em (7), se conveniente, podemos introduzir  $\dot{\eta} = \dot{q} / p - \eta \dot{p} / p$ .

### Resposta elástica

Em caso de resposta elástica, (5) e (6) fornecem diretamente  $\dot{\varepsilon}_v$  e  $\dot{\varepsilon}_d$  (pois são nulos  $\dot{\varepsilon}_v^p$  e  $\dot{\varepsilon}_d^p$ ). Sendo  $\dot{\varepsilon}_v = -\dot{e} / v$  ( $e$  é o índice de índice de vazios), então

$$\dot{e} = -\kappa \frac{\dot{p}}{p}, \quad (9)$$

As equações 5, 6 e 9 podem ser integradas analiticamente (entre instantes quaisquer  $t_1$  e  $t_2$ ). Obtêm-se

$$\varepsilon_{v2} = \varepsilon_{v1} + \frac{\kappa}{v} \ln \frac{p_2}{p_1}, \quad (10)$$

$$\varepsilon_{d2} = \varepsilon_{d1} + \frac{1}{3G} (q_2 - q_1), \quad (11)$$

$$e_2 = e_1 - \kappa \ln \frac{p_2}{p_1}. \quad (12)$$

As equações 11 e 12 permitem clara interpretação física de  $G$  e  $\kappa$ . A equação 12 descreve, no plano  $(\ln p, e)$ , a reta de compressão-expansão isotrópica elástica: reta decrescente com declividade, em módulo, igual a  $\kappa$ .

## Resposta elastoplástica

Se a resposta é elastoplástica,  $\dot{\epsilon}_v = \dot{\epsilon}_v^e + \dot{\epsilon}_v^p$  e  $\dot{\epsilon}_d = \dot{\epsilon}_d^e + \dot{\epsilon}_d^p$ .  
Convém escrever explicitamente a expressão para  $\dot{\epsilon}_v$ :

$$\dot{\epsilon}_v = \frac{\lambda}{v} \frac{\dot{p}}{p} + \frac{\lambda - \kappa}{v} \frac{2\eta}{M^2 + \eta^2} \dot{\eta}. \quad (13)$$

Portanto, de  $\dot{\epsilon}_v = -\dot{e}/v$ :

$$\dot{e} = -\lambda \frac{\dot{p}}{p} - (\lambda - \kappa) \frac{2\eta}{M^2 + \eta^2} \dot{\eta}. \quad (14)$$

As equações 13 e 14 também são passíveis de integração analítica:

$$\epsilon_{v2} = \epsilon_{v1} + \frac{\lambda}{v} \ln \frac{p_2}{p_1} + \frac{\lambda - \kappa}{v} \ln \frac{M^2 + \eta_2^2}{M^2 + \eta_1^2}. \quad (15)$$

$$e_2 = e_1 - \lambda \ln \frac{p_2}{p_1} - (\lambda - \kappa) \ln \frac{M^2 + \eta_2^2}{M^2 + \eta_1^2}. \quad (16)$$

Já  $\dot{\epsilon}_d$ , por causa de  $\dot{\epsilon}_d^p$ , não pode em geral ser integrada analiticamente. Recorre-se então a integração numérica. Por exemplo, no método de Euler-Cauchy a integração se faz com a fórmula:  $\epsilon_d^p(t + \Delta t) \cong \epsilon_d^p(t) + \dot{\epsilon}_d^p(t)\Delta t$ . Para se obter  $\epsilon_d(t)$ , o valor de  $\epsilon_d^p(t)$  deve então ser somado à parte elástica,  $\epsilon_d^e(t)$ , esta integrada analiticamente.

Voltando a (16), duas situações especiais são particularmente interessantes. Em primeiro lugar, na compressão isotrópica ( $\eta = 0$  em todos os instantes) a equação 16 torna-se

$$e_2 = e_1 - \lambda \ln \frac{p_2}{p_1} . \quad (17)$$

equação de uma reta decrescente no plano  $(\ln p, e)$ : a reta de compressão isotrópica elastoplástica. (Consideremos, por exemplo, para maior clareza,  $e_1$  e  $p_1$  fixos, enquanto variam  $e_2$  e  $p_2$ ). Com isso temos direta interpretação física de  $\lambda$ . Em segundo lugar, se  $\eta_1 = 0$  (estado isotrópico) e  $\eta_2$  tende a M (estado crítico),  $e_2$ , em (16), tende a

$$e_2 = e_1 - \lambda \ln \frac{p_2}{p_1} - (\lambda - \kappa) \ln 2 , \quad (18)$$

equação de uma reta paralela à anterior, denominada reta de estado crítico no plano  $(\ln p, e)$ , cujas ordenadas são as de (17) subtraídas do número positivo  $(\lambda - \kappa) \ln 2$ .

Com as equações que acabamos de examinar, simulam-se facilmente ensaios triaxiais com trajetória de tensão controlada.

Para o que vem em seguida, convém resumir as equações válidas em cada regime na forma matricial. Definimos, em primeiro lugar:

$$\dot{\mathbf{e}}_* = \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{e}}_v \\ \dot{\mathbf{e}}_d \end{pmatrix} , \quad (19)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_* = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}, \quad (20)$$

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}_* = \begin{pmatrix} \dot{p} \\ \dot{q} \end{pmatrix}. \quad (21)$$

De forma compacta, podemos então escrever o seguinte. Para resposta elástica:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_* = \mathbf{M}^e(\boldsymbol{\sigma}_*)\dot{\boldsymbol{\sigma}}_* . \quad (22)$$

Para resposta elastoplástica:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_* = \mathbf{M}^{ep}(\boldsymbol{\sigma}_*)\dot{\boldsymbol{\sigma}}_* . \quad (23)$$

Os coeficientes das matrizes  $\mathbf{M}^e(\boldsymbol{\sigma}_*)$  e  $\mathbf{M}^{ep}(\boldsymbol{\sigma}_*)$  são

$$M_{11}^e = \frac{\kappa}{\nu p}, \quad (24)$$

$$M_{22}^e = \frac{1}{3G}, \quad (25)$$

$$M_{12}^e = M_{21}^e = 0, \quad (26)$$

$$M_{11}^{ep} = \frac{\kappa}{\nu p} + \frac{\lambda - \kappa}{\nu p} \left( \frac{M^2 - \eta^2}{M^2 + \eta^2} \right), \quad (27)$$

$$M_{22}^{ep} = \frac{1}{3G} + \frac{\lambda - \kappa}{vp} \left( \frac{4\eta^2}{M^4 - \eta^4} \right), \quad (28)$$

$$M_{12}^{ep} = M_{21}^{ep} = \frac{\lambda - \kappa}{vp} \left( \frac{2\eta}{M^2 + \eta^2} \right). \quad (29)$$

No capítulo anterior tratamos dos critérios que identificam, em casos gerais, a ocorrência de resposta elástica ou elastoplástica. Vejamos agora a especialização daqueles critérios para os casos simples que ora examinamos. Assinalaremos qual das equações, 22 ou 23, deve ser empregada em cada situação.

A) Se o ponto  $(p, q)$  está no domínio elástico:  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_* = \mathbf{M}^e(\boldsymbol{\sigma}_*)\dot{\boldsymbol{\sigma}}_*$ .

B) Se o ponto  $(p, q)$  está na curva de plastificação, distinguem-se dois casos:  $\eta < M$  ou  $\eta > M$ .

I)  $\eta < M$ .

I.1) se  $\nabla f(\mathbf{T}) : \dot{\mathbf{T}} \leq 0$ :  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_* = \mathbf{M}^e(\boldsymbol{\sigma}_*)\dot{\boldsymbol{\sigma}}_*$

I.2) se  $\nabla f(\mathbf{T}) : \dot{\mathbf{T}} > 0$ :  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_* = \mathbf{M}^{ep}(\boldsymbol{\sigma}_*)\dot{\boldsymbol{\sigma}}_*$  (endurecimento)

II)  $\eta > M$

II.1)  $\nabla f(\mathbf{T}) : \dot{\mathbf{T}} \leq 0$ : Indeterminado; duas possibilidades: ou  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_* = \mathbf{M}^e(\boldsymbol{\sigma}_*)\dot{\boldsymbol{\sigma}}_*$  ou  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_* = \mathbf{M}^{ep}(\boldsymbol{\sigma}_*)\dot{\boldsymbol{\sigma}}_*$  (amolecimento).

II.2)  $\nabla f(\mathbf{T}) : \dot{\mathbf{T}} > 0$ : Impossível.

Cabe recordar que o produto escalar  $\nabla f(\mathbf{T}) : \dot{\mathbf{T}}$  pode ser calculado por VIII.12.

Para tratar de problemas em que é dada a trajetória de deformações e devem ser determinadas as tensões efetivas correspondentes (por exemplo, no ensaio a volume constante ou no ensaio sem deformação lateral), empregamos as matrizes inversas

$$[\mathbf{M}^e]^{-1} = \begin{pmatrix} (M_{11}^e)^{-1} & 0 \\ 0 & (M_{22}^e)^{-1} \end{pmatrix}, \quad (30)$$

$$[\mathbf{M}^{ep}]^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{M}^{ep}} \begin{pmatrix} M_{22}^{ep} & -M_{12}^{ep} \\ -M_{21}^{ep} & M_{11}^{ep} \end{pmatrix}. \quad (31)$$

As equações para resposta elástica e elastoplástica são, respectivamente,

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}_* = [\mathbf{M}^e(\boldsymbol{\sigma}_*)]^{-1} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_*, \quad (32)$$

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}_* = [\mathbf{M}^{ep}(\boldsymbol{\sigma}_*)]^{-1} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_*. \quad (33)$$

Na resposta elástica, as tensões são determinadas por integração analítica; na elastoplástica, na maior parte dos casos, por integração numérica.

O emprego de cada equação será de acordo com o seguinte quadro, que é uma particularização do critério geral.

A) Se o ponto  $(p, q)$  está no domínio elástico:  $\dot{\boldsymbol{\sigma}}_* = [\mathbf{M}^e(\boldsymbol{\sigma}_*)]^{-1} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_*$

B) se o ponto  $(p, q)$  está sobre a curva de plastificação, distinguem-se dois casos:  $\psi(\mathbf{T}, \dot{\mathbf{E}}) \leq 0$  ou  $\psi(\mathbf{T}, \dot{\mathbf{E}}) > 0$ .

$$\text{I) Se } \psi(\mathbf{T}, \dot{\mathbf{E}}) \leq 0 : \dot{\boldsymbol{\sigma}}_* = [\mathbf{M}^e(\boldsymbol{\sigma}_*)]^{-1} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_*$$

$$\text{II) Se } \psi(\mathbf{T}, \dot{\mathbf{E}}) > 0 : \dot{\boldsymbol{\sigma}}_* = [\mathbf{M}^{ep}(\boldsymbol{\sigma}_*)]^{-1} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_*$$

$\psi(\mathbf{T}, \dot{\mathbf{E}})$  é dado por VIII.16. O papel de  $\psi(\mathbf{T}, \dot{\mathbf{E}})$  é responder à seguinte pergunta: caso a resposta fosse elástica, ela apontaria para dentro do domínio elástico ( $\psi(\mathbf{T}, \dot{\mathbf{E}}) < 0$ ), seria tangente à curva de plastificação ( $\psi(\mathbf{T}, \dot{\mathbf{E}}) = 0$ ), ou apontaria para fora do domínio elástico  $\psi(\mathbf{T}, \dot{\mathbf{E}}) > 0$ ? Portanto, no âmbito deste capítulo, o sinal de  $\psi(\mathbf{T}, \dot{\mathbf{E}})$  pode ser determinado pelo produto escalar (em  $\mathbb{R}^2$ ) de  $\dot{\boldsymbol{\sigma}}_* = [\mathbf{M}^e(\boldsymbol{\sigma}_*)]^{-1} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_*$  por  $[(1 - \eta^2/M^2), 2\eta/M^2]$ , que é normal exterior à curva de plastificação no ponto  $(p, q)$ .

Nos ensaios triaxiais tradicionais, corpos-de-prova cilíndricos são submetidos a deformação supostamente homogênea, que os mantém cilíndricos, alterando-lhes o raio e a altura. Sendo  $H(t)$ ,  $R(t)$  e  $V(t)$  altura, raio e volume do cilindro no instante  $t$ , definem-se as deformações axial, radial e volumétrica por  $\varepsilon_a = (H_0 - H(t))/H_0$ ,  $\varepsilon_r = (R_0 - R(t))/R_0$  e  $\varepsilon_v = (V_0 - V(t))/V_0$ . O índice 0 indica valores em  $t = 0$ . (Note-se que são positivas se há diminuição de altura, raio ou volume). As matrizes de velocidades de deformação e de tensões são

$$\dot{\mathbf{E}} = \begin{bmatrix} -\dot{\varepsilon}_a & 0 & 0 \\ 0 & -\dot{\varepsilon}_r & 0 \\ 0 & 0 & -\dot{\varepsilon}_r \end{bmatrix}. \quad (34)$$

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} -\sigma_a & 0 & 0 \\ 0 & -\sigma_r & 0 \\ 0 & 0 & -\sigma_r \end{bmatrix}, \quad (35)$$

em que figuram as tensões axial ( $\sigma_a$ ) e radial ( $\sigma_r$ ), que são positivas na compressão.

Com  $\dot{\varepsilon}_v = -tr\dot{\mathbf{E}}$ ,  $\dot{\varepsilon}_d = \sqrt{6}\|\dot{\mathbf{E}}_d^e\|/3$ ,  $p = -tr\mathbf{T}/3$  (VIII.2) e  $q = \sqrt{6}\|\mathbf{T}_d\|/2$  (VIII.3), calculamos

$$\varepsilon_v = \varepsilon_a + 2\varepsilon_r, \quad (36)$$

$$\varepsilon_d = \frac{2}{3}|\varepsilon_a - \varepsilon_r|, \quad (37)$$

$$p = \frac{\sigma_a + 2\sigma_r}{3}, \quad (38)$$

$$q = |\sigma_a - \sigma_r|. \quad (39)$$

Como exemplo de aplicação, faremos agora cálculos relativos a ensaios triaxiais.

Amostras de certo solo argiloso saturado foram isotropicamente adensadas na câmara triaxial à pressão confinante de 100 kPa. Isto é,  $\sigma_r = \sigma_a = 100$  kPa,  $p = 100$  kPa,  $q = 0$ . Nesta condição inicial o índice de vazios vale  $e_i = 1,6$ . Sendo o solo normalmente adensado, podemos supor que o ponto (100,0) esteja na curva de plastificação, mais precisamente no ponto onde a elipse encontra o eixo das abscissas. Adotaremos os seguintes valores para



os parâmetros:  $\lambda = 0,1$ ;  $\kappa = 0,03$ ;  $M = 1$  ( $\phi \cong 25^\circ$ ) e  $G = 3800$  kPa.

Em seguida, cada uma dessas amostras será submetida a uma das seguintes solicitações.

### **Grupo 1**

- a.** compressão e expansão isotrópicas.
- b.** compressão axial drenada de amostra normalmente adensada.
- c.** compressão axial drenada de amostra levemente sobreadensada.
- d.** compressão axial drenada de amostra altamente sobreadensada.

### **Grupo 2**

- e.** compressão axial não-drenada (isto é, a volume constante) de amostra normalmente adensada.
- f.** compressão axial não-drenada de amostra levemente sobreadensada.

No grupo 1, a trajetória de tensões efetivas é imposta e o problema consiste em encontrar as deformações correspondentes. O cálculo pode ser feito num programa de computador (ou planilha eletrônica), por integração numérica das equações 22 e 23, levando-se em conta os critérios apresentados depois da equação 29.

No grupo 2, a trajetória de deformações é imposta e o problema consiste em determinar a trajetória de tensões efetivas. O cálculo pode ser feito num programa, por integração numérica das equações 32 e 33, levando-se em conta os critérios que se lhes seguem.

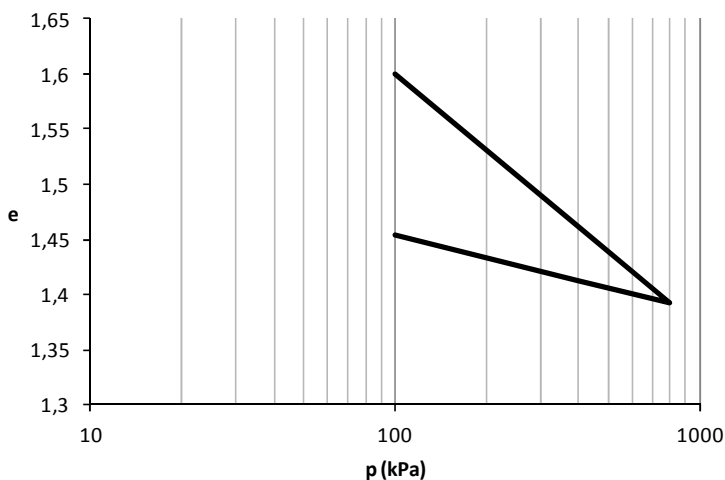
Vamos agora discutir brevemente os resultados para cada uma das sollicitações. As curvas são produzidas pelos programas citados ou, em alguns casos, por equações simples.

**a.** Compressão isotrópica até 800 kPa, seguida de expansão isotrópica até 100 kPa ( $p = \sigma_r = \sigma_a$ ,  $q = 0$ ). Figura 1.

1.<sup>a</sup> etapa:  $p$  aumenta de 100 para 800 kPa em regime elastoplástico com endurecimento (a elipse se expande).

2.<sup>a</sup> etapa:  $p$  diminui de 800 para 100 em regime elástico (a elipse permanece fixa).

Podemos empregar simplesmente as equações 17 e 12 para traçar o gráfico da figura 1.

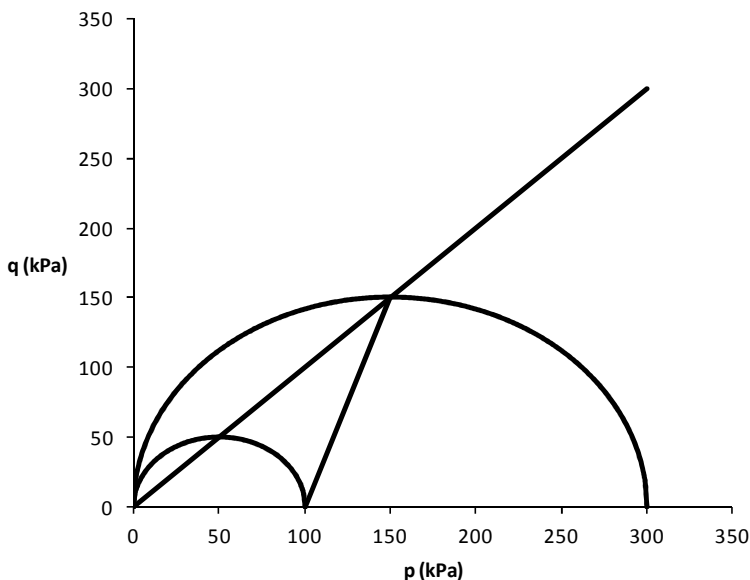


**Figura 1.** Compressão e expansão isotrópicas.

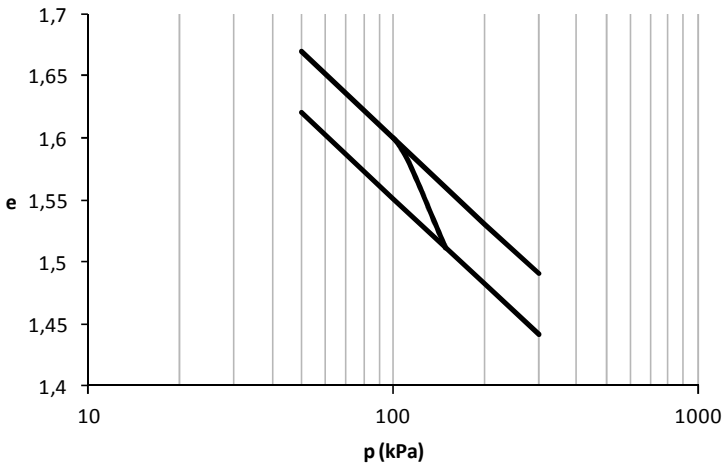
**b.** Compressão axial drenada de amostra normalmente adensada ( $\dot{\sigma}_a > 0$ ,  $\dot{\sigma}_r = 0$ ,  $\dot{q} = \dot{\sigma}_a$ ,  $\dot{q} = 3\dot{p}$ ). Figuras de 2 a 6.

O ponto  $(p, q)$  se desloca pela reta de equação  $p = 100 + q/3$ , movendo-se em direção à reta de estado crítico, em regime elastoplástico com endurecimento (a elipse se expande) (figura 2).

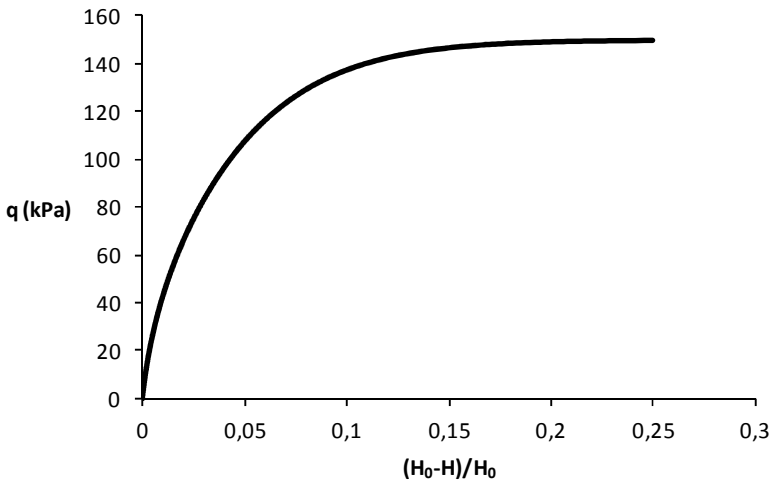
No plano  $(\ln p, e)$  o ponto descreve uma curva (figura 3) que sai da reta de compressão isotrópica elastoplástica (mais acima) e tende à reta de estado crítico (mais abaixo). O índice de vazios se reduz. A curva pode ser calculada com a equação 16.



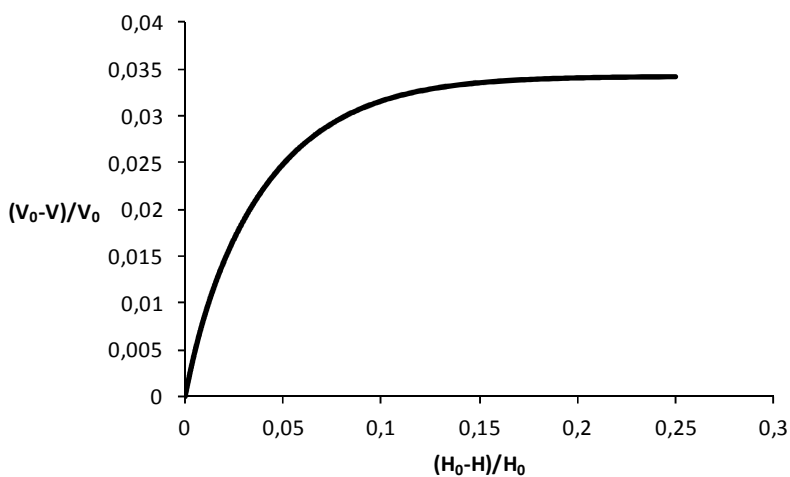
**Figura 2.** Compressão axial de amostra normalmente adensada.



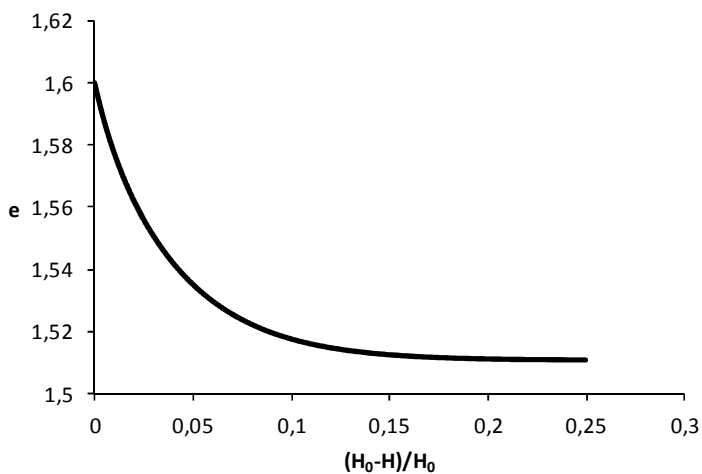
**Figura 3.** Compressão axial de amostra normalmente adensada.



**Figura 4.** Compressão axial de amostra normalmente adensada.



**Figura 5.** Compressão axial de amostra normalmente adensada.



**Figura 6.** Compressão axial de amostra normalmente adensada.

c. Expansão isotrópica até 70 kPa (leve sobreadensamento), seguida de compressão axial drenada. Figuras de 7 a 11.

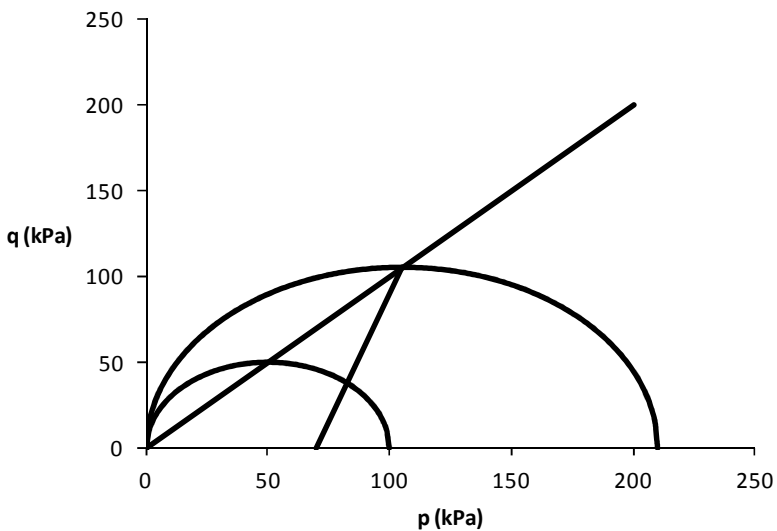
1<sup>a</sup>. etapa:  $p$  diminui de 100 para 70 kPa em regime elástico (a elipse permanece fixa). O solo se torna levemente sobreadensado.

2<sup>a</sup>. etapa (compressão axial  $\dot{\sigma}_a > 0$  e  $\dot{\sigma}_r = 0$ ; crescem  $p$  e  $q$  segundo  $\dot{q} = 3\dot{p}$ ): o ponto  $(p, q)$  trilha a reta de equação  $q = 3(p - 70)$  em regime elástico, até que a elipse seja atingida pela trajetória de tensão (até então, a elipse permanecia fixa).

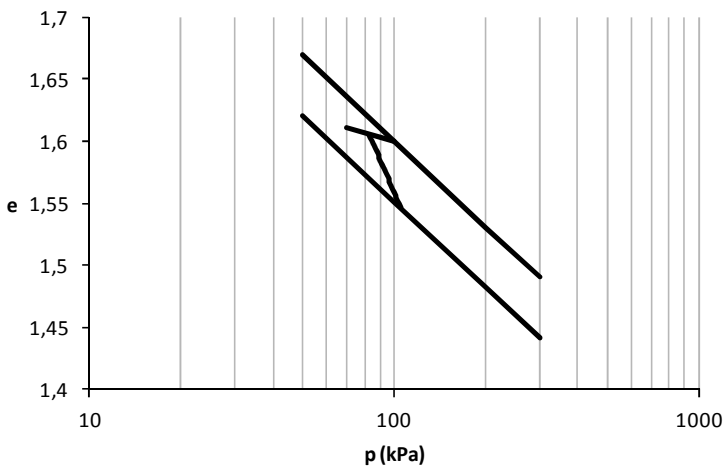
3<sup>a</sup>. etapa (continuação da compressão axial): inicia-se regime elastoplástico com endurecimento (a elipse se expande).

Note-se na figura 8 que, primeiramente, o índice de vazios cresce durante a expansão isotrópica. Depois, durante carregamento axial em regime elástico (2<sup>a</sup>. etapa),  $e$  diminui, e o ponto trilha a mesma reta seguida na expansão. Finalmente, no regime elastoplástico (3<sup>a</sup>. etapa),  $e$  diminui por uma curva mais íngreme em direção à reta de estado crítico.

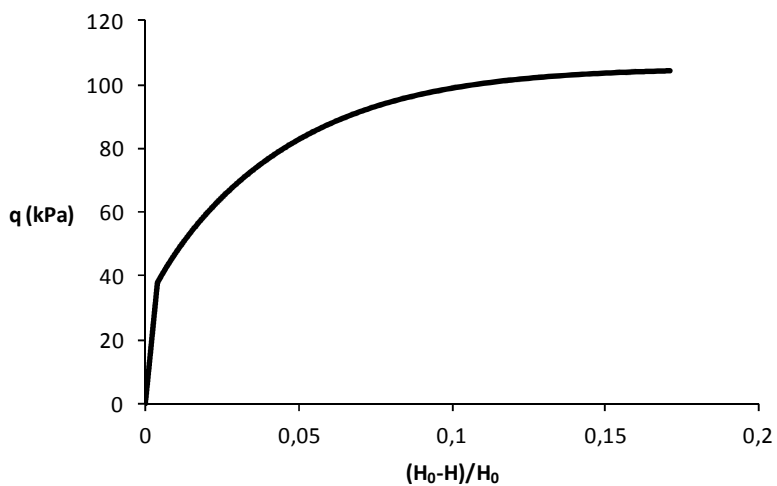
A figura 8 refere-se às três etapas; as figuras 7, 9, 10 e 11, à segunda e à terceira etapas.



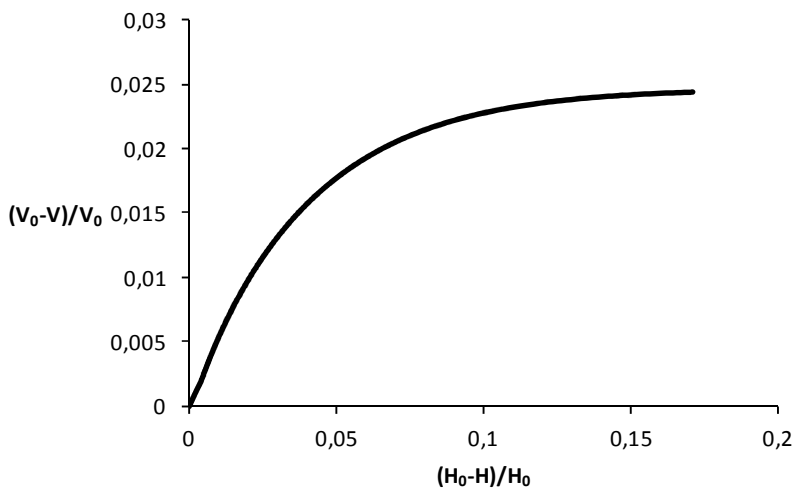
**Figura 7.** Compressão axial de amostra levemente sobreconsolidada.



**Figura 8.** Compressão axial de amostra levemente sobreconsolidada.

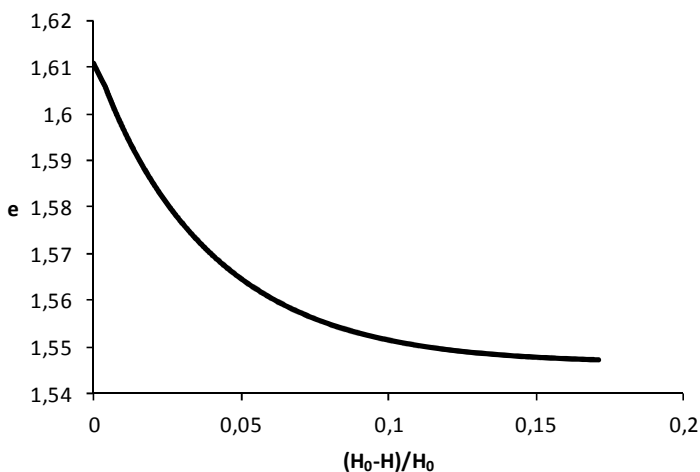


**Figura 9.** Compressão axial de amostra levemente sobreadensada.



**Figura 10.** Compressão axial de amostra levemente sobreadensada.





**Figura 11.** Compressão axial de amostra levemente sobreadensada.

**d.** Expansão isotrópica até 20 kPa (forte sobreadensamento), seguida de compressão axial drenada. Figuras de 12 a 16.

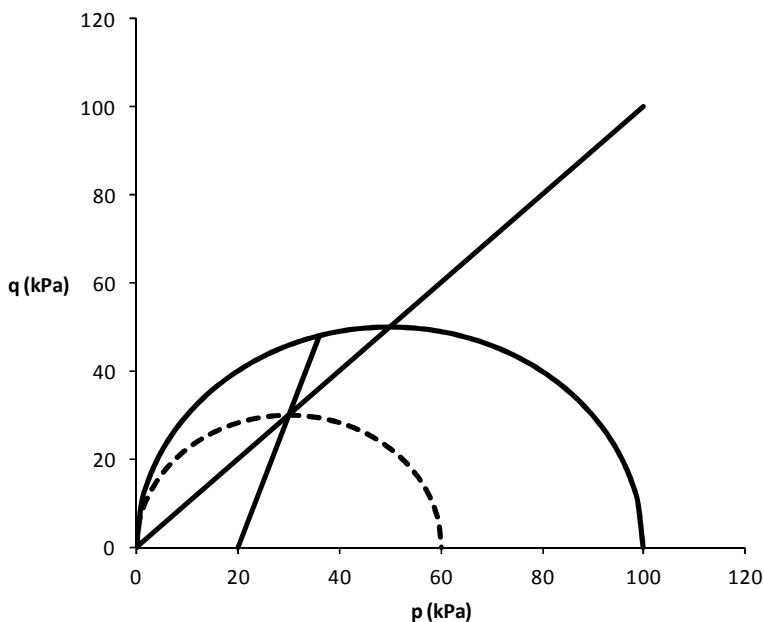
1ª. etapa:  $p$  diminui de 100 para 20 kPa em regime elástico (a elipse permanece fixa). O solo se torna altamente sobreadensado.

2ª. etapa (compressão axial  $\dot{\sigma}_a > 0$  e  $\dot{\sigma}_r = 0$ ; crescem  $p$  e  $q$  segundo  $\dot{q} = 3\dot{p}$ ): o ponto  $(p, q)$  move-se sobre a reta de equação  $q = 3(p - 20)$  em regime elástico, até que a elipse seja atingida pela trajetória de tensão (até então, a elipse permanecia fixa). Isso ocorre num ponto em que  $\eta > M$  (acima da reta de estado crítico).

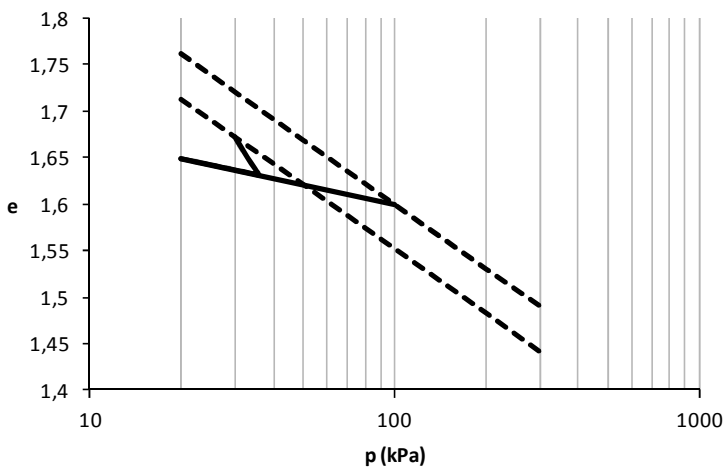
3ª. etapa: a trajetória de tensão está proibida de subir; deve então descer. Existem duas possibilidades. Ou desce em regime elástico e a elipse fica fixa, ou desce em regime elastoplástico com amolecimento e a elipse se contrai. O que determina qual dos dois acontece é a deformação que se impõe à amostra. Por exemplo, num

ensaio com deformação controlada, se a deformação axial aumenta, concluiríamos, pelo cálculo de  $\psi$ , que ocorre regime elastoplástico; se diminui, elástico. Para continuar o exemplo, suponhamos que ocorra regime elastoplástico. A elipse se contrai, com aumento de índice de vazios, e a trajetória de tensão tende à reta de estado crítico. Note-se a diminuição de  $q$  na figura 14.

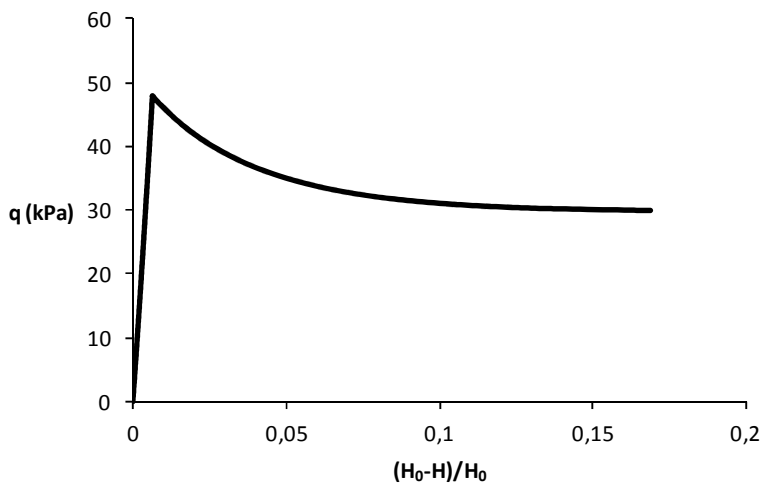
A figura 13 refere-se às três etapas; as figuras 12, 14, 15 e 16 à segunda e à terceira etapas.



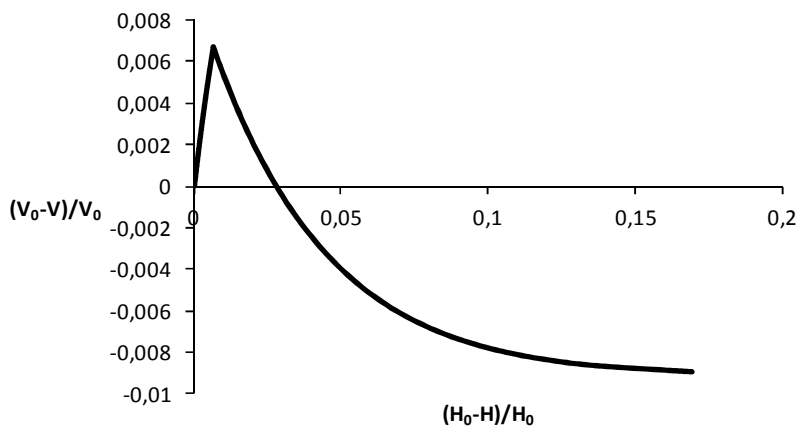
**Figura 12.** Compressão axial de amostra altamente sobreadensada.



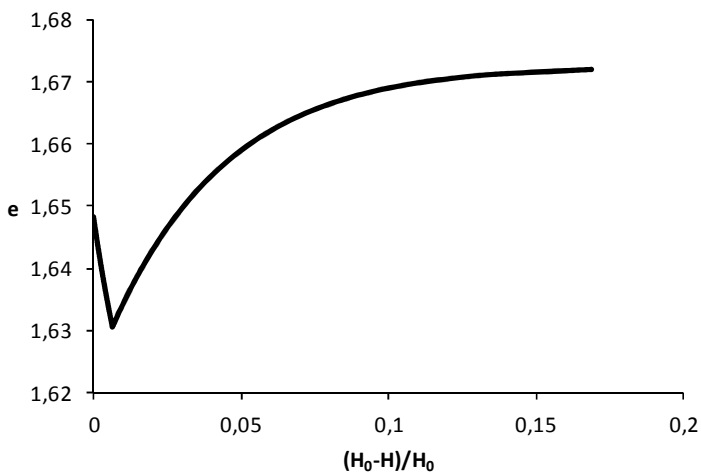
**Figura 13.** Compressão axial de amostra altamente sobreadensada.



**Figura 14.** Compressão axial de amostra altamente sobreadensada.



**Figura 15.** Compressão axial de amostra altamente sobreadensada.



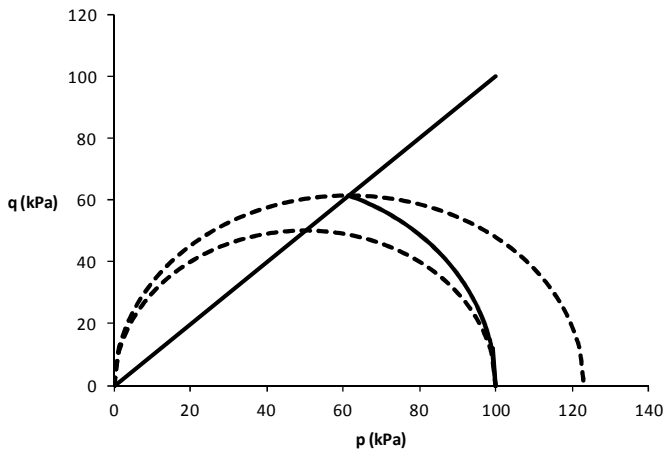
**Figura 16.** Compressão axial de amostra altamente sobreadensada.

e. Compressão axial não-drenada de amostra normalmente adensada ( $\dot{\epsilon}_a > 0$ ,  $\dot{\epsilon}_r = -\dot{\epsilon}_a / 2$ ,  $\dot{\epsilon}_v = 0$ ). Figuras de 17 a 21.

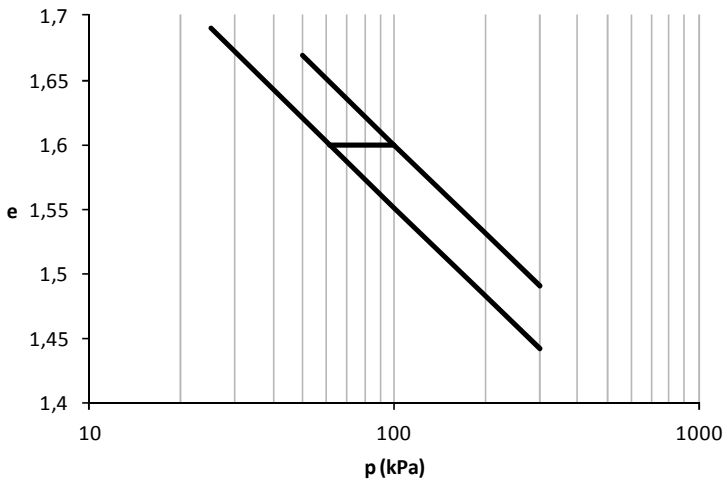
Depois do ponto de partida (em que  $\psi$  é nulo), nos demais pontos da trajetória de tensões efetivas  $\psi$  é positivo, indicando ocorrência de regime elastoplástico. No ensaio não-drenado tradicional a tensão radial total (que é igual à pressão confinante) é mantida constante, ou seja, mantém-se constante a soma da tensão radial efetiva ( $\sigma_r$ ) com a pressão neutra ( $u$ ) gerada. Em outras palavras:  $\dot{u} = -\dot{\sigma}_r$ . Calculando-se  $\dot{\sigma}_r$ , chega-se então a  $\dot{u}$ .

Podemos obter a equação da trajetória de tensões efetivas, pondo  $e_1 = e_2$  (deformação a volume constante),  $\eta_1 = 0$  e  $p_1 = 100$  na equação 16. No estado crítico, o valor de  $q$  dividido por 2 é o que se denomina *resistência não drenada* ( $s_u$ ). Assim, com  $\eta_1 = 0$ ,  $\eta_2 = q_2 / p_2 = M$  e  $q_2 = 2s_u$ , (16) fornece a relação da resistência não-drenada com a pressão à que o solo foi adensado ( $p_1$ ):

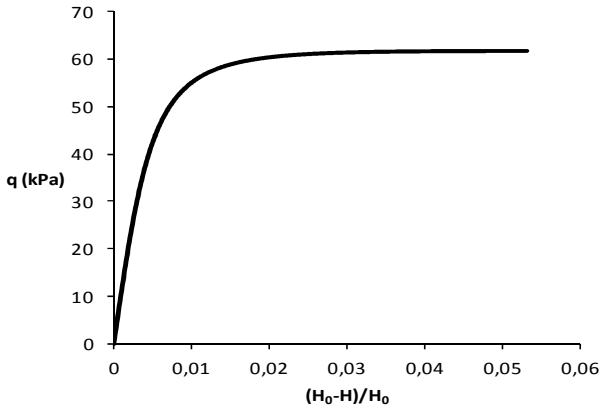
$$s_u = \frac{Mp_1}{2} 2^{-(\lambda-\kappa)/\lambda}. \quad (35)$$



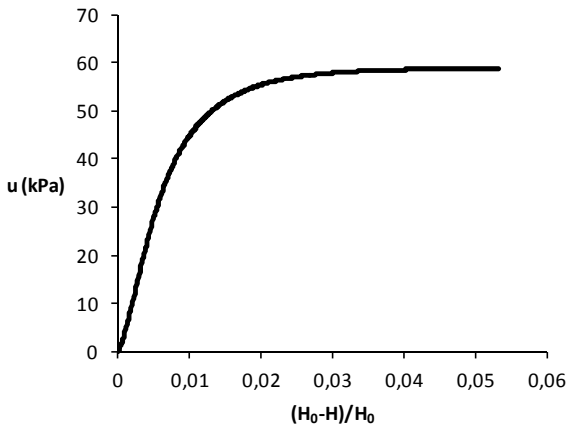
**Figura 17.** Compressão axial não-drenada de amostra normalmente adensada.



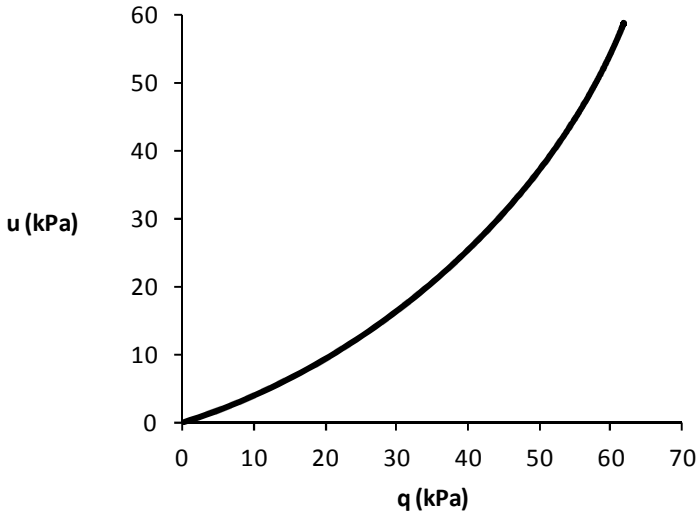
**Figura 18.** Compressão axial a volume constante de amostra normalmente adensada.



**Figura 19.** Compressão axial não-drenada de amostra normalmente adensada.



**Figura 20.** Compressão axial não-drenada de amostra normalmente adensada.



**Figura 21.** Compressão axial não-drenada de amostra normalmente adensada.

f. Expansão isotrópica até 70 kPa (leve sobreadensamento), seguida de compressão axial não-drenada. Figuras de 22 a 26.

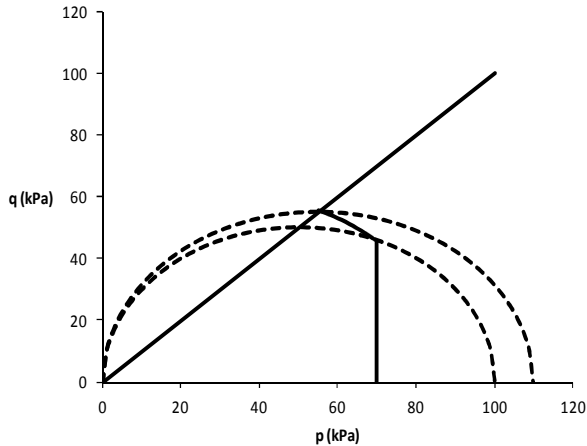
1ª. etapa:  $p$  diminui de 100 para 70 kPa em regime elástico (a elipse permanece fixa). O solo se torna levemente sobreadensado.

2ª. etapa (compressão não-drenada por carregamento axial,  $\dot{\epsilon}_a > 0$ ,  $\dot{\epsilon}_r = -\dot{\epsilon}_a / 2$ ,  $\dot{\epsilon}_v = 0$ ): a trajetória de tensões sobe em regime elástico até atingir a elipse. Sobe verticalmente, pois, em regime elástico, se  $\dot{\epsilon}_v = 0$ , então  $\dot{p} = 0$ .

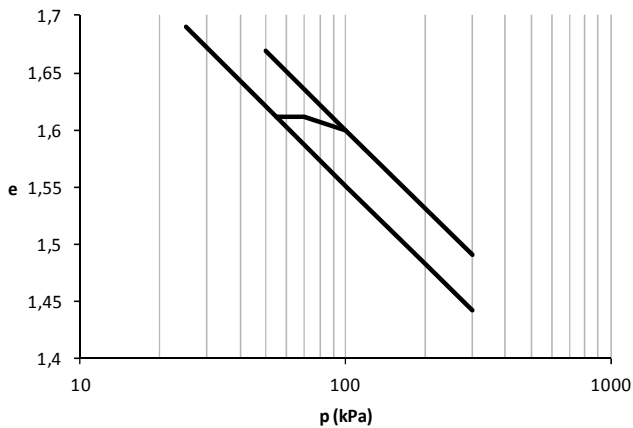
3ª. etapa (continuação da compressão axial não-drenada): inicia-se regime elastoplástico com endurecimento (a elipse se expande). Em todos os pontos da trajetória de tensões efetivas  $\psi$  é positivo.



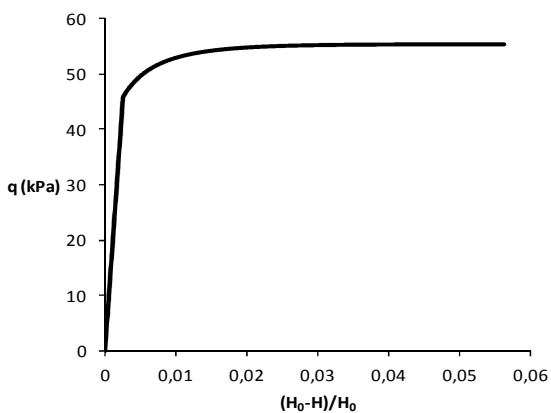
A figura 23 refere-se às três etapas; as figuras 22, 24, 25 e 26 à segunda e à terceira etapas.



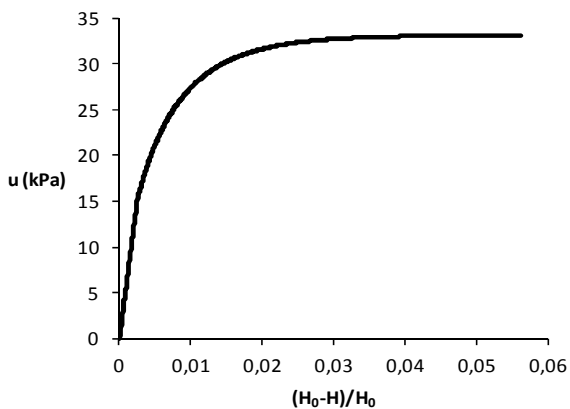
**Figura 22.** Compressão axial não-drenada de amostra levemente sobreadensada.



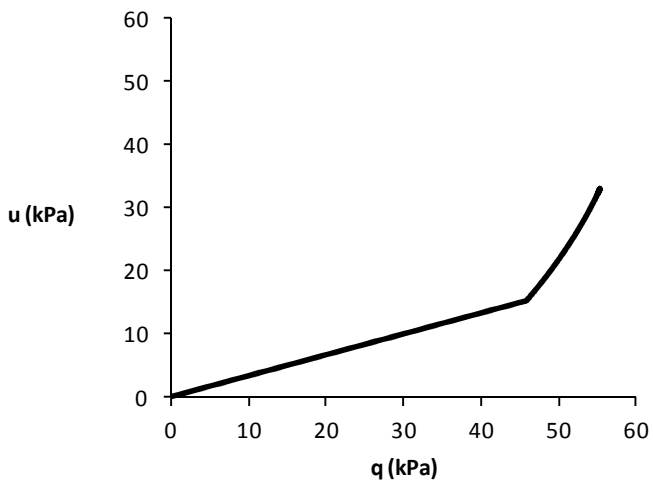
**Figura 23.** Compressão axial não-drenada de amostra levemente sobreadensada.



**Figura 24.** Compressão axial não-drenada de amostra levemente sobreadensada.



**Figura 25.** Compressão axial não-drenada de amostra levemente sobreadensada.



**Figura 26.** Compressão axial não-drenada de amostra levemente sobreadensada.



## BIBLIOGRAFIA

### *Mecânica do Contínuo e Elasticidade*

- [1] Atkin, R.J.; Fox, N. (2005). An Introduction to the Theory of Elasticity. Dover.
- [2] Gurtin, M.E. (1981). An Introduction to Continuum Mechanics. Academic Press.
- [3] Truesdell, C.A.; Toupin, R.A. (1960). The Classical Field Theories. *In: Handbuch der Physik*, v. III/1, S. Flügge, Springer.
- [4] Truesdell, C.; Noll; W. (1965). The Non-Linear Field Theories of Mechanics. *In: Handbuch der Physik*, v. III/3, S. Flügge, Springer.

### *Plasticidade*

- [5] Lubliner, J. (2008). Plasticity Theory. Dover.
- [6] Simo, J.C.; Hughes, T.J.R. (2000). Computational Inelasticity. Springer.

### *Elasticidade e Plasticidade aplicadas à Mecânica dos Solos*

- [7] Davis, R.O.; Selvadurai, A.P.S. (1996). Elasticity and Geomechanics. Cambridge University Press.

- [8] Davis, R.O.; Selvadurai, A.P.S. (2005). Plasticity and Geomechanics. Cambridge University Press.
- [9] Drucker, D.C.; Gibson, R.E.; Henkel, D.J. (1957). Soil Mechanics and Work–Hardening Theories of Plasticity. Trans. ASCE, p. 338-346.

*Modelo Cam-Clay*

- [10] Roscoe, K.H; Burland, J.B. (1968). On the generalized stress-strain behaviour of ‘wet’ clay. In: Engineering Plasticity, J. Heyman; F.A. Leckie, Cambridge University Press, pp.535-609.
- [11] Schofield, A.N.; Wroth, C.P. (1968). Critical State Soil Mechanics, McGraw-Hill.
- [12] Wood, D.M. (1990). Soil Behaviour and Critical State Soil Mechanics. Cambridge University Press.

*Plasticidade e Cam-Clay objetivos para deformações de qualquer magnitude*

- [13] Nader, J.J. (1999). Hipoplasticidade e Elastoplasticidade para Solos. Tese de Doutorado, Escola Politécnica da Universidade de São Paulo.



ISBN: 978-85-908651-2-4