Estudo Dirigido 1: Oscilações Harmônicas

1. Sendo $T = \sum_i \frac{m_i}{2}\boldsymbol{r_i^2}$ e sendo $\{q\} = q_1, q_2, ..., q_N$ as coordenadas generalizadas. Mostre que se $\frac{\partial \boldsymbol{r_i}}{\partial t} = 0$ então
$$T = \frac{1}{2}\sum_{j,k} m_{jk}\dot{q}_j\dot{q}_k$$
onde
$$m_{jk} = \sum_i m_i \frac{\partial \boldsymbol{r_i}}{\partial q_j}\frac{\partial \boldsymbol{r_i}}{\partial q_k}$$

2. Seja $V(q_1, ..., q_N)$ um potencial generalizado que tenha um mínimo local em $\{q^0\}$. Mostre que a expansão em série de Taylor resulta em:
$$V(q_1, ..., q_N) = VV(q_1^0, ..., q_N^0) + \sum_{i=1}^{N}\left[\frac{\partial V}{\partial q_i}\right]_{q^0}\left(q_i - q_i^0\right) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\left[\frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j}\right]_{q^0}\left(q_i - q_i^0\right)\left(q_j - q_j^0\right) + ...$$
Quanto vale $\left[\frac{\partial V}{\partial q_i}\right]_{q^0}$?

3. Definindo novas coordenadas $u_i = q_i - q_i^0$, mostre que até segunda ordem na expansão o potencial pode ser escrito como
$$V(u) = \frac{1}{2}\sum_{i,j} V_{ij}u_i u_j$$
onde
$$V_{ij} = \left[\frac{\partial^2 V}{\partial u_i \partial u_j}\right]_0$$

4. Mostre que a Lagrangeana, na aproximação dada, fica
$$L = \frac{1}{2}\left[\sum_{j,k} m_{jk}\dot{u}_j\dot{u}_k - \sum_{j,k} V_{jk}u_j u_k\right]$$

5. Mostre que m_{jk} pode ser expandido na forma
$$m_{jk}(q_1, ..., q_N) = m_{jk}(q_1^0, ..., q_N^0) + \sum_{l=1}^{N}\left[\frac{\partial m_{ik}}{\partial u_l}\right]_0 u_l + ...$$
mostre também que, na aproximação até segunda ordem para T, apenas o primeiro termo da expansão é relevante.

6. Com os resultados anteriores, mostre que a Lagrangeana se reduz a
$$L = \frac{1}{2}\sum_{j,k}\left[T_{jk}\dot{u}_j\dot{u}_k - V_{jk}u_j u_k\right]$$
e obtenha as equações de Lagrange.

7. Assumindo que $u_j = Re(\eta_j)$ com $\eta_j = a_j e^{i\omega t}$, mostre que as equações de Lagrange se reduzem à equação matricial
$$\left(\boldsymbol{V} - \omega^2 \boldsymbol{T}\right) a = 0$$
Como as coordenadas u_i são independentes, a solução da equação deve se dar na condição de que o determinante
$$\left|\boldsymbol{V} - \omega^2 \boldsymbol{T}\right| = 0$$
Observe que essas condições leva a uma equação algébrica de grau N, e portanto teremos N soluções ω_i^2, $i = 1, ..., N$.

8. Podemos transformar as soluções
$$\boldsymbol{\eta} = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ . \\ . \\ . \\ \eta_N \end{pmatrix}$$
em soluções
$$\boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ . \\ . \\ . \\ Q_N \end{pmatrix}$$
através de uma transformação $\boldsymbol{A}$ tal que
$$\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}$$
Mostre que das equações de Lagrange obtemos
$$\frac{1}{2}\left[\tilde{\boldsymbol{Q}}\tilde{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{V}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q} - \dot{\tilde{\boldsymbol{Q}}}\tilde{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{T}\boldsymbol{A}\dot{\boldsymbol{Q}}\right] = 0$$
e que o segundo termo do lado esquerdo é uma matriz diagonal.

9. As novas soluções $\boldsymbol{Q}$ podem ser definidas de modo que
$$\tilde{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{T}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}$$
onde $\boldsymbol{I}$ é a matriz identidade. Mostre que nesse caso também $\tilde{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{V}\boldsymbol{A}$ é uma matriz diagonal.

10. Mostre que a equação de Lagrange se reduz a
$$\tilde{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{V}\boldsymbol{A} = \omega^2 \boldsymbol{I}$$
e que para cada solução ω temos
$$V_i' Q_i^2 - \omega_i^2 Q_i^2 = 0$$
onde $V_i' = \left[\tilde{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{V}\boldsymbol{A}\right]_{ii}$ As soluções Q_i representam os modos normais de vibração.