Mecânica Clássica 2 (Sem. 2/2017): ED I- gravitação entre dois corpos pelo Método de Lagrange

Considere um sistema de dois corpos de massas m_1 e m_2.

1. Determine as posições $\mathbf{r'}_1$ e $\mathbf{r'}_2$ dos corpos no referencial do centro de massa (CM).

2. Sendo $\mathbf{R}$ a posição do centro de massa, determine a energia cinética do sistema em função de $\dot{\mathbf{R}}$, $\dot{\mathbf{r'}}_1$ e $\dot{\mathbf{r'}}_2$.

3. Agora considere $\mathbf{r}$ a posição do corpo 2 em relação ao corpo 1. Mostre que a energia cinética é

$$T = \frac{M}{2}\dot{\mathbf{R}}^2 + \frac{\mu}{2}\dot{\mathbf{r}}^2 \,. \tag{1}$$

   onde $M = m_1 + m_2$ e $\mu = m_1 m_2/M$.

   Considerando que as partículas estejam sujeitas unicamente a um potencial de interação entre elas,

4. Mostre que

$$\frac{d\dot{\mathbf{R}}}{dt} = 0 \,. \tag{2}$$

   de onde segue que o momento total $\mathbf{P} = M\dot{\mathbf{R}}$ é constante.

5. Qual o número de graus de liberdade que o problema adquire quando nos restringimos ao referencial do centro de massa?

6. Mostre que para o movimento relativo a Lagrangeana é

$$L' = \frac{\mu}{2}\left[\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right] - V(r) \,. \tag{3}$$

7. Mostre que o momento é conservado.

8. Mostre que a equação do movimento é

$$\mu\frac{d\dot{r}}{dt} = -\frac{\partial}{\partial r}\left(V + \frac{l^2}{2\mu r^2}\right) \,, \tag{4}$$

   onde $l = \mu r^2\dot{\theta}$.

   Conservação de energia

9. A partir da conservação de momento angular, mostre que a área varrida pelo raio médio da órbita é constante (Segunda Lei de Kepler).

10. Usando o momento angular l, mostre que a equação do movimento é

$$\frac{d}{dt}(\mu\dot{r}) - \frac{l^2}{\mu r^3} = -\frac{dV}{dr} \,. \tag{5}$$

11. Mostre que se $U = U(r)$ então $dU/dt = (\partial U/\partial r)\dot{r}$, mostre que

$$\frac{d}{dt}(\mu\dot{r})\dot{r} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\mu\dot{r}^2}{2}\right), \tag{6}$$

e daqui conclua a conservação de energia.

Equação diferencial da órbita

12. A partir da equação

$$\mu\ddot{r} - \frac{l^2}{\mu r^3} = -\frac{\partial V}{\partial r}, \tag{7}$$

e considerando que $\dot{r} = (dr/d\theta)\dot{\theta}$, mostre que

$$\frac{dr}{dt} = \frac{l}{\mu r^2}\frac{dr}{d\theta}. \tag{8}$$

13. Sendo $u = 1/r$, mostre que $(du/d\theta) = -(1/r^2)(dr/d\theta)$ e portanto

$$\frac{dr}{dt} = -\frac{l}{\mu}\frac{du}{d\theta}, \tag{9}$$

e portanto

$$\ddot{r} = \frac{d}{dt}\left(-\frac{l}{\mu}\frac{du}{d\theta}\right) = -\frac{l^2u^2}{\mu^2}\frac{d^2u}{d\theta^2}. \tag{10}$$

14. Mostre que a equação da órbita fica

$$\frac{l^2u^2}{\mu}\left[\frac{d^2u}{d\theta^2} + u\right] = -f(1/u), \tag{11}$$

onde $f(r) = -(\partial v/\partial r)$.

O problema de Kepler

O problema da gravitaçao envolve uma força $f(r) = -K/r^2$, portanto temos

$$\frac{l^2u^2}{\mu}\left[\frac{d^2u}{d\theta^2} + u - k\right] = 0, \tag{12}$$

onde $k = K\mu/l^2$.

15. Mostre que esta equação é a equação de um oscilador harmônica, isto é

$$\frac{d^2w}{d\theta^2} + w = 0, \tag{13}$$

e portanto a solução da equação da órbita fica

$$\frac{1}{r(\theta)} = Acos(\theta + \varphi) + \frac{K\mu}{l^2}. \tag{14}$$

16. Mostre que asolução pode ser escrita na forma de equação de uma cônica, isto é,

$$\frac{J}{r} = 1 + \varepsilon cos(\theta + \varphi)\,, \tag{15}$$

e determine J e ε.

17. Mostre que em termos da energia mecânica E temos

$$A = \frac{K\mu}{l^2}\sqrt{1 + 2l^2E/(\mu K^2)} \tag{16}$$

e

$$\varepsilon = \sqrt{1 + 2l^2E/(\mu K^2)}\,. \tag{17}$$

18. Demonstre a Terceira Lei de Kepler, isto é, mostre que

$$T^2 = \frac{4\pi^2\mu}{K}a^3\,, \tag{18}$$

onde T é o período da órbita e a é o semi-eixo maior da elípse que descreve a órbita do planeta.