Mecânica Clássica 2 (Sem. 2/2018): Lista 1

1. Suponha um sistema de N graus de liberdade, cuja lagrangiana $L(q, \dot{q}, t)$ satizfaça as equações de Euler-Lagrange. Suponha que existe um outro conjunto de coordenadas generalizadas s_1, ..., s_N, relacionado com o primeiro, por
$$q_i = q_i(s_1, ..., s_N, t)$$
Mostre que no novo sistema de coordenadas generalizadas, a Lagrangiana também satisfaz as equações de Euler-Lagrange.

2. Mostre que se $L(\dot{q}, q, t)$ satisfaz as equações de Euler-Lagrange, então
$$L_1(\dot{q}, q, t) = L(\dot{q}, q, t) + \frac{dF}{dt}$$
onde $F(q, t)$ é uma função diferencial arbitrária de q e t, também satisfaz as equações de Euler-Lagrange.

3. Uma escada encontra-se apoiada sobre uma parede vertical de modo a formar um ângulo θ com o piso horizontal. Despreze o atrito entre as superfícies e a escada. Sendo l o comprimento da escada, determine a Lagrangeana e a equação de movimento.

4. Use as equações de Lagrange para obter as equações de movimento de um pêndulo esférico, i.e. uma massa pontual suspensa por uma haste rígida não massiva.

5. Um modelo de molécula triatômica linear é formado por dois átomos de massas m ligados a um átomo central de massa M por molas de constantes elásticas iguais a k. Determine a Lagrangeana do sistema, as frequências de oscilação e os modos normais de oscilação.

6. Considere um pêndulo duplo em que um corpo de massa m é pendurado ao teto por meio de um fio ideal de comprimento $2l$. Neste corpo um outro corpo de massa m está conectado por outro fio ideal de comprimento l. Os corpos podem oscilar livremente no plano vertical e se encontram sujeitos unicamente à força gravitacional.

   a) Quantos graus de liberdade tem o sistema?

   b) Escreva as expressões para a energia cinética e para a a energia potencial.

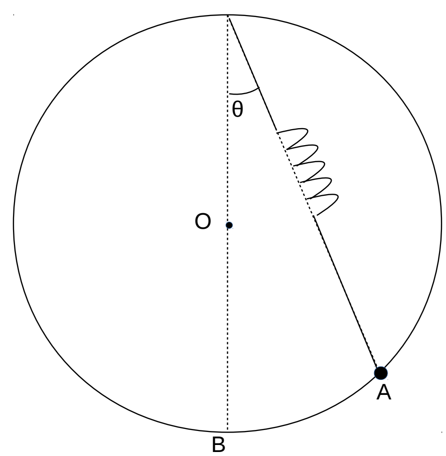
   c) Determine as matrizes $\mathbf{T}$ e $\mathbf{V}$.

   d) Determine as frequências de oscilação dos modos normais.

   e) Determine a equação das coordenadas dos modos normais.

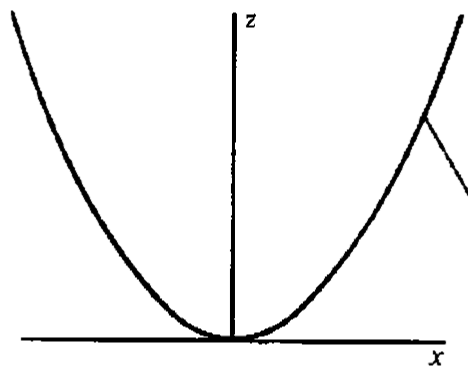
7. Segundo a teoria da força nuclear de Yukawa, a força atrativa entre dois nucleons no interior do núcleo é dada pelo potencial
$$V(r) = k\frac{e^{-\alpha r}}{r}\,.$$
   a) Encontre a lei da força nuclear.
   a) Escreva as expressões para a Lagrangeana e a Hamiltoniana.
   b) Calcule a energia total, E, e o momento angular L, se a partícula se move numa trajetória circular de raio r_o.
   a) Podemos simplesmente usar H = E = T + U para construir o Hamiltoniano do sistema? Quais condições devem ser cumpridas?
   c) Determine o período de rotação.

8. Um corpo de massa m está preso em um aro circular vertical de raio R e ao topo por uma mola de constante elástica k. Na posição relaxada da mola o corpo está no ponto mais baixo do aro, ponto B. Soltando o corpo a partir do repouso no ponto A $(\theta = \theta_0)$ pede-se:

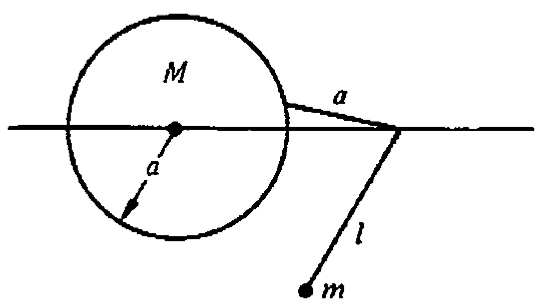


   a) A velocidade do objeto em B.
   b) Escreva a Lagrangeana do sistema.
   c) Quais as equações de movimento do sistema?
   d) Qual a frequência de oscilação para pequenos ângulos?

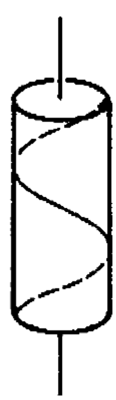
9. O ponto de suspensão de um pêndulo plano simples de comprimento l e massa m é restrito a mover-se sobre a parábola $z = ax^2$ no plano vertical. Obtenha a Hamiltoniana e as equações do movimento.



10. O ponto de suspensão de um pêndulo plano simples de comprimento l e massa m é restrito a mover-se sobre um trilho horizontal. Esse ponto é ainda conectado por uma barra sem massa de comprimento a um anel de raio a e massa M que pode girar livremente sobre seu centro fixado no trilho. Obtenha a Hamiltoniana.



11. Um cilindro uniforme de densidade ρ e raio a é montado de forma a poder rodar livremente sobre seu eixo vertical. No lado externo do cilindro um trilho espiral é fixado. Por esse trilho uma bolinha de massa m desliza sem atrito sob a ação da gravidade. Use qualquer sistema de coordenadas e encontre a Hamiltoniana do problema da bolinha + cilindro e resolva as equações de movimento.



12. Mostre que se ψ e ψ^* são dois campos independentes,a densidade Lagrangeana

$$\mathcal{L} = \frac{h^2}{8\pi^2 m}\nabla\psi\nabla\psi^* + V\psi\psi^* + \frac{h}{4\pi i}(\psi^*\dot{\psi} - \psi\dot{\psi}^*)$$

leva às equação de Schroedinger

$$-\frac{h^2}{8\pi^2 m}\nabla\psi^2 + V\psi = \frac{ih}{2\pi}\frac{\partial\psi}{\partial t}$$