Relatividade Especial

Esmerindo Bernardes[1, *]
[1]L.I.A. – Laboratório de Instrumentação Algébrica
Instituto de Física de São Carlos
Universidade de São Paulo
13560-970 São Carlos, SP, Brasil
(Dated: 18 de Setembro de 2018)

A fim de complementar as discussões feitas sobre movimento e suas leis, faremos aqui uma discussão muito breve sobre a relatividade especial, a qual corrige o modelo newtoniano para velocidades próximas à velocidade máxima permitida na nossa natureza (a velocidade da luz). Veremos também a fusão das noções de espaço e tempo por um lado e da fusão entre as noções de energia e massa por outro.

CONTENTS

I. ESPAÇO + TEMPO

I.1. Transformações de Galileu

Os dois princípios equivalentes às três leis de Newton são válidos em qualquer sistema inercial de referência. Vamos considerar então o seguinte problema de interesse prático. Suponha dois referenciais inerciais quaisquer, digamos $\mathcal{O}$ e $\bar{\mathcal{O}}$. Considere o referencial $\bar{\mathcal{O}}$ em movimento (uniforme) em relação a $\mathcal{O}$. Para simplificar um pouco, vamos supor que os eixos espaciais X, Y e Z do referencial $\mathcal{O}$ coincidam com os eixos espaciais $\bar{X}$, $\bar{Y}$ e $\bar{Z}$ do referencial $\bar{\mathcal{O}}$ em $t = \bar{t} = 0$. Vamos supor também que suas origens coincidam em $t = \bar{t} = 0$. Vamos também considerar um movimento para o referencial $\bar{\mathcal{O}}$ ao longo do eixo X, mantendo o eixo $\bar{X}$ sempre paralelo ao eixo X, com velocidade constante $\vec{V} = V\,\hat{\imath}$. Veja a Figura 1.

Muito bem. Imagine agora que algum experimento mecânico seja realizado (no vácuo) no referencial em movimento $\bar{\mathcal{O}}$. Este experimento pode ser (1) o lançamento de um objeto sob a ação da gravidade ou (2) o movimento de um corpo preso a uma mola (oscilador harmônico sem atrito) ou (3) o movimento de um corpo sob a ação da gravidade, porém preso a uma extremidade de uma haste inextensível e de massa nula com a outra extremidade fixa (pêndulo simples sem atrito), para citar apenas três possibilidades. Como os resultados desses experimentos em $\bar{\mathcal{O}}$ serão vistos no referencial em repouso $\mathcal{O}$? Todos os números serão os mesmos? As trajetórias serão as mesmas? Eventos simultâneos em $\bar{\mathcal{O}}$ serão vistos também simultaneamente no outro referencial $\mathcal{O}$? Esta última questão tem um papel fundamental nas discussões seguintes.

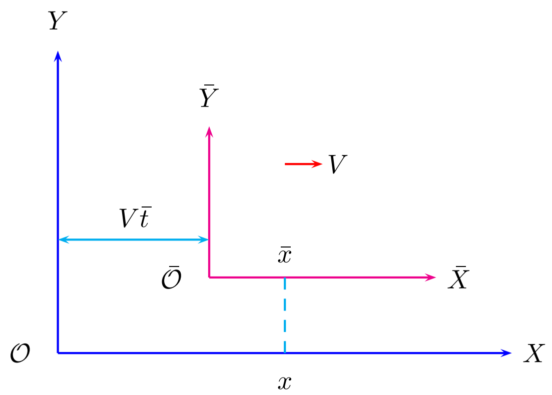

Figura 1. Transformações de coordenadas entre referenciais inerciais. A velocidade relativa entre eles é V. Os relógios foram sincronizados no momento em que os dois referenciais coincidiram.

Para respondermos estas questões, precisaremos saber primeiramente como relacionar coordenadas nestes dois referenciais. Esta relação deve cumprir uma exigência fundamental: ela deve preservar a definição de força, ou seja, o produto massa (constante) por aceleração deve ser o mesmo ou proporcionais nos dois referenciais, pois estes dois referenciais são inerciais. Isto é conhecido como o princípio da relatividade de Galileu-Newton:

Princípio 1
Todas as leis da mecânica são as mesmas em todos os sistemas inerciais de referência.

* sousa@ifsc.usp.br

Note que Galileu e Newton não ousaram incluir as demais leis físicas, além daquelas da mecânica, neste princípio. Este princípio garante a validade apenas das leis da mecânica. Portanto, se queremos aderir ao princípio da relatividade de Galileu-Newton, a única possibilidade de efetuarmos uma transformação de coordenadas que preserve a definição de força (portanto as leis da mecânica) é uma relação linear no tempo,

$$x = \gamma(\bar{x} + V\bar{t}), \tag{1}$$

quando o referencial $\bar{\mathcal{O}}$ estiver movimentando-se no sentido positivo do eixo X (veja a Figura 1), ou

$$\bar{x} = \gamma(x - Vt), \tag{2}$$

quando o referencial $\mathcal{O}$ estiver movimentando-se no sentido negativo do eixo $\bar{X}$. Note que mantivemos a mesma constante γ nestas duas relações. Isto é razoável, pois estamos considerando que o nosso espaço vazio (o palco de todos os movimentos) seja homogêneo e isotrópico. Ser homogêneo significa que a constante γ não pode depender da posição. Em um espaço isotrópico, a constante γ não pode depender nem da direção nem do sentido de qualquer vetor. Consequentemente, se γ tiver qualquer dependência com a velocidade $\vec{V}$ do referencial $\bar{\mathcal{O}}$, poderá ser apenas uma dependência em seu módulo $V = ||\vec{V}||$. Até aqui, não mencionamos qualquer relação entre t e $\bar{t}$, a não ser que $x = \bar{x}$ em $t = \bar{t} = 0$. Quem são os possíveis valores de γ?

Galileu e Newton fizeram a hipótese de que o tempo fluía uniformemente nos dois referenciais, ou seja, $t = \bar{t}$ sempre. Isto significa que o tempo é absoluto, o mesmo em todos os referenciais inerciais, ou seja, um evento que é simultâneo em um referencial inercial, o será em todos os demais. Newton acreditava também que a existência de um tempo absoluto estivesse ligado com a existência de um Deus supremo. Fazendo $t = \bar{t}$ em (1) e (2) e depois somando estes dois resultados, obteremos

$$x + \bar{x} = \gamma(x + \bar{x}) \quad \Rightarrow \quad \gamma = 1. \tag{3}$$

Também fazendo $x = \bar{x}$ em $t = \bar{t} = 0$, determinamos $\gamma = 1$.

As transformações

$$\bar{x} = x - Vt, \quad \bar{y} = y, \quad \bar{z} = z, \quad \bar{t} = t, \tag{4}$$

são conhecidas por *transformações de Galileu*. Note que derivando no tempo estas equações, obtemos a conhecida regra de composição para velocidades,

$$\bar{v}_{\bar{x}} = v_x \pm V. \tag{5}$$

Note também que as transformações de Galileu preservam a aceleração e não afetam as massas dos corpos. Consequentemente, o produto massa por aceleração é mantido invariante, ou seja a segunda lei é preservada. Naturalmente, estas transformações têm sido verificadas em todos os casos conhecidos, exceto quando o valor de V é comparável ao valor da velocidade da luz. Surpreso? Isto é realmente surpreendente!

I.2. Espaço euclidiano

Imagine um espaço quadridimensional onde um ponto é localizado pelas coordenadas (ct, x, y, z) e a distância infinitesimal entre dois pontos é dada por

$$(ds)^2 = (cdt)^2 + (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2 = \sum_{\mu,\nu=0}^{3} g_{\mu\nu}\, dx_\mu dx_\nu, \tag{6}$$

onde $x_0 = ct$. A métrica g é a identidade e a distância infinitesimal (6) é invariante mediante translações e rotações espaciais (independentes do tempo; tempo absoluto). Um espaço deste tipo é denominado de euclidiano.

Para mostrar que a distância infinitesimal (6) é um invariante perante rotações (faça o Exercício 1), considere uma rotação em torno do eixo z,

$$\bar{x} = x\cos\theta - y\sin\theta, \quad \bar{y} = x\sin\theta + y\cos\theta, \tag{7}$$

onde θ é o ângulo de rotação (medido no sentido contrário aos ponteiros de um relógio; regra da mão direita). Agora escreva a distância $d\bar{s}^2$ no referencial girado e use as transformações de Galileu (7) para passar as diferenciais para o outro referencial. Por exemplo, $d\bar{x} = dx\cos\theta - dy\sin\theta$ (θ é constante) e assim por adiante. Como as diferenciais não "enxergam" constantes, é imediato mostrar que translações não afetam a distância infinitesimal (6), pois elas apenas somam constantes às coordenadas.

No entanto, curiosamente, a distância infinitesimal (6) não é invariante perante às transformações de Galileu (4). Para ver isto, escreva a distância $d\bar{s}^2$ no referencial em movimento e use as transformações de Galileu (4) para passar as diferenciais para o outro referencial. Por exemplo, $d\bar{x} = dx - V dt$ (a velocidade relativa V é constante) e assim por adiante. Note que para (6) ser invariante às transformações de Galileu (4), teríamos de aceitar $V = 2v_x$, o que é um absurdo.

II. ESPAÇOTEMPO

II.1. Transformações de Lorentz

A discrepância entre as transformações de Galileu (4) e experimentos foi consagrada no *experimento de Michelson-Morley*, realizado pela primeira vez um pouco antes de 1900. Vejamos primeiro o que a teoria de Galileu-Newton prediz quando luz é emitida na origem do referencial $\mathcal{O}$ e observada no referencial em movimento $\bar{\mathcal{O}}$. No instante t, a luz está na posição $x = ct$ em $\mathcal{O}$. Então, no referencial $\bar{\mathcal{O}}$, ela estará em $\bar{x} = x - Vt = ct - Vt = \bar{c}\bar{t}$, segundo as transformações (4). Portanto, no referencial $\bar{\mathcal{O}}$ a luz deve ser vista com uma velocidade menor, $\bar{c} = (c - V)$. Entretanto, o experimento de Michelson-Morley diz que a velocidade da luz é a igual a c em todos os referenciais inerciais! Pronto, a confusão estava feita. Albert A. Michelson, por achar que havia alguma coisa errada em seu experimento, continuou a repeti-lo por quase 30 anos! Ele recebeu o prêmio Nobel em 1907 (por estas medidas e por ter inventando o interferômetro, um instrumento ótico de alta precisão).

No entanto, ainda em 1905, um jovem físico, até então completamente desconhecido, disse de forma arrebatedora que a nossa natureza é assim: a velocidade da luz no vácuo é independente do movimento da fonte, ou seja, ela é uma constante universal. Simples assim. E concluiu: então não poderemos ter $\gamma = 1$ e nem $\bar{t} = t$! Portanto, devemos ter $x = ct$ em $\mathcal{O}$ e $\bar{x} = c\bar{t}$ em $\bar{\mathcal{O}}$. Substituindo estes valores em (1) e (2), teremos (faça o Exercício 2)

$$ct = \gamma(c + V)\bar{t}, \quad c\bar{t} = \gamma(c - V)t, \tag{8}$$

da qual resulta (a menos de um sinal)

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = 1 + \frac{1}{2}\beta^2 + \mathcal{O}(\beta^4), \quad \beta = \frac{V}{c}. \tag{9}$$

Note que γ depende somente do módulo da velocidade relativa entre os referenciais inerciais, como previsto. A presença da velocidade da luz é uma surpresa enorme. Podemos ver então que no limite de baixa velocidade $V \ll c$, $\beta \to 0$ e $\gamma \to 1$, que é o seu valor no caso clássico (3) se escolhermos γ positivo em (9). No entanto, quando V é comparável a c, temos de usar as relações (1) e (2). Relações similares para o tempo visto nos dois referenciais podem ser obtidas eliminando-se ou x ou $\bar{x}$ em (1) e (2) (faça o Exercício 3),

$$\bar{x} = \gamma(x - \beta\, ct), \quad c\bar{t} = \gamma(ct - \beta\, x), \tag{10}$$
$$x = \gamma(\bar{x} + \beta\, c\bar{t}), \quad ct = \gamma(c\bar{t} + \beta\, \bar{x}). \tag{11}$$

com $\bar{y} = y$ e $\bar{z} = z$. Estas transformações foram apresentadas por Einstein em 1905 e são conhecidas por *transformações de Lorentz* (por motivos diferentes dos relacionados aqui e anteriores a 1905). Em (10), expressamos as coordenadas do referencial $\bar{\mathcal{O}}$ em termos das coordenadas do referencial $\mathcal{O}$. As transformações inversas (11) são obtidas simplesmente invertendo o sinal de V (e, consequentemente, de $\beta = V/c$ também).

Como as relações (10)–(11) misturam as posições espaciais com o tempo (e vice-versa), o tempo não é absoluto, como Galileu e Newton imaginaram. Isto significa que um acontecimento não precisa ser simultâneo em todos os referenciais inerciais. Isto trará consequências ainda mais surpreendentes, como veremos a seguir.

Naturalmente, as transformações (10) são idênticas às transformações (4) quando $V \ll c$ (ou $\beta \ll 1$). Este é outro exemplo onde uma teoria foi devidamente corrigida: para velocidades baixas podemos usar a mecânica Newtoniana; para velocidades altas devemos usar a mecânica Einsteiniana (ou mecânica relativística).

II.2. Espaço minkowskiano

Imagine um espaço quadridimensional onde um ponto (evento) é localizado pelas coordenadas

$$(x^\mu) = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x, y, z) = (ct, \vec{r}) \tag{12}$$

e a distância infinitesimal entre dois pontos é dada por

$$\begin{aligned}(ds)^2 &= (cdt)^2 - (dx)^2 - (dy)^2 - (dz)^2 \\ &= \sum_{\mu,\nu=0}^{3} g_{\mu\nu}\, dx^\mu dx^\nu = dx_\mu dx^\mu,\end{aligned} \tag{13}$$

onde $x^0 = ct$. A métrica $g_{\mu\nu}$ tem os seguintes elementos não-nulos (diagonal):

$$g_{00} = -g_{11} = -g_{22} = -g_{33} = 1. \tag{14}$$

Um espaço deste tipo é denominado de minkowskiano. Neste espaço, as coordenadas x^μ de um evento são denominadas de contra-variantes e as coordenadas

$$x_\mu = \sum_{\nu=0}^{3} g_{\mu\nu} x^\nu = g_{\mu\nu} x^\nu \tag{15}$$

são denominadas de co-variantes. Note a presença implícita de um somatório na última igualdade em (13) e também em (15). O sinal de somatório será omitido sempre que tivermos dois índices, um contra e outro co-variante, numa mesma expressão. A métrica (14) deve ser usada para comutarmos entre índices contra e co-variantes (diz-se da subida e descida de índices). Naturalmente, a métrica (14) deve ser usada para alterar seus próprios índices:

$$g_{\mu\alpha} g^{\alpha\nu} = g_\mu{}^\nu, \; g^{\nu\alpha} g_{\alpha\mu} = g^\nu{}_\mu, \; g_\mu{}^\nu = (g^T)^\nu{}_\mu = \delta^\nu_\mu, \tag{16}$$

onde δ^ν_μ é o delta de Kronecker,

$$\delta^\nu_\mu = \begin{cases} 1 & \text{se } \nu = \mu, \\ 0 & \text{se } \nu \neq \mu. \end{cases} \tag{17}$$

Em geral, objetos com dois índices, como a métrica (14), podem ser vistos como matrizes. O índice na esquerda será o índice das linhas e o índice na direita será o índice das colunas, independentemente se os índices são contra ou co-variantes.

As transformações de Lorentz (10)–(11) deixam a distância infinitesimal (13) invariante (faça o Exercício 4). Portanto estas transformações devem representar algum tipo de rotação. Antes porém, vamos reescrevê-las numa notação covariante:

$$\begin{aligned} x^0 = \gamma\bar{x}^0 + \beta\gamma\bar{x}^1, \; x^1 = \beta\gamma\bar{x}^0 + \gamma\bar{x}^1, \\ x^2 = \bar{x}^2, \; x^3 = \bar{x}^3. \end{aligned} \tag{18}$$

Por ser uma transformação linear entre coordenadas, melhor expresá-la na forma matricial

$$x^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu \bar{x}^\nu, \quad (\Lambda^\mu{}_\nu) = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma & 0 & 0 \\ \beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{19}$$

Fisicamente, a transformação inversa é dada pela troca $\beta \to -\beta$ aplicada à matriz (19). Qual será a forma covariante da matriz representando esta transformação inversa? Por inspeção, encontramos

$$(\Lambda_\mu{}^\nu) = (g_{\mu\alpha}\Lambda^\alpha{}_\beta g^{\beta\nu}) = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{20}$$

Esta matriz é a inversa daquela apresentada em (19). Porém, para escrevermos o produto matricial entre elas numa forma covariante, precisaremos do transposto de (20). Assim, a matriz da transformação inversa é

$$(\Lambda^{-1\mu}{}_\nu) = (\Lambda_\nu{}^\mu)^T = (g_{\nu\alpha}\Lambda^{T\alpha}{}_\beta g^{\beta\mu}) = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{21}$$

ou, removendo os índices,

$$\Lambda^{-1} = g^{-1}\Lambda^T g. \tag{22}$$

Note a semelhança (e a diferença) desta relação com uma matriz ortogonal R (representando uma rotação no espaço euclidiano), $R^{-1} = R^T = g^{-1}R^T g$ (g é a identidade no espaço euclidiano). Note também que a inversa é calculada usando uma conjugação (transformação de similaridade), um dos procedimentos mais úteis em matemática. A conjugação é equivalente a levarmos um eletrodoméstico para ser consertado numa oficina e depois o retornarmos para casa (analogia feita pelo Prof. Antônio Conde).

A transformação linear (19) representa uma "rotação" no plano $ct - x$, onde

$$\gamma = \cosh\psi,\ \beta\gamma = \operatorname{senh}\psi, \\ \cosh^2\psi - \operatorname{senh}^2\psi = 1, \tanh\psi = \beta. \tag{23}$$

Novamente, esta rotação no espaço de Minkowski, realizada por funções trigonométricas (ou circulares), lembra uma rotação no espaço euclidiano, realizadas por funções hiperbólicas. A semelhança (ou diferença) entre as funções circulares e hiperbólicas impressionam. As funções circulares representam um círculo unitário,

$$x^2 + y^2 = 1,\ x = \cos\theta,\ y = \operatorname{sen}\theta, \tag{24}$$

onde o ângulo θ é numericamente igual ao dobro da área da região delimitada pelo vetor posição (x, y), o eixo x (referência) e o arco circular compreendido. As funções hiperbólicas representam uma hipérbole unitária,

$$x^2 - y^2 = 1,\ x = \cosh\psi,\ y = \operatorname{senh}\psi, \tag{25}$$

com

$$\cosh\psi = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{\psi} + \mathrm{e}^{-\psi}),\ \operatorname{senh}\psi = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{\psi} - \mathrm{e}^{-\psi}), \tag{26}$$

onde o ângulo ψ é numericamente igual ao dobro da área da região delimitada pelo vetor posição (x, y), o eixo x (referência) e o arco hiperbólico compreendido. Desta semelhança podemos perceber o quão diferentes são estes dois espaços.

Suponha a existência de três referenciais inerciais, A, B, C, alinhados como na Figura1. O referencial A tem uma velocidade relativa a B dada por V e o referencial B tem uma velocidade relativa a C dada por U. Quem é a velocidade relativa W entre A e C em termos das velocidades U e V? Em outras palavras, a aplicação sucessiva de duas transformações de Lorentz, $A \xrightarrow{\Psi} B$ e $B \xrightarrow{\Phi} C$, é também uma transformação de Lorentz, $A \xrightarrow{\Omega} C$? Esta situação é melhor analisada em termos dos ângulos de rotação

$$\tanh\psi = \frac{V}{c},\ \tanh\phi = \frac{U}{c},\ \tanh\omega = \frac{W}{c}, \tag{27}$$

associados a cada uma desta transformações. Assim, os elementos da matriz resultante da aplicação sucessiva das transformações de Lorentz $A \xrightarrow{\Psi} B$ e $B \xrightarrow{\Phi} C$ são

$$\Omega^\mu{}_\nu(\omega) = \Psi^\mu{}_\alpha(\psi)\Phi^\alpha{}_\nu(\phi), \tag{28}$$

onde

$$(\Omega^\mu{}_\nu) = \begin{pmatrix} \cosh\omega & \sinh\omega & 0 & 0 \\ \sinh\omega & \cosh\omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ \omega = \psi + \phi. \tag{29}$$

Da lei de composição $\omega(\psi, \phi) = \psi + \phi$ em (29),

$$\tanh\omega = \tanh(\psi + \phi) = \frac{\tanh\psi + \tanh\phi}{\tanh\psi\tanh\phi + 1}, \tag{30}$$

obtemos uma relação entre as velocidades relativas correspontes,

$$W = \frac{U + V}{1 + \dfrac{UV}{c^2}}. \tag{31}$$

Note que mesmo impondo $U = V = c$, conseguimos apenas $W = c$.

O resultado em (29) mostra que a aplicação sucessiva de duas transformações de Lorentz é também uma transformação de Lorentz; ou seja, as transformações de Lorentz formam um grupo (já verificamos a existência da identidade, $\omega = 0$, e da inversa, $-\omega$). Neste caso particular, onde alinhamos os eixos dos referenciais, este grupo é abeliano (comutativo). Além disso, como a função $\omega(\psi,\phi) = \psi + \phi$ em (29) é analítica, então trata-se de um grupo de Lie. Este grupo é não-compacto, pois os ângulos hiperbólicos ψ, ϕ, ... não estão limitados superiormente. Compare este cenário com aquele das rotações em torno de um eixo (fixo): elas formam também um grupo de Lie, porém compacto.

Neste espaço da relatividade especial, o espaçotempo de Minkowski, o tempo junta-se às demais coordenadas espaciais e perde o status de absoluto. Se na mecânica newtoniana o tempo absoluto é o parâmetro natural da representação paramétrica de uma trajetória, na mecânica relativística esse parâmetro natural é o próprio comprimento s da trajetória. O comprimento de um trecho infinitesimal é dado por (13),

$$\begin{aligned}(ds)^2 = dx^\mu dx_\mu &= (cdt)^2 - (dx)^2 - (dy)^2 - (dz)^2 \\ &= (cdt)^2(1 - \frac{v^2}{c^2}) = \left[\frac{cdt}{\gamma(v)}\right]^2, \quad (32)\end{aligned}$$

onde $v = ||\vec{v}||$ é o módulo (rapidez) do vetor velocidade (de um corpo) e

$$\gamma(v) = \frac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}},\ \frac{d\gamma}{dt} = \gamma^3 \frac{\vec{v}\cdot\vec{a}}{c^2},\ \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt},\ \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}. \quad (33)$$

Embora esse corpo possa estar acelerado, podemos associar a ele um referencial inercial a cada instante, sendo v a sua velocidade relativa. No espaçotempo de Minkowski, taxas de variação em relação ao comprimento infinitesimal

$$ds = \frac{cdt}{\gamma(v)} \quad (34)$$

definem 4-velocidade e 4-aceleração,

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{ds},\ w^\mu = \frac{du^\mu}{ds} = \frac{d^2x^\mu}{ds^2}, \quad (35)$$

respectivamente, cujas componentes são (verifique)

$$(u^\mu) = \gamma\big(1, \frac{\vec{v}}{c}\big), \quad (36)$$

$$\begin{aligned}(w^\mu) &= \gamma^4 \frac{\vec{v}\cdot\vec{a}}{c^3}\big(1, \frac{\vec{v}}{c}\big) + \gamma^2\big(0, \frac{\vec{a}}{c^2}\big) \quad (37)\\ &= \gamma^3 \frac{\vec{v}\cdot\vec{a}}{c^3}(u^\mu) + \gamma^2\big(0, \frac{\vec{a}}{c^2}\big).\end{aligned}$$

Esses dois 4-vetores possuem algumas propriedades interessantes e nada intuitivas. A 4-velocidade é adimensional e unitária:

$$u^\alpha u_\alpha = \frac{dx^\alpha dx_\alpha}{ds^2} = 1. \quad (38)$$

A 4-aceleração tem dimensão de inverso de comprimento, é ortogonal à 4-velocidade,

$$u^\alpha w_\alpha = u^\alpha \frac{du_\alpha}{ds} = \frac{1}{2}\frac{d}{ds}(u^\alpha u_\alpha) = 0, \quad (39)$$

e de módulo dado por

$$w^\alpha w_\alpha = -\frac{\gamma^4}{c^4}\left[a^2 + \frac{\gamma^2}{c^2}(\vec{v}\cdot\vec{a})^2\right]. \quad (40)$$

No referencial do corpo, a sua velocidade (espacial) é nula. Portanto, de (37) sua 4-aceleração será $(\bar{w}^\mu) = (0, \vec{g}/c^2)$, cujo módulo é $\bar{w}^\mu \bar{w}_\mu = -g^2/c^4$. Suponha também que g seja constante (o equivalente de uma queda livre). Como o módulo de um 4-vetor é um invariante, então o módulo da 4-aceleração em (40) deve ser igual a $-g^2/c^4$. Sendo g constante, podemos alinhar os vetores espaciais velocidade e aceleração, $(\vec{v}\cdot\vec{a})^2 = (va)^2$ e $a = \dot{v}$, onde $\dot{v}$ significa uma derivada temporal. Neste caso, a expressão do lado direito em (40) simplifica para (verifique)

$$w^\alpha w_\alpha = -\left(\frac{\gamma^3}{c^2}\dot{v}\right)^2 = \bar{w}^\mu \bar{w}_\mu = -\left(\frac{g}{c^2}\right)^2, \quad (41)$$

onde impusemos também que este módulo é uma constante e invariante. Disto resulta a EDO

$$\frac{\dot{v}}{\left(1 - \dfrac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}} = g, \quad (42)$$

cuja solução é (verifique)

$$\gamma(v)\, v = gt,\ v(t) = \frac{gt}{\sqrt{1 + \dfrac{g^2t^2}{c^2}}}, \quad (43)$$

onde impusemos $v(0) = 0$ como condição inicial. No regime não-relativístico, $gt/c \ll 1$, recuperamos uma velocidade linear no tempo, $v = gt$, e, se formos suficientemente pacientes, poderemos ter $v > c$. No regime relativístico, mesmo tendo um tempo de vida tendendo ao infinito, o máximo que consiguiremos é $v \to c$ (verifique). Para esse caso unidimensional, $v = \dot{r}$, onde r é a distância radial (ao longo do eixo x, por exemplo). Assim podemos integrar $v(t)$ em (43) para obter como a posição varia com o tempo (verifique):

$$r(t) = \int_{t=0}^{t} v(t)dt = \frac{c^2}{g}\left(\sqrt{1 + \frac{g^2t^2}{c^2}} - 1\right). \quad (44)$$

Note que esta expressão tem ct como assímptota; é como se a aceleração desaparecesse depois de um tempo longo. Isto é condizente com o fato da velocidade (43) ter c como assímptota. Resta calcular o tempo próprio deste objeto sujeito a esta aceleração constante g. Supondo que o objeto esteja na origem de seu próprio referencial, então da invariância do intervalo (13), reescrito na forma (32),

$$ds = \frac{cdt}{\gamma(v)} = cd\tau, \quad (45)$$

podemos calcular o tempo próprio τ do objeto,

$$\tau(t) = \int_0^t \frac{dt}{\gamma(v)} = \frac{c}{g}\,\mathrm{senh}^{-1}\big(\frac{gt}{c}\big). \quad (46)$$

Esta expressão deve ser comparada com t, o tempo no nosso referencial. Em particular, após um tempo t longo, o tempo próprio tem $(c/g)\ln(2gt/c)$ como assímptota, mostrando que o tempo próprio transcorre de forma mais lenta.

III. MECÂNICA RELATIVÍSTICA

O princípio da relatividade de Galileu-Newton agora deve ser enunciado na seguinte forma:

Princípio 2 (Relatividade de Einstein)

1. Todas as leis físicas são as mesmas em todos os sistemas inerciais de referência;

2. A velocidade da luz no vácuo tem o mesmo valor em todos os sistemas inerciais.

Este princípio é conhecido como o princípio da relatividade de Einstein. Note que ele é mais geral que o princípio da relatividade de Galileu-Newton (Princípio 1), pois agora todas as leis físicas foram devidamente incluídas. Vejamos algumas previsões da mecânica relativística.

III.1. Dilatação temporal

Suponha um relógio em repouso no referencial $\bar{\mathcal{O}}$. Permanecendo sempre no mesmo lugar ($\bar{x}_1 = \bar{x}_2$), marque um determinado intervalo de tempo, $\bar{T} = \bar{t}_2 - \bar{t}_1$, usando um relógio que esteja em repouso no referencial $\bar{\mathcal{O}}$. Este intervalo de tempo medido com o relógio em repouso será denominado de tempo próprio. No outro referencial $\mathcal{O}$, aquele relógio usado para medir o tempo próprio em $\bar{\mathcal{O}}$ será visto em movimento. Portanto os dois eventos que determinaram o intervalo de tempo $\bar{T}$ serão vistos nos instantes t_1 e t_2 (em posições diferentes), correspondendo a um intervalo $T = t_2 - t_1$. Usando as transformações (11) em T, encontraremos (faça o Exercício 5)

$$T = \gamma \bar{T}. \tag{47}$$

Esta relação nos mostra que $T > \bar{T}$, ou seja, que o relógio em movimento em relação ao referencial $\mathcal{O}$, é mais lento, pois o intervalo de tempo T medido é maior. Naturalmente, os observadores solidários ao referencial $\bar{\mathcal{O}}$ chegarão à mesma conclusão a respeito de um relógio usado para medir um tempo próprio em $\mathcal{O}$. Há nenhuma contradição nisto. O tempo próprio será sempre o menor intervalo tempo e pode somente ser medido em apenas um referencial inercial. Todos os demais referenciais inercias distintos irão medir intervalos de tempo maiores, porém haverá nenhuma concordância de valores entre eles.

III.2. Contração espacial

Suponha que temos uma régua em repouso no referencial $\bar{\mathcal{O}}$ de comprimento $\bar{L} = \bar{x}_2 - \bar{x}_1$. Este é o comprimento próprio (régua em repouso). Uma vez que a régua está em repouso, a medida das posições $\bar{x}_1$ e $\bar{x}_2$ das extremidades podem ser efetuadas em tempos diferentes. No outro referencial $\mathcal{O}$, esta régua será vista em movimento, por isto a leitura de suas extremidades deverão ser efetuadas no mesmo instante de tempo ($t_1 = t_2$). Assim, o comprimento da régua medido em $\mathcal{O}$ será $L = x_2(t) - x_1(t)$. Usando as transformações (10) em $\bar{L}$, encontraremos (faça o Exercício 5)

$$L = \frac{\bar{L}}{\gamma}. \tag{48}$$

Esta relação nos mostra que $L < \bar{L}$, pois $\gamma > 1$. Portanto, a régua em $\bar{\mathcal{O}}$ será vista com um comprimento menor no outro referencial $\mathcal{O}$. Este resultado é conhecido por contração espacial. Naturalmente, os observadores solidários ao referencial $\bar{\mathcal{O}}$ chegarão à mesma conclusão a respeito de uma régua usada para medir um comprimento próprio em $\mathcal{O}$. Novamente, há nenhuma contradição nisto. O comprimento próprio será sempre o maior comprimento próprio e pode somente ser medido em apenas um referencial inercial. Todos os demais referenciais inercias distintos irão medir comprimentos menores, porém haverá nenhuma concordância de valores entre eles.

Naturalmente, estas previsões estão confirmadas em experimentos usando partículas elementares em aceleradores de partículas (para saber mais sobre partículas elementares, consulte Aventuras das Partículas, mantido pelo Instituto de Física Teórica (IFT), Unesp). Em particular, visite o site Experimento com Múons.

III.3. Adição de velocidades

Que acontece se um determinado corpo estiver movendo-se na velocidade da luz c (como a própria luz), digamos em $\mathcal{O}$? A velocidade dele será diferente de c em $\bar{\mathcal{O}}$? Vejamos. A componente x da velocidade deste corpo em $\mathcal{O}$ é definida como $v_x = dx/dt$, ou seja, a razão entre as diferenciais dx e dt. Então, usando as transformações (10)–(11), teremos

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{d\bar{x} + \beta\, c d\bar{t}}{d\bar{t} + \frac{\beta}{c}\, d\bar{x}} = \frac{\bar{v}_{\bar{x}} + V}{1 + \frac{V \bar{v}_{\bar{x}}}{c^2}}. \tag{49}$$

Fazendo o mesmo para as demais componentes, teremos

$$v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{\bar{v}_{\bar{y}}}{\gamma\left(1 + \frac{V\bar{v}_{\bar{x}}}{c^2}\right)}, \tag{50}$$

$$v_z = \frac{dz}{dt} = \frac{\bar{v}_{\bar{z}}}{\gamma\left(1 + \frac{V\bar{v}_{\bar{x}}}{c^2}\right)}. \tag{51}$$

Note que $v_x = c$ implica em $\bar{v}_{\bar{x}} = c$. A regra relativística de composição de velocidades (49)–(51) nunca fornece uma velocidade relativa maior que a velocidade da luz.

III.4. Relação entre massa e energia

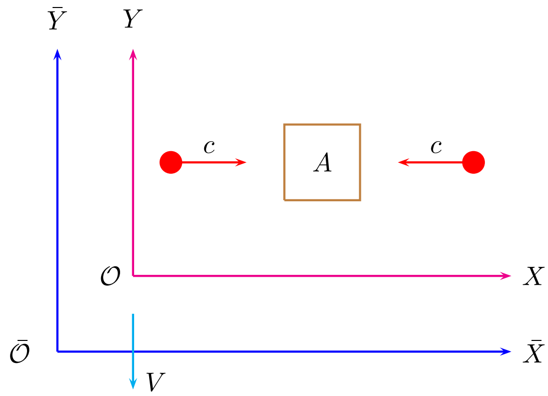

Figura 2. Colisão entre um corpo A e dois fótons vista por dois referenciais inerciais em movimento relativo com $V \ll c$. O corpo A está em repouso no referencial $\mathcal{O}$ e tem massa M neste referencial.

Há ainda outras revelações extraordinárias, mas por falta de espaço, ficarão para uma outra oportunidade. Entretanto, deve ser mencionado que Einstein também descobriu uma relação entre massa e energia, $\Delta E = \Delta mc^2$. Tudo que tem massa, possui esta energia armazenada. Até a descoberta desta relação, acreditava-se na conservação da energia e da massa separadamente. Hoje sabemos que massa e energia são manifestações de uma mesma quantidade física (ainda sem nome!). Seguindo o próprio Einstein, é instrutivo realizarmos uma derivação elementar desta equivalência entre massa e energia. Consideremos um sistema como ilustrado na Figura 2. O corpo A está em repouso no referencial $\mathcal{O}$ e tem massa M. Neste mesmo referencial, observamos dois fótons (luz) movendo-se na mesma direção mas em sentidos opostos, os quais serão absorvidos pelo corpo A. Supondo que cada fóton tenha uma energia igual a $\mathcal{E}/2$, o corpo A terá sua energia aumentada por $\Delta E = \mathcal{E}$.

O fóton é uma partícula curiosa, pois ele não tem carga elétrica e nem massa de repouso, isto é, um fóton parado em algum referencial inercial teria massa nula. No entanto ele só pode estar em movimento! Mas como, se ele não tem massa? Mesmo não tendo massa, o fóton pode ter então uma quantidade de movimento não-nula! O momentum linear do fóton é a sua energia dividida pela velocidade da luz (no vácuo). Devemos lembrar que o fóton carrega a menor quantidade de energia em um feixe luminoso. Esta energia depende apenas da frequência ν da luz e da constante de Planck $h = 6.626 \times 10^{-34}$ J s, $\mathcal{E} = h\nu$. Por isso ele é denominado de *quantum* de luz (ou da radiação eletromagnética). O fóton foi descoberto por Max Planck em 1900 (Planck recebeu o prêmio Nobel em 1918 por esta descoberta). Coube a Einstein esclarecer a natureza corpuscular (composta de muitos fótons) da luz em 1905 (ele recebeu o prêmio Nobel em 1921, por esta e outras contribuições à física teórica).

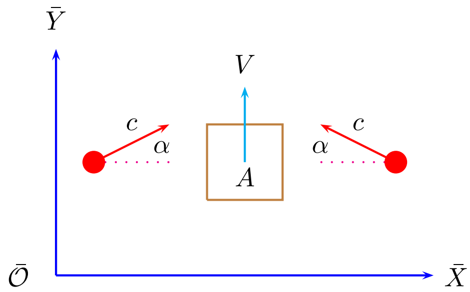

Figura 3. Colisão entre um corpo A e dois fótons vista pelo referencial inercial em movimento $\bar{\mathcal{O}}$ com $V \ll c$.

De volta ao nosso experimento: uma colisão entre três corpos, onde um dos corpos (o corpo A) absorve dois fótons. Estes três corpos estão isolados. Portanto, de acordo com a segunda lei (princípio 2 do Cap. 2) há conservação do momentum linear. Como o momentum linear é um vetor, devemos olhar para as três direções em cada referencial. No referencial $\mathcal{O}$ onde o corpo A está em repouso, a componente no eixo X do momentum linear total é nula, pois cada fóton tem $p_x = \mathcal{E}/2c$, mas em sentidos opostos e o corpo A está em repouso. Depois da colisão, eles são completamente absorvidos e, por simetria, o corpo A continua em repouso. Portanto há conservação da componente X do momentum linear. Como não há movimento nas demais direções (Y e Z), não precisamos nos preocupar como as respectivas componentes do momentum linear.

Passemos agora para o outro referencial inercial em movimento, $\bar{\mathcal{O}}$. Este referencial está em movimento uniforme ao longo eixo Y, como indicado na Figura 2. Neste referencial em movimento, nosso experimento é visto como mostrado na Figura 3. Considerando que o fator $\beta = V/c$ é pequeno, podemos aproximar o ângulo α pelo seu seno,

$$\sin(\alpha) = \frac{V}{c} \simeq \alpha. \tag{52}$$

Assim, antes da colisão, o momentum linear total no eixo $\bar{Y}$ é

$$P_{\bar{y}}^{(a)} = MV + 2\left(\frac{\mathcal{E}}{2c}\sin(\alpha)\right) = MV + \frac{\mathcal{E}}{c^2}V. \tag{53}$$

Na verdade, tanto a massa M do corpo A quanto o momentum linear do fóton $\mathcal{E}/2c$ no referencial $\bar{\mathcal{O}}$ deveriam sofrer correções relativísticas. No entanto, estas correções são muito pequenas se $\beta = V/c$ é pequeno, que é o caso em questão (veja o Exercício 8). Bem e depois da absorção? Vimos no referencial em repouso $\mathcal{O}$ que o corpo A permanece em repouso após a colisão dos dois fótons. Portanto ele terá de continuar com a velocidade V ao longo do eixo $\bar{Y}$, como indicado na Figura 3, mesmo após a colisão (explique). Após a colisão os dois fótons não existem mais, devido à absorção. Então, para não concluirmos que os fótons não existiam antes da colisão devido à conservação do momentum linear, ou então para não concluirmos que a conservação do momentum linear está errada, temos de supor uma massa $M' \neq M$ para o corpo A após a colisão. Assim, após a colisão o momentum linear total no eixo $\bar{Y}$ é $P_{\bar{y}}^{(d)} = M'V$. Como o momentum linear deve ser conservado, pois não existem forças externas, então

$$MV + \frac{\mathcal{E}}{c^2}V = M'V, \tag{54}$$

de onde obtemos

$$\Delta M = M' - M = \frac{\mathcal{E}}{c^2} = \frac{\Delta E}{c^2}. \tag{55}$$

Este resultado está nos dizendo que a energia ΔE, absorvida ou liberada por um corpo, é equivalente a uma variação Δm na sua massa de repouso m, $\Delta E = \Delta m\, c^2$. Veja o Exercício 10 para um exemplo numérico. Esta relação entre massa e energia explica porque o fóton tem uma quantidade de movimento, mesmo não tendo uma massa de repouso (como a nossa): ele tem energia. Não poder (nunca) estar parado, é o preço que ele paga por não ter uma massa de repouso, ele precisa estar sempre em movimento.

IV. EXERCÍCIOS

Exercício 1
Mostre que as transformações de Galileu (4) não deixam a distância infinitesimal (6) invariante. Mostre que as rotações (7) deixam a distância infinitesimal (6) invariante (considere também $dt = 0$).

Exercício 2
Mostre que as relações (8) estão corretas e determine explicitamente o valor de γ.

Exercício 3
Determine explicitamente as transformações para o tempo, mostradas na segunda coluna das Eqs. (10) e (11), a partir das relações (1) e (2).

Exercício 4
Mostre que as transformações de Lorentz (10)–(11) deixam a distância infinitesimal (13) invariante.

Exercício 5
Determine explicitamente as relações (48) e (47).

Exercício 6
Determine explicitamente os resultados (49), (50) e (51).

Exercício 7
Quais são os valores relativos das contrações espacial ($\bar{L}/L$) e temporal ($\bar{T}/T$) quando $\beta = 0.3$, $\beta = 0.6$, $\beta = 0.9$ e $\beta = 0.99$?

Exercício 8
Mostre, usando a série de Taylor, que a correção relativística (9) pode ser escrita na forma de uma série de potências quando $\beta \ll 1$,

$$\gamma \simeq 1 + \frac{1}{2}\beta^2 + \frac{3}{8}\beta^4. \tag{56}$$

Exercício 9
Considere a partícula denominada de múon. Ela tem a mesma carga de um elétron, mas uma massa cerca de 200 vezes maior. Ela é instável: após o tempo $\bar{L} = 2.2\ \mu$s (medido no referencial do múon (lento) em laboratórios) ela se transforma (decai) em outras partículas. Quando o múon vem de raios cósmicos, ele penetra nossa atmosfera com uma velocidade $V = 0.99c$ e chega até o solo em grandes quantidades. Explique como o múon chega até a superfície (poucos kilômetros abaixo do início da nossa atmosfera).

Exercício 10
O isótopo ^{216}Po do átomo de polônio, número atômico $Z = 84$, massa atômica 216.001889 u.m.a., foi descoberto por Marie Curie em 1893, como um átomo radioativo. Pela descoberta de átomos radioativos, ela e seu marido (Pierre) receberam o prêmio Nobel em 1903. Vale mencionar que ela recebeu um segundo prêmio Nobel em 1911 pela descoberta do polônio. O processo de desintegração do polônio é

$$^{216}\mathrm{Po} \rightarrow {}^{212}\mathrm{Pb} + {}^{4}\mathrm{He}. \tag{57}$$

Sabendo que a massa atômica do chumbo ^{212}Pb é 211.991872 u.m.a. e a do hélio é 4.002602 u.m.a. e que uma unidade de massa atômica (u.m.a) vale 1.66×10^{-27} kg, calcule a energia liberada neste processo radioativo. Esta energia é usada na forma de energia cinética pelos produtos da reação nuclear.