

# Apêndices

Esmerindo Bernardes<sup>1,\*</sup>

<sup>1</sup>L.I.A. – LABORATÓRIO DE INSTRUMENTAÇÃO ALGÉBRICA  
Instituto de Física de São Carlos  
Universidade de São Paulo  
13560-970 São Carlos, SP, Brazil  
(Dated: 26 de Setembro de 2016)

## CONTENTS

I. Análise Dimensional	1
II. Sistemas de Coordenadas	2
II.1. Coordenadas polares	2
II.1.1. Volumes elementares	3
II.1.2. Gradiente, divergente e rotacional	4
II.1.3. Cinemática	6
II.2. Coordenadas cilíndricas	6
II.2.1. Volumes elementares	6
II.2.2. Gradiente, divergente e rotacional	7
II.2.3. Cinemática	7
II.3. Coordenadas esféricas	7
II.3.1. Volumes elementares	8
II.3.2. Gradiente, divergente e rotacional	8
II.3.3. Cinemática	9
III. Série de Taylor	9

## I. ANÁLISE DIMENSIONAL

Unidades de medida são importantes e indispensáveis em Mecânica. De forma geral, procuraremos expressar todas as nossas quantidades mecânicas em unidades derivadas de quatro grandezas fundamentais: comprimento (L), tempo (T), massa (M) e carga elétrica (Q). Em processos de medidas, estas grandezas são conhecidas também por dimensões. Em geral, falaremos da “análise dimensional” de uma determinada quantidade mecânica. Vários sistemas de medidas foram criados para expressar a intensidade de cada uma destas quatro dimensões fundamentais. Usaremos com mais frequência o sistema internacional MKS, onde comprimento é medido em metros (m), tempo em segundos (s), massa em kilogramas (kg) e carga elétrica em Coulombs (C).

Existe um procedimento padrão para analisarmos as dimensões de uma determinada quantidade de interesse: uma equação com o lado esquerdo expressando a quantidade  $B$  a ser analisada, via a notação  $[B]$ , e um lado direito contendo apenas as operações de multiplicação e potenciação envolvendo as dimensões L, T, M e Q. Vejamos alguns exemplos.

O vetor posição  $\vec{r}$  tem dimensão de comprimento (L). Então escrevemos matematicamente esta informação como

$$[\vec{r}] = L. \quad (1)$$

O vetor velocidade tem dimensões de comprimento por tempo, então

$$[\vec{v}] = \left[ \frac{d\vec{r}}{dt} \right] = \frac{L}{T} = LT^{-1}. \quad (2)$$

O vetor aceleração tem dimensões de comprimento por tempo ao quadrado, então

$$[\vec{a}] = \left[ \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \right] = \frac{L}{T^2} = LT^{-2}. \quad (3)$$

As dimensões do momentum linear são

$$[\vec{p}] = [m\vec{v}] = \frac{ML}{T} = MLT^{-1}. \quad (4)$$

Seguindo estes exemplos, a análise dimensional do vetor força na segunda lei de Newton (massa constante) nos fornece

$$[\vec{F}] = [m\vec{a}] = \frac{ML}{T^2} = MLT^{-2}(\text{Newton}). \quad (5)$$

Newton é a unidade de força no sistema MKS.

Dois forças importantes em mecânica são: a lei de Hooke,

$$\vec{F}_d = -k\vec{r}, \quad (6)$$

a qual descreve o comportamento de um corpo elástico (de constante característica  $k$ ) com uma deformação do tamanho do comprimento do vetor posição  $\vec{r}$ , e lei de Newton para a gravitação,

$$\vec{F}_g = -G \frac{Mm}{r^2} \hat{r}, \quad (7)$$

a qual descreve a interação entre dois corpos de massas  $M$  e  $m$ , separadas pela distância  $r$ . Usando análise dimensional, encontramos as dimensões da constante de mola  $k$ ,

$$[k] = MT^{-2}, \quad (8)$$

e da constante universal da gravitação  $G$ ,

$$[G] = M^{-1}L^3T^{-2}. \quad (9)$$

O valor desta constante no sistema MKS é  $G = 6.67384 \times 10^{-11} \text{ m}^2/\text{kg s}^2$ .

\* [sousa@ifsc.usp.br](mailto:sousa@ifsc.usp.br)

Quais são as dimensões da constante  $C_e$  aparecendo na expressão para a força elétrica (lei de Coulomb)

$$\vec{F}_e = C_e \frac{Qq}{r^2} \hat{r} \quad (10)$$

entre duas cargas elétricas  $Q$  e  $q$  separadas pela distância  $r$ ? Seguindo o modelo anterior, temos

$$[C_e] = \text{NL}^2\text{Q}^{-2} = \text{ML}^3\text{T}^{-2}\text{Q}^{-2}. \quad (11)$$

Por completeza, devemos mencionar que cargas magnéticas nunca foram observadas. No entanto quando dois fios conduzindo correntes elétricas  $I_1$  e  $I_2$  estão a uma distância  $\rho$ , podemos medir uma força por unidade de comprimento entre eles,

$$\vec{f}_m = 2C_m \frac{I_1 I_2}{\rho} \hat{\rho}. \quad (12)$$

Esta força é conhecida como lei de Biot-Savat. Usando a definição de corrente, carga por tempo, temos

$$[I] = \left[ \frac{dQ}{dt} \right] = \text{QT}^{-1}. \quad (13)$$

Assim, as dimensões da constante  $C_m$  são

$$[C_m] = \text{NT}^2\text{Q}^{-2} = \text{MLQ}^{-2}. \quad (14)$$

Podemos notar também então que a razão  $C_e/C_m$  tem a mesma dimensão de velocidade ao quadrado. De fato, Maxwell mostrou que no vácuo, a velocidade da luz (onda eletromagnética) é

$$c = \sqrt{\frac{C_e}{C_m}}. \quad (15)$$

Os valores destas constantes (no vácuo) são:  $C_e = 8.987551788 \times 10^9 \text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2$  e  $C_m = 10^{-7} \text{ N}\cdot\text{s}^2/\text{C}^2$ . Portanto, medindo as constantes  $C_e$  e  $C_m$  podemos calcular a velocidade da luz. Este resultado está entre os mais surpreendentes acerca da nossa natureza. As surpresas não param aqui, há ainda um fato ainda mais marcante sobre o comportamento da luz: ela é um limite superior para a velocidade de qualquer quantidade em movimento. No presente tempo, conseguimos dar uma velocidade próxima à da luz (98%) apenas para partículas subatômicas como o elétron.

A força de Lorentz,

$$\vec{F} = q \vec{v} \times \vec{B}, \quad (16)$$

produzida por uma carga  $q$  em movimento com uma velocidade  $\vec{v}$  em um campo magnético  $\vec{B}$ , é responsável por trajetórias helicoidais. As dimensões do campo magnético  $\vec{B}$  são

$$[\vec{B}] = \left[ \frac{\|\vec{F}\|}{q\|\vec{v}\|} \right] = \text{MQ}^{-1}\text{T}^{-1}(\text{Tesla}). \quad (17)$$

## II. SISTEMAS DE COORDENADAS

### II.1. Coordenadas polares

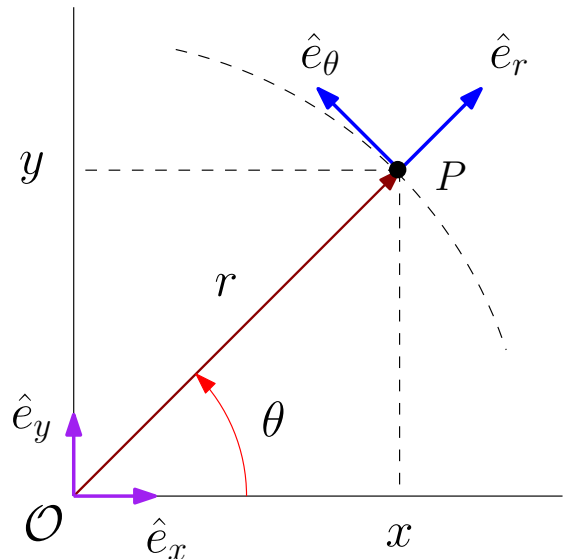


Figura 1. O sistema de coordenadas polares  $(r, \theta)$ ,  $r \geq 0$  e  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ , relativo ao sistema cartesiano  $(x, y)$ . Em cada sistema de coordenadas, os versores são mutuamente ortogonais. As direções dos versores  $\hat{e}_r$  e  $\hat{e}_\theta$  são denominadas de “radial” e “tangencial”, respectivamente.

A Figura 1 mostra o sistema de coordenadas polares  $(r, \theta)$ ,  $r \geq 0$  e  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ , relativo ao sistema cartesiano  $(x, y)$ . Ambos são sistemas de coordenadas ortonormais. Assim como os versores  $(\hat{e}_x, \hat{e}_y)$  são ortogonais no sistema cartesiano, os versores  $(\hat{e}_r, \hat{e}_\theta)$  no sistema polar também são ortogonais. Note que o versor  $\hat{e}_\theta$  é tangente à circunferência de raio  $r$  centrada na origem. Por isso se diz que este versor está sobre a direção tangencial (ou tangente). O versor  $\hat{e}_r$  está sobre a direção radial. Da geometria mostrada na Figura 1, o vetor posição que localiza o ponto  $P$  é

$$\vec{r} = x \hat{e}_x + y \hat{e}_y = r(\cos \theta \hat{e}_x + \sin \theta \hat{e}_y), \quad (18)$$

o que nos possibilita expressar o versor radial  $\hat{e}_r$  em termos dos versores cartesianos,

$$\hat{e}_r = \frac{\vec{r}}{r} = \cos \theta \hat{e}_x + \sin \theta \hat{e}_y, \quad (19)$$

onde  $r = \|\vec{r}\|$  é o módulo do vetor posição. Note que este versor radial varia somente quando o ponto  $P$  movimenta-se na direção tangencial,

$$\frac{d\hat{e}_r}{d\theta} = -\sin \theta \hat{e}_x + \cos \theta \hat{e}_y = \hat{e}_\theta. \quad (20)$$

A última igualdade em (20) é possível porque (i) a taxa de variação de um vetor de módulo constante é perpendicular a este vetor (verifique), (ii) a taxa de variação do versor radial com relação à coordenada angular  $\theta$  mostrada na Figura 1 ( $\theta$

crescendo no sentido anti-horário) está ao longo da direção tangente e no mesmo sentido do versor tangente  $\hat{e}_\theta$  e (iii) o módulo da taxa de variação é unitário, igual ao módulo do versor tangente. Note que o versor tangente também não muda quando caminhamos apenas na direção radial. Consequentemente,

$$\frac{d\hat{e}_\theta}{d\theta} = -(\cos\theta\hat{e}_x + \sin\theta\hat{e}_y) = -\hat{e}_r. \quad (21)$$

### II.1.1. Volumes elementares

Ainda considerando o vetor posição em coordenadas polares,  $\vec{r} = r\hat{e}_r$ , suas derivadas parciais podem ser escritas como (verifique)

$$\frac{\partial\vec{r}}{\partial r} = \hat{e}_r, \quad \frac{\partial\vec{r}}{\partial\theta} = h_\theta\hat{e}_\theta, \quad (22)$$

onde

$$h_r = \left\| \frac{\partial\vec{r}}{\partial r} \right\| = 1, \quad h_\theta = \left\| \frac{\partial\vec{r}}{\partial\theta} \right\| = r, \quad (23)$$

são conhecidos como fatores de escala, os quais são muito úteis para reescrevermos elementos de volume e o operador gradiente em outros sistemas de coordenadas ortonormais. Vejamos como isto acontece. Inicialmente vamos calcular a diferencial do vetor posição em coordenadas polares (verifique),

$$d\vec{r} = \frac{\partial\vec{r}}{\partial r} dr + \frac{\partial\vec{r}}{\partial\theta} d\theta = h_r dr \hat{e}_r + h_\theta d\theta \hat{e}_\theta = dr \hat{e}_r + r d\theta \hat{e}_\theta, \quad (24)$$

cujo comprimento é (verifique)

$$dl^2 = d\vec{r} \cdot d\vec{r} = h_r^2 dr^2 + h_\theta^2 d\theta^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2, \quad (25)$$

o qual representa um comprimento infinitesimal sobre uma determinada trajetória. A segunda igualdade em (24) e em (25) é um padrão (observe esta expressão atentamente e descreva verbalmente este padrão). Verifique que, no caso de uma circunferência de raio  $r = R$  (constante) o comprimento da mesma (perímetro) é

$$C = \oint dl = R \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi R. \quad (26)$$

Do cômputo de comprimentos devemos passar para o cálculo de áreas (volumes em duas dimensões). A Figura 2 mostra como uma área elementar de forma (quasi-)retangular em coordenadas polares. Este elemento de área mostrado na Figura 2 está exageradamente ampliado, por isso a aparente forma não-retangular, porém as diferenças nos comprimentos dos dois arcos envolvem o produto de duas diferenciais, o qual é infinitamente menor que qualquer termo contendo uma única diferencial. Note que esta é uma área infinitesimalmente pequena localizada pelo ponto  $(r, \theta)$  e que, a partir deste ponto, caminhamos  $dr$  no sentido positivo da direção radial até o ponto  $(r + dr, \theta)$ , infinitesimalmente próximo. Depois

caminhamos (aproximadamente)  $r d\theta$  na direção tangente, a outra direção independente. Caminhando sempre nas direções independentes alternadamente, retornamos ao ponto de partida. Desta forma, o elemento de área interno a este circuito está orientado no sentido da “mão-direita”, ou seja, podemos imaginar um versor perpendicular a ela e saindo do plano da figura. Então, este elemento de área pode ser calculado via geometria plano (produto dos lados),

$$dA = r dr d\theta, \quad (27)$$

o qual pode ser reescrito em termos dos fatores de escala (23)

$$dA = r dr d\theta = h_r dr h_\theta d\theta. \quad (28)$$

Isto é novamente um padrão (observe esta expressão atentamente e descreva verbalmente este padrão).

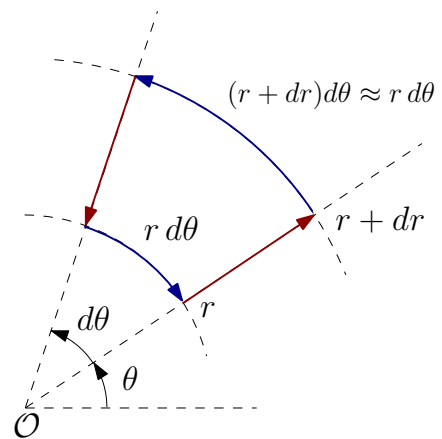


Figura 2. Uma área elementar orientada no sistema de coordenadas polares, localizada no ponto  $(r, \theta)$ .

Note que a segunda igualdade em (28) evita o uso do tal Jacobiano. Mas antes de apresentar o Jacobiano, vamos recalcular o mesmo elemento de área (27) de outra forma.<sup>1</sup> Da Geometria Plana, podemos escrever as coordenadas cartesianas do vetor posição  $\vec{r} = x\hat{e}_x + y\hat{e}_y$  em termos das coordenadas polares,

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad (29)$$

cujas diferenciais são (verifique)

$$dx = \cos\theta dr - r \sin\theta d\theta, \quad dy = \sin\theta dr + r \cos\theta d\theta. \quad (30)$$

Assim, repetindo o mesmo procedimento mostrado na Figura 2, mas desta vez para o sistema cartesiano de coordenadas, a área infinitesimal é

$$dA = dx dy. \quad (31)$$

<sup>1</sup> Richard Feynman, físico nobelista em 1965, que adorava visitar o Brasil, principalmente o Rio de Janeiro (1951–1952), costumava dizer que devemos saber calcular um determinado resultado por meios diferentes.

Aqui temos um probleminha: simplesmente substituindo as diferenciais  $dx$  e  $dy$  por suas expressões em coordenadas polares, não re-obteremos a área elementar calculada (corretamente) em (28) via geometria plana (verifique). A única saída é admitir que diferenciais usam um produto especial, denominado de “cunha” ( $\wedge$ ). Então, o elemento de área pode ser recalculado pelo procedimento (verifique)

$$dA = dx \wedge dy = r d\theta \wedge dr, \quad (32)$$

onde o produto  $\wedge$  entre as diferenciais é antissimétrico,

$$dx \wedge dy = -dy \wedge dx. \quad (33)$$

Note que este produto especial entre diferenciais, denominado de “cunha”, tem as mesmas propriedades do produto vetorial e do determinante (em relação à troca entre duas linhas ou entre duas colunas) e que, por isso, ele é nulo entre diferenciais idênticas,  $dx \wedge dx = 0$ . Note também que o elemento de área dado pela Eq. (32) é orientado, no mesmo sentido mostrado na Figura 2, pois o sinal muda se trocarmos as diferenciais de lugar. Nos cursos elementares de Cálculo, usa-se o Jacobiano (isto também é um padrão; observe esta expressão atentamente e descreva verbalmente este padrão)

$$J(r, \theta) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = r, \quad (34)$$

no lugar do produto especial (33),

$$dA = dx dy = J(r, \theta) d\theta dr = r dr d\theta. \quad (35)$$

É aqui que aparece o tal Jacobiano. Note que este resultado é idêntico àquele obtido acima via geometria plana, como pode ser visto na Eq. (27), uma consequência da Figura 2. De qualquer forma, verifique explicitamente que estes três procedimentos (geométrico, formas diferenciais e o Jacobiano) fornecem os mesmos resultados. Matemática é bonita. Que tal calcular a área do interior de uma circunferência de raio  $R$ ? Procedimento usual (verifique),

$$A = \oint dA = \int_0^R r dr \int_0^{2\pi} d\theta = \pi R^2. \quad (36)$$

O comprimento  $dl$  em (25) e a área  $dA$  em (28) são os únicos “volumes” elementares que podemos calcular num espaço bidimensional. Note que todos estes volumes podem ser escritos em termos dos fatores de escala definidos em (23). Apenas por comodidade, vamos repetir aqui estes elementos de volume, incluindo o deslocamento infinitesimal, expressos em termos dos fatores de escala para os dois sistemas de coordenadas ortonormais que estamos usando,

$$d\vec{r} = h_x dx \hat{e}_x + h_y dy \hat{e}_y = h_r dr \hat{e}_r + h_\theta d\theta \hat{e}_\theta, \quad (37)$$

$$dl^2 = h_x^2 dx^2 + h_y^2 dy^2 = h_r^2 dr^2 + h_\theta^2 d\theta^2, \quad (38)$$

$$dA = h_x h_y dx dy = h_r h_\theta dr d\theta. \quad (39)$$

Isto facilita enxergarmos os padrões mencionados anteriormente. Aposto que você consegue “adivinhar” a expressão

para o elemento de volume em coordenadas cartesianas para o caso tridimensional.<sup>2</sup> Uma vez que os fatores de escala são calculados, é muito fácil calcular os volumes elementares. Para o presente caso, espaço euclidiano bidimensional, eles são

$$h_x = 1, h_y = 1, h_r = 1 \text{ e } h_\theta = r. \quad (40)$$

Note que os fatores de escala podem ser vistos (geometricamente) como a razão entre o deslocamento infinitesimal numa dada direção pela diferencial da coordenada naquela mesma direção. Por exemplo, na Figura 2, podemos ver que o deslocamento infinitesimal na direção tangente é  $r d\theta$  e a diferencial da coordenada  $\theta$  é  $d\theta$ . Assim,  $h_\theta = r d\theta/d\theta = r$ .

### II.1.2. Gradiente, divergente e rotacional

Outra praticidade proporcionada pelos fatores de escala é no cálculo dos operadores gradiente, divergente e rotacional em determinado sistema de coordenadas ortonormal. Considere uma função escalar da posição,  $f = f(x, y)$ . Como esta função é em geral uma regra para “pregarmos” números (escalares) numa determinada posição do espaço, desta forma uma função escalar é um exemplo de um “campo” escalar. Do teorema de Taylor, aprendemos que os deslocamentos infinitesimais  $dx$  e  $dy$  nas variáveis independentes cartesianas produzem um deslocamento infinitesimal  $df$  na variável dependente,

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = \frac{1}{h_x} \frac{\partial f}{\partial x} h_x dx + \frac{1}{h_y} \frac{\partial f}{\partial y} h_y dy, \quad (41)$$

no qual introduzimos os fatores de escala por pura conveniência (de formar um padrão). Este resultado pode ser reescrito na forma vetorial

$$df = \vec{\nabla} f \cdot d\vec{r}, \quad (42)$$

via o produto escalar, onde usamos o deslocamento infinitesimal  $d\vec{r}$  do vetor posição e introduzimos o operador “gradiente” como o vetor<sup>3</sup>

$$\vec{\nabla} = \frac{\hat{e}_x}{h_x} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\hat{e}_y}{h_y} \frac{\partial}{\partial y} = \hat{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \hat{e}_y \frac{\partial}{\partial y}. \quad (43)$$

Isto é outro padrão (observe esta expressão atentamente e descreva verbalmente este padrão). Adivinhe qual será a expressão do gradiente em coordenadas polares. Para provar que você está correto, imagine o mesmo campo escalar  $f$  em termos das coordenadas polares,  $f = f(r, \theta)$ . Então,

$$df = \frac{\partial f}{\partial r} dr + \frac{\partial f}{\partial \theta} d\theta = \frac{1}{h_r} \frac{\partial f}{\partial r} h_r dr + \frac{1}{h_\theta} \frac{\partial f}{\partial \theta} h_\theta d\theta = \vec{\nabla} f \cdot d\vec{r}, \quad (44)$$

<sup>2</sup> Isto mesmo,  $dV = h_x h_y h_z dx dy dz$  em coordenadas cartesianas.

<sup>3</sup> O símbolo que representa o gradiente, um triângulo invertido, é conhecido por “nabla”, uma palavra grega para representar um instrumento musical com esta mesma forma.

onde o gradiente

$$\vec{\nabla} = \frac{\hat{e}_r}{h_r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\hat{e}_\theta}{h_\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} = \hat{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\hat{e}_\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \quad (45)$$

agora está em coordenadas polares, como você “adivinou” corretamente. É para isto que serve padrões; e é por isso que sempre buscamos por eles. Eles nos polpam de muitos cálculos, mas devem ser usados com muito cuidado. Aqui nos estamos usando sempre sistemas de coordenadas ortonormais.

As Eqs. (43) e (45) indicam que sabemos calcular o operador gradiente em um sistema de coordenadas ortonormal qualquer. No entanto ainda precisamos conhecer seu significado geométrico (ou físico). Para isto basta reescrever a definição (42) do operador gradiente atuando num campo escalar qualquer numa forma onde o produto escalar no lado direito possa ser efetuado conhecendo o ângulo  $\alpha$  entre os vetores  $\vec{\nabla}f$  e  $d\vec{r}$ ,

$$df = \vec{\nabla}f \cdot d\vec{r} = |\vec{\nabla}f| dr \cos \alpha. \quad (46)$$

Podemos ver que  $\alpha = 0$  maximiza o valor de  $df$ . Acontece que  $df$  mede a variação do campo escalar  $f$  na direção do deslocamento infinitesimal  $d\vec{r}$ . Isto significa que a variação do campo escalar  $f$  é máxima na direção do gradiente  $\vec{\nabla}f$ . Portanto o gradiente  $\vec{\nabla}f$  é um campo vetorial que sempre aponta para a direção de maior crescimento do campo escalar  $f$ . Este é o significado geométrico do gradiente e é muito útil na determinação de máximos e mínimos em superfícies.

Como o operador gradiente é um vetor que atua em campos escalares, então há pelos menos duas situações em que podemos empregá-lo quando dispomos de um campo vetorial: via um produto escalar ou via um produto vetorial. Um campo vetorial é um vetor onde cada componente é um campo escalar. É mais instrutivo iniciarmos com um campo vetorial em coordenadas polares,

$$\vec{F} = F_r(r, \theta) \hat{e}_r + F_\theta(r, \theta) \hat{e}_\theta. \quad (47)$$

Não podemos esquecer que os versores do sistema polar, ao contrário dos versores cartesianos, dependem da posição, o que vale relembrarmos aqui:

$$\hat{e}_r = +\cos \theta \hat{e}_x + \sin \theta \hat{e}_y, \quad \frac{\partial \hat{e}_r}{\partial \theta} = +\hat{e}_\theta, \quad \frac{\partial \hat{e}_r}{\partial r} = 0, \quad (48)$$

$$\hat{e}_\theta = -\sin \theta \hat{e}_x + \cos \theta \hat{e}_y, \quad \frac{\partial \hat{e}_\theta}{\partial \theta} = -\hat{e}_r, \quad \frac{\partial \hat{e}_\theta}{\partial r} = 0. \quad (49)$$

Assim, podemos usar o produto escalar (base ortonormal) para encontrar a ação do gradiente (45) no campo vetorial (47) (verifique),

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{F} &= \left( \hat{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\hat{e}_\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \cdot \left[ F_r(r, \theta) \hat{e}_r + F_\theta(r, \theta) \hat{e}_\theta \right] \\ &= \frac{\partial F_r}{\partial r} + \frac{F_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial F_\theta}{\partial \theta}. \end{aligned} \quad (50)$$

Esta ação do gradiente num campo vetorial via o produto escalar é denominada de “divergente”, cujo significado geométrico ainda deve ser investigado. Este resultado pode ser reescrito

numa forma mais adequada para descobirmos como o divergente pode ser calculado num determinado sistema de coordenadas ortonormal (forma padrão). Para isto, note que os dois primeiros termos na última igualdade deste divergente provêm de uma única derivada,  $\partial_r(rF_r)$ , dividida por  $r$  (verifique). Aqui estamos usando  $\partial_r$  para denotar a derivada parcial com relação a  $r$ . Portanto, o divergente em coordenadas polares pode ser reescrito como (verifique)

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{F} &= \frac{\partial F_r}{\partial r} + \frac{F_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial F_\theta}{\partial \theta} = \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial(rF_r)}{\partial r} + \frac{\partial F_\theta}{\partial \theta} \right] \\ &= \frac{1}{h_r h_\theta} \left[ \frac{\partial(h_\theta F_r)}{\partial r} + \frac{\partial(h_r F_\theta)}{\partial \theta} \right]. \end{aligned} \quad (51)$$

Esta última igualdade é um padrão (observe esta expressão atentamente e descreva verbalmente este padrão). Isto significa que o divergente de um campo vetorial em coordenadas cartesianas, por exemplo, é

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \frac{1}{h_x h_y} \left[ \frac{\partial(h_y F_x)}{\partial x} + \frac{\partial(h_x F_y)}{\partial y} \right] = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y}. \quad (52)$$

Aproveite o embalço para escrever a expressão do divergente em coordenadas cartesianas para o caso tridimensional.

Outra ação do vetor gradiente num campo vetorial é via o produto vetorial (base ortonormal),

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{F} &= \left( \hat{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\hat{e}_\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \times \left[ F_r(r, \theta) \hat{e}_r + F_\theta(r, \theta) \hat{e}_\theta \right] \\ &= \left( \frac{\partial F_\theta}{\partial r} + \frac{F_\theta}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial F_r}{\partial \theta} \right) \hat{e}_z = \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial(rF_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial F_r}{\partial \theta} \right] \hat{e}_z, \end{aligned} \quad (53)$$

onde fizemos  $\hat{e}_z = \hat{e}_r \times \hat{e}_\theta$  (verifique, tudo). Esta forma de atuar com o gradiente num campo vetorial é denominada de “rotacional” (devemos estudar seu significado geométrico posteriormente). Procedendo como no caso anterior, podemos reescrever este rotacional em termos dos fatores de escala (verifique),

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{F} &= \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial(rF_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial F_r}{\partial \theta} \right] \hat{e}_z \\ &= \frac{1}{h_r h_\theta h_z} \left[ \frac{\partial(h_\theta F_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial(h_r F_r)}{\partial \theta} \right] h_z \hat{e}_z, \end{aligned} \quad (54)$$

onde introduzimos o fator de escala  $h_z = 1$  do versor  $\hat{e}_z$ , perpendicular ao nosso espaço bidimensional (considerado plano). Embora o rotacional (54) tenha apenas uma componente, perpendicular ao plano onde vive o nosso campo vetorial, este resultado nos permite identificar como calcular uma componente qualquer numa situação mais geral. Primeiro note que a última igualdade em (54) tem a cara de um produto vetorial, principalmente quando reescrito na forma

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \frac{1}{h_r h_\theta h_z} \left[ \partial_r(h_\theta F_\theta) - \partial_\theta(h_r F_r) \right] h_z \hat{e}_z, \quad (55)$$

onde as derivadas estão numa forma mais compacta e se percebermos que os versores  $\{\hat{e}_r, \hat{e}_\theta, \hat{e}_z\}$ , nesta ordem, obedecem

a regra da mão direita para o produto vetorial (verifique). Assim, a componente  $z$  do rotacional de um campo vetorial (tridimensional) em coordenadas cartesianas deve ser

$$\begin{aligned} (\vec{\nabla} \times \vec{F})_z \hat{e}_z &= \frac{1}{h_x h_y h_z} \left[ \partial_x (h_y F_y) - \partial_y (h_x F_x) \right] h_z \hat{e}_z \\ &= \left( \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) \hat{e}_z. \end{aligned} \quad (56)$$

Desta forma, usando um determinante, podemos escrever o rotacional por inteiro:

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \frac{1}{h_x h_y h_z} \begin{vmatrix} h_x \hat{e}_x & h_y \hat{e}_y & h_z \hat{e}_z \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ h_x F_x & h_y F_y & h_z F_z \end{vmatrix}. \quad (57)$$

As derivadas parciais na segunda linha devem atuar somente nas funções contidas na terceira linha. Verifique que o resultado (56) pode ser obtido diretamente de (57). Também reescreva a forma padrão para o sistema polar (2D) considerando  $\partial_z = 0$  e  $F_z = 0$ , bem como a identificação  $x \rightarrow r$  e  $y \rightarrow \theta$ , e verifique que o resultado (55) é recuperado.

### II.1.3. Cinemática

Quando o ponto  $P$  está em movimento e expressamos as coordenadas polares em função do tempo  $t$ , teremos (verifique usando a regra da derivada de uma função composta)

$$\dot{\hat{e}}_r = \dot{\theta} \hat{e}_\theta, \quad \dot{\hat{e}}_\theta = -\dot{\theta} \hat{e}_r, \quad (58)$$

onde o ponto sobre quantidades representa a derivada total em relação ao tempo. Usando estas derivadas, podemos calcular rapidamente as coordenadas polares dos vetores velocidade e aceleração:

$$\vec{r} = r \hat{e}_r, \quad (59)$$

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{r} \hat{e}_r + r \dot{\theta} \hat{e}_\theta, \quad (60)$$

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \hat{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) \hat{e}_\theta. \quad (61)$$

Note que o vetor velocidade é a razão entre a diferencial do vetor posição, dada pela Eq. (37), e a diferencial do tempo.

Assim, podemos perceber imediatamente que no movimento circular ( $\dot{r} = 0$ ) com velocidade angular ( $\omega = \dot{\theta}$ ) constante ( $\ddot{\theta} = 0$ ), o vetor aceleração tem apenas a componente radial  $a_r = -r\omega^2$  (aceleração centrípeta). Outro caso de estudo: o pêndulo simples. No movimento de um pêndulo ideal de comprimento  $r$  (fixo) e massa  $m$ , a força resultante,  $\vec{F} = F_r \hat{e}_r + F_\theta \hat{e}_\theta$ , tem as suas duas componentes não-nulas:  $F_r = mg \cos \theta - T$  e  $F_\theta = -mg \sin \theta$  (verifique). Desta forma, aplicando a segunda lei de Newton na direção tangente ( $\hat{e}_\theta$ ), temos  $\ddot{\theta} + (g/r) \sin \theta = 0$ , como esperado (e rápido; não esqueça que  $\dot{r} = 0$ ).

## II.2. Coordenadas cilíndricas

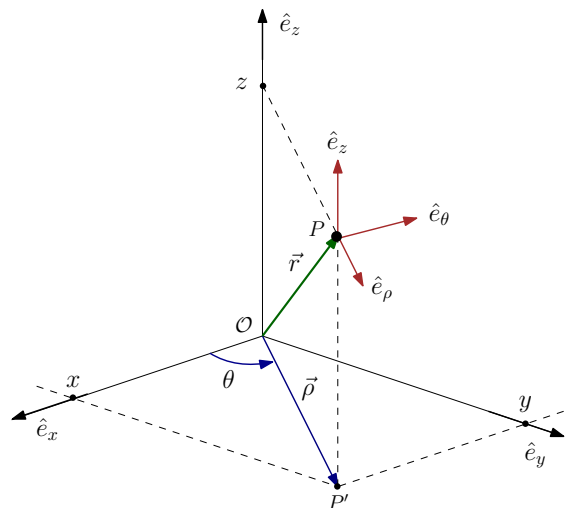


Figura 3. O sistema de coordenadas cilíndrico  $(\rho, \theta, z)$ ,  $\rho \geq 0$  e  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ , relativo ao sistema cartesiano  $(x, y, z)$ . Em cada sistema de coordenadas, os versores são mutuamente ortogonais. A sequência  $\{\hat{e}_\rho, \hat{e}_\theta, \hat{e}_z\}$  obedece a regra da mão direita.

A Figura 3 mostra o sistema de coordenadas cilíndrico  $(\rho, \theta, z)$ ,  $\rho \geq 0$  e  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ , relativo ao sistema cartesiano  $(x, y, z)$ . Ambos são sistemas de coordenadas ortonormais tridimensionais. Os versores no sistema cilíndrico na sequência  $\{\hat{e}_\rho, \hat{e}_\theta, \hat{e}_z\}$  obedecem a regra da mão direita com relação ao produto vetorial. Note que o sistema cilíndrico é o sistema polar (bidimensional) no plano  $XY$  acrescido do eixo  $Z$ . Aqui, por comodidade, usamos  $\rho$  para representar a coordenada radial no plano  $XY$ . Isto significa que podemos fazer uso das propriedades (48)–(49) das coordenadas polares trocando  $r$  por  $\rho$  e mantendo em mente que o versor  $\hat{e}_z$  é independente da posição. Além disso, podemos aproveitar todos os padrões estabelecidos na seção anterior. Note também que o vetor posição  $\vec{r}$  na Figura 3, de acordo com a geometria plana, pode ser escrito na forma

$$\vec{r} = \vec{\rho} + \vec{z} = \rho \hat{e}_\rho + z \hat{e}_z. \quad (62)$$

### II.2.1. Volumens elementares

Para calcularmos os elementos de comprimento, área e volume, precisaremos calcular os fatores de escala,

$$h_\rho = \left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \rho} \right\| = 1, \quad h_\theta = \left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} \right\| = \rho, \quad h_z = \left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial z} \right\| = 1, \quad (63)$$

onde usamos o vetor posição na forma (62). Agora podemos generalizar os padrões encontrados nas Eqs. (37)–(39) para calcular o deslocamento infinitesimal (verifique),

$$\begin{aligned} d\vec{r} &= h_\rho d\rho \hat{e}_\rho + h_\theta d\theta \vec{e}_\theta + h_z dz \hat{e}_z \\ &= d\rho \hat{e}_\rho + \rho d\theta \vec{e}_\theta + dz \hat{e}_z, \end{aligned} \quad (64)$$

o comprimento elementar,

$$d\vec{l} = d\vec{r} \cdot \vec{r} = h_\rho^2 d\rho^2 + h_\theta^2 d\theta^2 + h_z^2 dz^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\theta^2 + dz^2, \quad (65)$$

as áreas elementares na base (plano  $XY$ ) e na lateral ( $\rho$  constante) ao longo do eixo  $Z$  (verifique),

$$dA_{xy} = h_\rho h_\theta d\rho d\theta = \rho d\rho d\theta, \quad (66)$$

$$dA_z = h_z h_\theta dz d\theta = \rho dz d\theta, \quad (67)$$

respectivamente, e o volume elementar propriamente dito (verifique),

$$dV = h_\rho h_\theta h_z d\rho d\theta dz = \rho d\rho dz d\theta. \quad (68)$$

### II.2.2. Gradiente, divergente e rotacional

De acordo com o padrão estabelecido em (45), o gradiente em coordenadas cilíndricas é

$$\vec{\nabla} = \frac{\hat{e}_\rho}{h_\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\hat{e}_\theta}{h_\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\hat{e}_z}{h_z} \frac{\partial}{\partial z} = \hat{e}_\rho \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\hat{e}_\theta}{\rho} \frac{\partial}{\partial \theta} + \hat{e}_z \frac{\partial}{\partial z}. \quad (69)$$

Generalizando o padrão (51), o divergente de um campo vetorial em coordenadas cilíndricas é (verifique)

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{F} &= \frac{1}{h_\rho h_\theta h_z} \left[ \frac{\partial(h_\theta h_z F_\rho)}{\partial \rho} + \frac{\partial(h_z h_\rho F_\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial(h_\rho h_\theta F_z)}{\partial z} \right] \\ &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho F_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial F_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial F_z}{\partial z}. \end{aligned} \quad (70)$$

Similarmente, o rotacional de um campo vetorial em coordenadas cilíndricas é calculado adaptando o padrão (57) para o sistema cilíndrico (verifique),

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{F} &= \frac{1}{h_\rho h_\theta h_z} \begin{vmatrix} h_\rho \hat{e}_\rho & h_\theta \hat{e}_\theta & h_z \hat{e}_z \\ \partial_\rho & \partial_\theta & \partial_z \\ h_\rho F_\rho & h_\theta F_\theta & h_z F_z \end{vmatrix} = \frac{1}{\rho} \begin{vmatrix} \hat{e}_\rho & \rho \hat{e}_\theta & \hat{e}_z \\ \partial_\rho & \partial_\theta & \partial_z \\ F_\rho & \rho F_\theta & F_z \end{vmatrix} \\ &= \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial F_z}{\partial \theta} - \frac{\partial F_\theta}{\partial z} \right) \hat{e}_\rho + \left( \frac{\partial F_\rho}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial \rho} \right) \hat{e}_\theta \\ &\quad + \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial(\rho F_\theta)}{\partial \rho} - \frac{\partial F_\rho}{\partial \theta} \right) \hat{e}_z. \end{aligned} \quad (71)$$

Uma outra operação importante é o divergente de um gradiente. A ação do gradiente num campo escalar  $f(\rho, \theta, z)$  cria um campo vetorial  $\vec{F} = \vec{\nabla} f$ . Agora podemos calcular o divergente deste campo vetorial, uma operação conhecida por Laplaciano,

$$\nabla^2 f = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} f = \vec{\nabla} \cdot \vec{F}. \quad (72)$$

Usando as prescrições (69) para o gradiente e (70) para o divergente, após um pouco de álgebra e muita paciência, podemos escrever a ação do Laplaciano em termos dos fatores de

escala ((verifique)):

$$\begin{aligned} \nabla^2 &= \frac{1}{h_\rho^2} \left\{ \left[ \frac{\partial}{\partial \rho} \ln \left( \frac{h_\theta h_z}{h_\rho} \right) \right] \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} \right\} \\ &\quad + \frac{1}{h_\theta^2} \left\{ \left[ \frac{\partial}{\partial \theta} \ln \left( \frac{h_z h_\rho}{h_\theta} \right) \right] \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right\} \\ &\quad + \frac{1}{h_z^2} \left\{ \left[ \frac{\partial}{\partial z} \ln \left( \frac{h_\rho h_\theta}{h_z} \right) \right] \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right\}. \end{aligned} \quad (73)$$

Usando os fatores de escala dados em (63), o Laplaciano em coordenadas cilíndricas pode ser escrito como (verifique)

$$\nabla^2 = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (74)$$

O Laplaciano atua em campos escalares, produzindo novos campos escalares. Quando este novo campo escalar é nulo,  $\nabla^2 f = 0$ , se diz que o campo escalar  $f$  é “harmônico”. A equação diferencial  $\nabla^2 f = 0$  é conhecida como equação de Laplace.

### II.2.3. Cinemática

A partir do vetor posição, calculamos velocidade e aceleração (verifique),

$$\vec{r} = \rho \hat{e}_\rho + z \hat{k}, \quad (75)$$

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{\rho} \hat{e}_\rho + \rho \dot{\theta} \hat{e}_\theta + \dot{z} \hat{k}, \quad (76)$$

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = (\ddot{\rho} - \rho \dot{\theta}^2) \hat{e}_\rho + (\rho \ddot{\theta} + 2\dot{\rho} \dot{\theta}) \hat{e}_\theta + \ddot{z} \hat{k}. \quad (77)$$

## II.3. Coordenadas esféricas

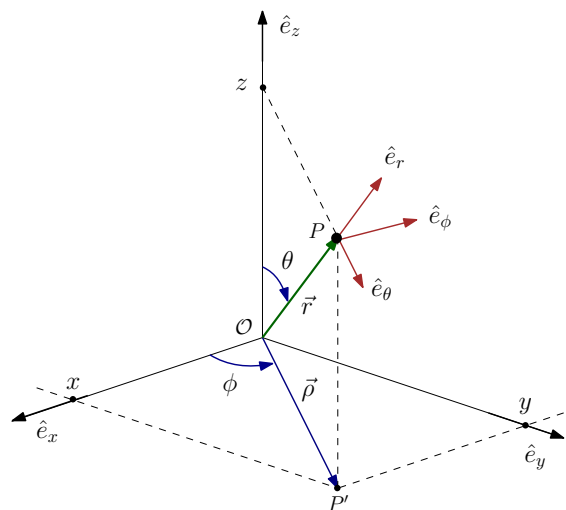


Figura 4. O sistema de coordenadas esféricas  $(r, \theta, \phi)$ , com  $r \geq 0$ ,  $0 \leq \theta \leq \pi$  e  $0 \leq \phi \leq 2\pi$ , relativo ao sistema cartesiano  $(x, y, z)$ . Em cada sistema de coordenadas, os versores são mutuamente ortogonais. A sequência  $\{\hat{e}_r, \hat{e}_\theta, \hat{e}_\phi\}$  obedece a regra da mão direita.

A Figura 4 mostra o sistema de coordenadas esférico  $(r, \theta, \phi)$ , com  $r \geq 0$ ,  $0 \leq \theta \leq \pi$  e  $0 \leq \phi \leq 2\pi$ , relativo ao sistema cartesiano  $(x, y, z)$ . Ambos são sistemas de coordenadas ortonormais tridimensionais. Os versores no sistema esférico na sequência  $\{\hat{e}_r, \hat{e}_\theta, \hat{e}_\phi\}$  obedecem a regra da mão direita com relação ao produto vetorial.

Note que o vetor posição  $\vec{r}$  na Figura 4, de acordo com a geometria plana, pode ser escrito na forma

$$\vec{r} = \vec{\rho} + \vec{z} = \rho \cos \phi \hat{e}_x + \rho \sin \phi \hat{e}_y + r \cos \theta \hat{e}_z, \quad \rho = r \sin \theta. \quad (78)$$

Quando comparamos este resultado com a forma cartesiana,  $\vec{r} = x \hat{e}_x + y \hat{e}_y + z \hat{e}_z$ , descobrimos como as componentes cartesianas do vetor posição dependem das coordenadas esféricas,

$$x = r \sin \theta \cos \phi, \quad y = r \sin \theta \sin \phi, \quad z = r \cos \theta. \quad (79)$$

Assim uma casca esférica de raio  $R$  é descrita em coordenadas esféricas fazendo  $r = R$  constante e variando as coordenadas angulares. Neste caso teremos  $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ .

Naturalmente, o vetor posição também pode ser escrito em termos dos versores do sistema esférico,

$$\vec{r} = r \hat{e}_r, \quad (80)$$

o que nos permite escrever o versor radial  $\hat{e}_r$  em coordenadas esféricas,

$$\hat{e}_r = \frac{\vec{r}}{r} = \sin \theta \cos \phi \hat{e}_x + \sin \theta \sin \phi \hat{e}_y + \cos \theta \hat{e}_z. \quad (81)$$

Sabemos que a taxa de variação de um versor é sempre perpendicular a ele. Assim,

$$\hat{e}_\theta = \frac{\partial \hat{e}_r}{\partial \theta} / \left\| \frac{\partial \hat{e}_r}{\partial \theta} \right\| = \cos \theta \cos \phi \hat{e}_x + \cos \theta \sin \phi \hat{e}_y - \sin \theta \hat{e}_z, \quad (82)$$

$$\hat{e}_\phi = \frac{\partial \hat{e}_r}{\partial \phi} / \left\| \frac{\partial \hat{e}_r}{\partial \phi} \right\| = -\sin \phi \hat{e}_x + \cos \phi \hat{e}_y. \quad (83)$$

Como mostra a Figura 4, o versor  $\hat{e}_\theta$  é tangente ao grande círculo (de raio  $r = \|\vec{r}\|$  e centrado na origem) contendo o ponto  $P$  e o versor  $\hat{e}_\phi$  é tangente ao círculo menor de raio  $\rho = r \sin \theta$  centrado em  $z$ , também contendo o ponto  $P$ . No ponto  $P$  estes dois círculos são ortogonais. Note que este pequeno círculo tem sua face perpendicular ao eixo  $Z$  e que, portanto, o versor  $\hat{e}_\phi$  está inteiramente no plano  $XY$ , como podemos ver em (83).

Podemos usar o vetor posição na forma (78) para calcular os fatores de escala,

$$h_r = \left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial r} \right\| = 1, \quad h_\theta = \left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} \right\| = r, \quad h_\phi = \left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \phi} \right\| = r \sin \theta. \quad (84)$$

Uma vez que os fatores de escala são conhecidos, podemos generalizar os resultados anteriores para calcularmos elementos de volumes, gradiente, divergente, rotacional, etc.

### II.3.1. Volumes elementares

Generalizando para 3D a forma padrão encontrada na Eq. (37), o deslocamento infinitesimal em coordenadas esféricas é (verifique)

$$d\vec{r} = h_r dr \hat{e}_r + h_\theta d\theta \hat{e}_\theta + h_\phi d\phi \hat{e}_\phi = dr \hat{e}_r + r d\theta \hat{e}_\theta + r \sin \theta d\phi \hat{e}_\phi, \quad (85)$$

cujo comprimento é

$$dl^2 = d\vec{r} \cdot d\vec{r} = h_r^2 dr^2 + h_\theta^2 d\theta^2 + h_\phi^2 d\phi^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2. \quad (86)$$

Observe em (85) que os fatores de escala podem ser interpretados como a projeção do vetor deslocamento infinitesimal em cada direção independente dividida pela diferencial da respectiva coordenada naquela direção (verifique).

A área elementar numa superfície esférica de raio  $r$  (constante) é obtida generalizando a Eq. (39) para o caso 3D (verifique),

$$dA = h_\theta h_\phi d\theta d\phi = r^2 \sin \theta d\theta d\phi. \quad (87)$$

Similarmente, o volume elementar é (verifique),

$$dV = h_r h_\theta h_\phi dr d\theta d\phi = r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi. \quad (88)$$

Note que a área e o volume de uma esfera de raio  $r$  são

$$A = \int dA = r^2 \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi = 4\pi r^2, \quad (89)$$

e

$$V = \int dV = \int_0^r r'^2 dr' \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi = \frac{4\pi}{3} r^3, \quad (90)$$

respectivamente, como esperávamos.

### II.3.2. Gradiente, divergente e rotacional

De acordo com o padrão estabelecido em (45), o gradiente em coordenadas esféricas é (verifique)

$$\vec{\nabla} = \frac{\hat{e}_r}{h_r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\hat{e}_\theta}{h_\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\hat{e}_\phi}{h_\phi} \frac{\partial}{\partial \phi} = \hat{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\hat{e}_\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\hat{e}_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi}. \quad (91)$$

Generalizando para 3D o padrão (51), o divergente de um campo vetorial em coordenadas esféricas é (verifique)

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{F} &= \frac{1}{h_r h_\theta h_\phi} \left[ \frac{\partial (h_\theta h_\phi F_r)}{\partial r} + \frac{\partial (h_\phi h_r F_\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial (h_r h_\theta F_\phi)}{\partial \phi} \right] \\ &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial (r^2 F_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial (\sin \theta F_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial F_\phi}{\partial \phi}. \end{aligned} \quad (92)$$



Similarmente, o rotacional de um campo vetorial em coordenadas esféricas é calculado adaptando o padrão (57) para 3D (verifique),

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \times \vec{F} &= \frac{1}{h_r h_\theta h_\phi} \begin{vmatrix} h_r \hat{e}_r & h_\theta \hat{e}_\theta & h_\phi \hat{e}_\phi \\ \partial_r & \partial_\theta & \partial_\phi \\ h_r F_r & h_\theta F_\theta & h_\phi F_\phi \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{r^2 \sin \theta} \begin{vmatrix} \hat{e}_r & r \hat{e}_\theta & r \sin \theta \hat{e}_\phi \\ \partial_r & \partial_\theta & \partial_\phi \\ F_r & r F_\theta & r \sin \theta F_\phi \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{r \sin \theta} \left( \frac{\partial(\sin \theta F_\phi)}{\partial \theta} - \frac{\partial F_\theta}{\partial \phi} \right) \hat{e}_r \\ &\quad + \frac{1}{r} \left( \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial F_r}{\partial \phi} - \frac{\partial(r F_\phi)}{\partial r} \right) \hat{e}_\theta \\ &\quad + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial(r F_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial F_r}{\partial \theta} \right) \hat{e}_\phi. \quad (93)\end{aligned}$$

Podemos reescrever também em coordenadas esféricas o Laplaciano dada na Eq. (73),

$$\begin{aligned}\nabla^2 &= \frac{1}{h_r^2} \left\{ \left[ \frac{\partial}{\partial r} \ln \left( \frac{h_\theta h_\phi}{h_r} \right) \right] \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} \right\} \\ &\quad + \frac{1}{h_\theta^2} \left\{ \left[ \frac{\partial}{\partial \theta} \ln \left( \frac{h_\phi h_r}{h_\theta} \right) \right] \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right\} \\ &\quad + \frac{1}{h_\phi^2} \left\{ \left[ \frac{\partial}{\partial \phi} \ln \left( \frac{h_r h_\theta}{h_\phi} \right) \right] \frac{\partial}{\partial \phi} + \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right\}. \quad (94)\end{aligned}$$

Usando os fatores de escala dados em (84), então o Laplaciano em coordenadas esféricas é (verifique)

$$\begin{aligned}\nabla^2 &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) \\ &\quad + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left[ \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right]. \quad (95)\end{aligned}$$

Vale observar que o potencial gravitacional, bem como o elétrico (basta trocar a massa por carga),

$$\varphi(r) = -\frac{MG}{r} = \frac{QG}{r}, \quad (96)$$

satisfaz a equação de Laplace (verifique),  $\nabla^2 \varphi(r) = 0$ . Portanto, os potenciais gravitacional e elétrico são harmônicos.

### II.3.3. Cinemática

Como mostrado na Figura 4, quando  $\vec{r}(t)$  descreve a posição  $P$  de um objeto em sua trajetória (parametrizada pelo tempo  $t$ ), os versores ( $\hat{e}_r, \hat{e}_\theta, \hat{e}_\phi$ ) também serão dependentes do tempo,

conforme indicado nas Eqs. (81)–(83). Assim (verifique),

$$\frac{d\hat{e}_r}{dt} = \dot{\theta} \hat{e}_\theta + \dot{\phi} \sin \theta \hat{e}_\phi, \quad (97)$$

$$\frac{d\hat{e}_\theta}{dt} = -\dot{\theta} \hat{e}_r + \dot{\phi} \cos \theta \hat{e}_\phi, \quad (98)$$

$$\frac{d\hat{e}_\phi}{dt} = -\dot{\phi} (\sin \theta \hat{e}_r + \cos \theta \hat{e}_\theta), \quad (99)$$

onde o ponto sobre as coordenadas angulares significa uma derivada total em relação ao tempo. Usando estas taxas de variação temporal, podemos expressar velocidade e aceleração em coordenadas esféricas (verifique):

$$\vec{r} = r \hat{e}_r, \quad (100)$$

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{r} \hat{e}_r + r \dot{\theta} \hat{e}_\theta + r \sin \theta \dot{\phi} \hat{e}_\phi, \quad (101)$$

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \text{faça você!} \quad (102)$$

### III. SÉRIE DE TAYLOR

Como calculamos senos, cossenos, exponenciais, funções transcendentais em geral? Mesmo quando estamos usando uma calculadora, qual é o procedimento utilizado? Ou então, suponha que conhecemos o valor de uma função  $f(x)$  e de suas derivadas em um determinado ponto  $x_0$ ,

$$f_0^{(k)} = f^{(k)}(x_0) = \left. \frac{d^k}{dx^k} f(x) \right|_{x=x_0}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (103)$$

com  $f_0^{(0)} = f_0 = f(x_0)$ . Suponha também que seja muito difícil calcular o valor desta mesma função em um outro ponto  $\bar{x}$ , vizinho a  $x_0$ ,  $\bar{x} = x_0 + \Delta x$ , mesmo que  $\Delta x = \bar{x} - x_0$  seja muito pequeno. Bem, nesta situação seria muito conveniente se pudéssemos calcular  $f(\bar{x})$ , mesmo que de forma aproximada, em termos de uma série de potências em  $\Delta x$  e com coeficientes dependentes apenas dos valores conhecidos de  $f$  e suas derivadas no ponto  $x_0$ , ou seja, conhecendo apenas  $f^{(k)}(x_0)$ . Quando a função  $f(x)$  é analítica (contínua e com todas as derivadas contínuas em  $x_0$ ), esta série existe,

$$\begin{aligned}f(\bar{x}) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (\bar{x} - x_0)^k \\ &= f(x_0) + f^{(1)}(x_0)(\bar{x} - x_0) + \frac{1}{2} f^{(2)}(x_0)(\bar{x} - x_0)^2 + \dots \quad (104)\end{aligned}$$

e é denominada de série de Taylor. Este é um dos resultados mais úteis em Matemática. É através de séries de Taylor que as funções transcendentais são calculadas.

Em geral, na prática, temos de parar (ou truncar) a soma presente na série de Taylor (104) após um número finito  $N$  de termos. O valor de  $N$  é determinado pela precisão que desejamos obter, que dependerá do quão pequeno é a diferença  $\Delta x = \bar{x} - x_0$ .

Como exemplo, vamos calcular a série de Taylor para as funções trigonométricas  $\sin \theta$  e  $\cos \theta$  em torno de  $\theta_0 = 0$ . Primeiro, precisamos calcular as derivadas destas duas funções.

Não é difícil perceber que estas derivadas podem ser escritas na forma geral (verifique)

$$\frac{d^{2k+1}}{d\theta^{2k+1}} \sin \theta = (-1)^k \cos \theta, \quad \frac{d^{2k}}{d\theta^{2k}} \sin \theta = (-1)^k \sin \theta, \quad (105)$$

e

$$\frac{d^{2k+1}}{d\theta^{2k+1}} \cos \theta = -(-1)^k \sin \theta; \quad \frac{d^{2k}}{d\theta^{2k}} \cos \theta = (-1)^k \cos \theta. \quad (106)$$

De acordo com a prescrição (104), precisamos calcular os valores destas derivadas em  $\theta = \theta_0 = 0$ ,

$$\left. \frac{d^{2k+1}}{d\theta^{2k+1}} \sin \theta \right|_{\theta=0} = (-1)^k, \quad \left. \frac{d^{2k}}{d\theta^{2k}} \sin \theta \right|_{\theta=0} = 0, \quad (107)$$

e

$$\left. \frac{d^{2k+1}}{d\theta^{2k+1}} \cos \theta \right|_{\theta=0} = 0, \quad \left. \frac{d^{2k}}{d\theta^{2k}} \cos \theta \right|_{\theta=0} = (-1)^k. \quad (108)$$

Assim, a série de Taylor para a função seno (cosseno) terá somente potências ímpares (pares) em  $\theta$  (verifique),

$$\sin \theta = \theta - \frac{1}{6}\theta^3 + \dots, \quad \cos \theta = 1 - \frac{1}{2}\theta^2 + \frac{1}{24}\theta^4 - \dots \quad (109)$$

Faça você algumas comparações numéricas usando pequenos valores para  $\theta$  (em radianos).

Como outro exemplo importante, vamos calcular a série de Taylor para a função exponencial  $e^{ax}$  em torno de  $x = 0$ , onde  $a$  é uma constante. As derivadas podem ser facilmente escritas na forma

$$\frac{d^k}{d\theta^k} e^{ax} = a^k e^{ax}, \quad \left. \frac{d^k}{d\theta^k} e^{ax} \right|_{x=0} = a^k. \quad (110)$$

Desta forma, a série de Taylor correspondente, segundo a prescrição (104), será

$$e^{ax} = 1 + ax + \frac{a^2}{2}x^2 + \frac{a^3}{3!}x^3 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{k!}x^k. \quad (111)$$

Em particular, vamos tomar  $a = i$ , onde  $i$  é a unidade imaginária ( $i^2 = -1$ ), e fazer  $x = \theta$  (medido em radianos). Devido às propriedades da unidade imaginária, a série de Taylor (111) pode ser reorganizada na forma

$$e^{i\theta} = \left(1 - \frac{1}{2}\theta^2 + \frac{1}{4!}\theta^4 + \dots\right) + i\left(\theta - \frac{1}{3!}\theta^3 + \dots\right), \quad (112)$$

onde percebemos a presença das séries de Taylor em (109) para as funções trigonométricas. Portanto,

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta \quad (113)$$

e, conseqüentemente, substituindo  $\theta$  por  $n\theta$ ,

$$e^{in\theta} = (\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta). \quad (114)$$

Estas relações serão muito úteis quando estivermos estudando oscilações e o efeito de ressonância. Note que a última igualdade em (114) é a famosa fórmula de Moivre (muito usada em trigonometria).

### Exercício 1

Determine a expressão para um termo genérico da série de Taylor em torno de  $x$  e escreva explicitamente os quatro primeiros termos não-nulos para cada uma das seguintes funções:

$$\begin{aligned} f(x) &= e^x, \\ g(x) &= \cos(x), \\ h(x) &= \sin(x). \end{aligned} \quad (115)$$

### Exercício 2

Mostre que qualquer número complexo  $z = x + iy$ , de módulo  $r = \sqrt{zz^*} = \sqrt{x^2 + y^2}$ , com  $z^* = x - iy$  (conjugado), pode ser representado por

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta), \quad (116)$$

com

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \tan \theta = \frac{y}{x}. \quad (117)$$

Use o Exercício 1 para mostrar que

$$e^{i\theta} = (\cos \theta + i \sin \theta). \quad (118)$$

### Exercício 3

(1) Escreva uma rotina computacional (use computação algébrica) para calcular a série de Taylor (104) de uma função arbitrária. (2) Teste sua rotina com as principais funções trigonométricas (seno, cosseno, etc.) e com a função exponencial. (4) Nestes testes, mostre no mesmo gráfico a função originalmente pré-definida dentro do ambiente computacional que estiver usando e pelo menos quatro séries de Taylor para cada função correspondentes a diferentes números  $N$  de termos usado na soma (104). (5) Faça uma animação mostrando como é o comportamento da série de Taylor em função da quantidade de termos  $N$  na série para cada caso. Lembre-se: o trabalho dignifica e faz bem ao caráter.