# Introdução aos Grupos de Movimento

Esmerindo Bernardes [1]
L.I.A. – Laboratório de Instrumentação Algébrica
Departamento de Física e Ciência dos Materiais
Instituto de Física de São Carlos
Universidade de São Paulo
www.lia.ifsc.usp.br

19 de Maio de 2016

[1] email: sousa@ifsc.usp.br

# Conteúdo

# Capítulo 1

# Simetria Axial

Você, quando criança, certamente já brincou de rodar em torno de si mesmo e experimentou a incapacidade de manter o equilíbrio ao parar de rodar. Nesta divertida brincadeira, estamos realizando rotações em torno de um eixo. Assim, não é um exagero afirmar que conhecemos bem uma rotação em torno de um eixo. Certamente este conhecimento é suficiente para qualquer criança efetuar com sucesso suas tarefas diárias obrigatórias: brincar e brincar. No entanto, este conhecimento não é suficiente para você, um futuro cientista, entender corretamente as leis da natureza, pois nos falta uma linguagem adequada, a Matemática, como disse Galileu, para descrevermos o movimento de rotação. É exatamente esta linguagem, denominada de grupos contínuos, que passaremos a construir em seguida. Espero que você participe desta construção com muito prazer, no mínimo semelhante ao prazer de uma criança executando suas brincadeiras favoritas. Como o objetivo deste texto é ser um guia e não uma obra de referência, definições formais não serão apresentadas, mas apenas atividades visando o aprendizado e, o mais importante, a sua participação efetiva. No final de cada capítulo, tem uma lista de exercícios. Sugiro que esta lista seja feita durante o estudo deste texto. Há também rotinas de computação simbólica feitas especialmente para auxiliar nos cálculos mais difíceis.

## 1.1 O grupo SO(2)

Considere uma rotação em torno de um eixo fixo. Concordo com você que um eixo apenas não basta, que iremos precisar de um sistema de coordenadas, também fixo, para então descrevermos matematicamente este eixo. Algum problema se escolhermos um sistema de coordenadas cartesiano $xyz$, onde o eixo $z$ coincida com o eixo de rotação? Muito bem, temos então uma rotação em torno do eixo $z$ de um sistema cartesiano fixo para ser descrita numa linguagem matemática apropriada ao nosso objetivo: entender as leis da natureza.

Fisicamente (nos dois sentidos) esperamos que haja objetos no plano $xy$, perpendicular ao eixo de rotação, que estejam rodando em torno do eixo $z$. A situação mais simples, certamente, é aquela onde a distância do objeto ao eixo de rotação permaneça constante durante todo o movimento de rotação (critério da simplicidade). Pronto, acabamos de construir uma caracterização física de uma rotação: a distância do objeto ao eixo de rotação é constante, isto é, o objeto executa um movimento circular centrado no eixo $z$. Note que usamos apenas nossas sensações e um critério de simplicidade.

Como uma linguagem matemática pode ser desenvolvida para atender às nossas necessidades? Podemos começar pelo início: um objeto no plano $xy$ é localizado pelo seu vetor posição, digamos $\mathbf{r}$, o qual pode ser descrito de duas formas (pelo menos): (1) pelas suas coordenadas $(x, y)$ ou (2) pelo seu módulo $r$ e pelo ângulo $\theta$ feito com o eixo $x$. Faça um desenho contendo o vetor $\mathbf{r}$ no plano $xy$ e as duas formas de representá-lo. A relação entre estas duas descrições é obtida através das relações trigonométricas do triângulo retangular contendo o vetor posição ao longo da hipotenusa:

$$x = r\cos\theta,\ y = r \operatorname{sen}\theta \quad \text{ou} \quad r = \sqrt{x^2 + y^2},\ \operatorname{tg}\theta = \frac{y}{x}. \tag{1.1}$$

Assim, de acordo com a interpretação física de uma rotação de um objeto em torno do eixo $z$, o ângulo $\theta$ definido em (1.1), varia com o tempo, enquanto o módulo $r$ é constante, mas note que tanto $x$ quanto $y$

variam com o tempo. O que aprendemos aqui?[1] Aprendemos que existem coordenadas mais adequadas a uma determinada situação física: as coordenadas $(r, \theta)$ são mais adequadas para descrever uma rotação em torno do eixo $z$, pois $r$ é uma constante. Novamente, o critério da simplicidade! O fato da coordenada $r$ ser constante é conhecido como simetria axial (de eixo). Mas, e a tão esperada descrição matemática desta rotação em torno do eixo $z$? Um pouco mais de paciência, por favor. Vamos chegar lá!

Ainda há espaço para refinarmos um pouco mais a notação usada em (1.1). Vamos denotar por $\mathbf{e}_1 = \mathbf{i}, \mathbf{e}_2 = \mathbf{j}$ e $\mathbf{e}_3 = \mathbf{k}$ os versores ortonormais de nosso sistema de coordenadas (fixo). Note que eu uso aqui letras cheias para representar vetores, mas você deve continuar usando aquelas flechinhas para escrever os mesmos vetores.[2] Seja então

$$\mathbf{r} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} = \sum_{i=1}^{2} x_i\,\mathbf{e}_i, \quad r^2 = \mathbf{r}\cdot\mathbf{r} = x^2 + y^2 \tag{1.2}$$

um vetor no plano $xy$, inicialmente fazendo um ângulo $\theta_0$ com o eixo $x$,

$$x_1 = x = r\cos\theta_0, \quad x_2 = y = r\,\mathrm{sen}\,\theta_0, \quad r^2 = x^2 + y^2. \tag{1.3}$$

Após uma rotação por um ângulo $\theta$, este mesmo vetor passa a ser descrito pelas coordenadas novas $\bar{x}$ e $\bar{y}$ (espero que você esteja me acompanhando com desenhos em seu caderno). Note que esta operação não modifica o comprimento do vetor $\mathbf{r}$, isto é, $\bar{r} = r$.

Qual a relação entre o conjunto das coordenadas antigas (sem barra) com o conjunto das coordenadas novas (com barra)? A relação entre estes dois conjuntos de coordenadas é obtida da geometria plana

$$\bar{x} = r\cos(\theta_0 + \theta), \quad \bar{y} = r\,\mathrm{sen}\,(\theta_0 + \theta). \tag{1.4}$$

Expandindo as funções trigonométricas em (1.4) e usando as relações dadas em (1.3), teremos (faça o Exercício 1),

$$\bar{x} = x\cos\theta - y\,\mathrm{sen}\,\theta, \quad \bar{y} = x\,\mathrm{sen}\,\theta + y\cos\theta. \tag{1.5}$$

Naturalmente, nesta linha, você já deve ter verificado os resultados em (1.5). Caso contrário, sugiro que você volte e faça esta verificação, ou seja, faça o Exercício 1. Divirta-se! Olhando para o resultado (1.5), podemos afirmar que uma rotação por um ângulo $\theta$ em torno do eixo $z$ corresponde a uma transformação de coordenadas, a qual preserva o módulo do vetor $\mathbf{r} = (x, y) = (r, \theta)$. Transformações de coordenadas fazem parte do vocabulário matemático; mais ainda, aquelas que preservam o módulo de vetores com componentes reais são denominadas de ortogonais. Portanto, do ponto de vista da matemática, uma rotação é uma transformação de coordenadas ortogonal. Qual é a origem do adjetivo "ortogonal"? Matemáticos não empregam adjetivos em vão. Assim, deve haver uma propriedade ligada a este adjetivo, como veremos mais adiante. Quais são as outras propriedades das transformações (1.5)? Você consegue dar nomes a pelo menos duas propriedades que podemos desejar verificar? A mim, estas transformações de aparência simples parecem desprovidas de quaisquer outras informações relevantes, mas, ao contrário do que parece, elas carregam consigo várias propriedades importantes, compartilhadas por todos os grupos de Lie, antecipando aqui um pedaço do final desta estória.

Para podermos prosseguir com maior comodidade, iremos introduzir uma notação matricial para as transformações ortogonais (1.5). O vetor $\mathbf{r}$ será representado por uma matriz coluna formada pelas componentes $x$ e $y$. Desta forma, a transformação de coordenadas (1.5) poderá ser representada por uma matriz quadrada 2×2 (verifique!):

$$\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\,\mathrm{sen}\,\theta \\ \mathrm{sen}\,\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \tag{1.6}$$

ou, numa notação mais compacta,

$$\bar{\mathbf{r}} = R\,\mathbf{r}, \quad \bar{x}_i = \sum_{j=1}^{2} R_{ij} x_j, \quad R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\,\mathrm{sen}\,\theta \\ \mathrm{sen}\,\theta & \cos\theta \end{pmatrix}. \tag{1.7}$$

[1] Esta é uma daquelas perguntas que você não tem a menor idéia do que responder, mas quando quem fez a pergunta dá a resposta, em geral concordamos com ela.

[2] Tem algo mais irritante que encontrar quantidades vetoriais escritas sem as flechinhas?

Assim, as transformações de coordenadas (1.5) podem ser identificadas com a matriz $R$ definida em (1.7), de quem os elementos de matriz dependem de um parâmetro real (o ângulo de rotação). Na linguagem das transformações de coordenadas, a matriz $R$ é denominada de operador. Este operador atua no vetor $\mathbf{r}$ rodando-o por um ângulo $\theta$ em torno do eixo $z$. Também se diz que a matriz dada em (1.7) representa o operador $R$. Como veremos em seguida, esta notação matricial facilita a identificação de várias propriedades das transformações (1.5). Note que, agora, devemos perguntar pelas propriedades da matriz $R$ definida em (1.7).

Primeiro, podemos observar em (1.5) e (1.7) que as novas componentes $\bar{x}_i$ dependem linearmente das antigas coordenadas $x_i$. Portanto, estas transformações são denominadas de lineares. Matematicamente, a propriedade de linearidade do operador rotação $R$ é escrita como (faça o Exercício 2)

$$R\,(a\mathbf{x} + b\mathbf{x}') = a\,R\,\mathbf{x} + b\,R\,\mathbf{x}', \quad a, b \in \mathbb{R}. \tag{1.8}$$

Isto significa que a ação de uma rotação em uma combinação linear de vetores é igual à mesma combinação linear das ações individuais da mesma rotação, com o eixo de rotação fixo, em cada vetor. Sugiro que você faça exemplos, com matrizes e derivadas, para se tornar familiar com a propriedade de linearidade, devido à sua importância em Física.

Segundo, puramente por argumentos físicos, podemos concluir que uma rotação em torno de um eixo fixo deve ter um período $2\pi$ e que sempre existe uma operação inversa correspondendo a uma rotação no sentido oposto $(-\theta)$. Estas outras duas propriedades também podem ser facilmente verificadas matematicamente usando a forma matricial dada em (1.7):

$$R(0) = R(2\pi) = I, \quad R^{-1}(\theta) = R(-\theta) = R^{\mathrm{T}}(\theta) \;\Rightarrow\; \det R = 1, \quad , \tag{1.9}$$

onde $I$ é a matriz identidade e $R^{\mathrm{T}}$ a matriz transposta, isto é, a matriz obtida pela troca de linhas por colunas (faça o Exercício 3). Da primeira destas propriedades podemos limitar os possíveis valores do ângulo $\theta$, denominado de parâmetro da transformação, ao intervalo real $0 \leq \theta < 2\pi$. O fato deste parâmetro $\theta$ ter um limite inferior e um limite superior acarreta outras propriedades ligadas ao grupo de Lie associado às transformações (1.5) (mas um pedaço do final da estória!). Numa linguagem técnica, se diz que $\theta$ é um parâmetro compacto. Isto empresta um outro adjetivo à transformação (1.5): compacta. Naturalmente, o operador $R$ correspondente, (1.7), também pode ser dito compacto, além de ortogonal. A segunda propriedade em (1.9) nos ensina que uma matriz ortogonal tem sempre a sua inversa determinada pela operação de transposição, isto é, a troca de linhas por colunas. Este é um resultado que vale para qualquer matriz ortogonal. Para ressaltar a importância deste resultado, pense na tarefa de inverter uma matriz de ordem 4! Sim, muito difícil, mas esta tarefa é enormemente reduzida se esta mesma matriz for ortogonal. Concorda? Outra operação que é também simplificada é a obtenção do determinante de uma matriz ortogonal: o seu quadrado é sempre igual a um (prove!). Devagar! Você escreveu $\det R = 1$ em (1.9). E o valor negativo? − Você pode observar. De fato não queremos $\det R = -1$. Veja a justificativa no quarto parágrafo abaixo, aquele que começa com "Sobre a escolha do sinal...". Mas não tenha pressa de ir até lá, continue trabalhando normalmente. Note que todas as propriedades sobre ortogonalidade, indicadas em (1.9) e mencionadas acima, estão presentes na matriz (1.7). Veremos mais adiante que uma matriz ortogonal possui autovetores perpendiculares (ortogonais). É nesse fato que está a origem do adjetivo "ortogonal". Caso você não se lembre desses fatos sobre Álgebra Linear, não se desespere: aguarde um pouco mais até o final da próxima seção. Lá você terá uma ótima oportunidade de calcular autovetores e seus autovalores.

Outra propriedade importantíssima é o fato de podermos combinar duas rotações arbitrárias para produzir uma terceira (faça o Exercício 3):

$$R(\theta)R(\theta') = R(\theta')R(\theta) = R(\theta + \theta') = R(\theta''), \quad \theta'' = \xi(\theta, \theta') = \theta + \theta'. \tag{1.10}$$

Esta expressão é a descrição matemática do que observamos fisicamente, ou seja, uma rotação em torno de um eixo fixo por um ângulo $\theta$ seguida de outra por um ângulo $\theta'$ é equivalente a uma única rotação pelo ângulo $\theta + \theta'$. Pergunta: este fato também pode ser verificado matematicamente usando a representação matricial (1.7)? Como você já deve ter verificado, a matriz (1.7) satisfaz plenamente a propriedade (1.10). Não deixe de notar também que, neste caso, o produto matricial $R(\theta)R(\theta')$ é comutativo, isto é, $R(\theta)R(\theta') = R(\theta')R(\theta)$, como era esperado por argumentos físicos, uma vez que o eixo de rotação está fixo.[3] Você pode realizar um

[3] Em geral o produto de matrizes não é comutativo. Outro resultado de Álgebra Linear.

experimento neste exato instante, com livros ou canetas, para comprovar que a composição (produto) de duas rotações em torno do mesmo eixo é abeliana. Isto vale somente para um eixo fixo. Neste caso, o operador linear $R(\theta)$, representando uma rotação por um ângulo $\theta$ em torno de um eixo fixo, é dito ser comutativo (ou abeliano). Note também que $\theta''$ em (1.10) é uma função contínua dos parâmetros antigos $\theta$ e $\theta'$. Esta é uma condição para definirmos um grupo de Lie (mais um pedacinho do final da estória). Outra propriedade também decorrente da evidência física é a associatividade (faça o Exercício 3):

$$\big[R(\theta)R(\theta')\big]R(\theta'') = R(\theta)\big[R(\theta')R(\theta'')\big]. \tag{1.11}$$

Em geral, o produto usual entre matrizes é associativo, mas "mãos-a-obra!", verifique isto explicitamente para a matriz (1.7). Neste caso, computação simbólica é indispensável!

Hora de contabilizar o que aprendemos até aqui. Em suma, aprendemos que uma rotação em torno de um eixo fixo pode ser definida como sendo uma transformação de coordenadas, linear e ortogonal, dependente em um parâmetro real compacto (o ângulo de rotação). Vimos também que esta transformação pode ser representada por matrizes ou operadores lineares ortogonais; veja (1.7). Vimos também que tal transformação admite uma inversa e uma identidade; confira (1.9). Além disto, vimos que o produto (ou composição) de duas rotações é outra rotação e que este produto (comutativo) satisfaz a propriedade de associatividade; veja (1.10) e (1.11), respectivamente. Estas últimas quatro propriedades são suficientes para definirmos uma estrutura de grupo: um conjunto de objetos com um produto associativo definido entre dois de seus elementos que seja fechado, isto é, o resultado deve estar também contido no conjunto original. Além disto, deve haver um, e apenas um, elemento neutro em relação a este produto, denominado de identidade. Deve existir também um elemento inverso para cada elemento, sendo que ambos, o elemento e o seu inverso, devem estar contidos no conjunto original.

No presente caso, temos o conjunto (infinito) de todas as transformações lineares ortogonais (seja na forma de operadores ou de matrizes). Este conjunto é formado tomando-se todos os valores do parâmetro contínuo $0 \leq \theta \leq 2\pi$ e constitui o grupo (contínuo) das rotações por um ângulo $\theta$ em torno de um eixo fixo. O produto que define o grupo é a composição de transformações lineares ou, equivalentemente, o produto matricial usual. Portanto, este é um exemplo de um grupo contínuo. Naturalmente, o adjetivo contínuo está associado ao fato de cada elemento $R(\theta)$ deste grupo depender de um parâmetro contínuo. Como veremos, há grupos contínuos que dependem de mais de um parâmetro contínuo. Quando o produto de dois elementos de um grupo contínuo é efetuado, um terceiro elemento deve ser obtido de acordo com a definição de um grupo. Isto é exemplificado aqui pela propriedade (1.10). Pois bem, vale observar que os parâmetros deste terceiro elemento poderão ser funções contínuas dos parâmetros dos outros dois elementos ou não. Quando ela for contínua, como no presente caso (veja a (1.10)), teremos um grupo de Lie, em homenagem ao matemático Marius Sophus Lie. É muito instrutivo para você procurar conhecer um pouco mais sobre os personagens desta nossa estória. Sugiro o *site* The MacTutor History of Mathematics (www-history.mcs.st-and.ac.uk).

Sobre a escolha do sinal positivo do determinante em (1.9): todo grupo contínuo deve conter a identidade. A identidade (pense em matrizes) tem determinante igual a $+1$ sempre e ela é obtida variando os parâmetros do grupo de forma contínua. Acontece que o sinal do determinante é uma característica intrínseca de qualquer matriz, independentemente dela depender de um certo número de parâmetros contínuos (outro resultado de Álgebra Linear). Então todas as matrizes que possuem determinante negativo não estão conectadas à identidade por transformações contínuas, pois elas não poderão ser deformadas continuamente até encontrarmos a identidade (de determinante positivo). Portanto, teremos uma parte onde todos os elementos de um grupo de Lie têm determinante $+1$ e estão conectados à identidade e uma outra parte onde os elementos do grupo têm determinante -1 e não estão conectados à identidade. A conexão entre os elementos com determinante $+1$ e -1 é feita através de reflexões. Para simplificar nossa tarefa, um primeiro contato com grupos contínuos, trabalharemos apenas com a parte conectada à identidade. Muito bem! mas que estória é esta de nos fazer pensar nos elementos de um grupo de Lie como sendo matrizes? De fato, existe um teorema, conhecido como Teorema de Ado, o qual garante que qualquer elemento de um grupo de Lie pode ser representado por uma matriz. Reencontraremos o mesmo Ado em breve!

Adiantando o final de uma outra estória, em geral, os grupos de Lie formados por transformações lineares ortogonais são denotados por $\mathrm{SO}(2n)$ ou por $\mathrm{SO}(2n+1)$, conforme a dimensão do espaço onde ocorrem as transformações seja par $(2n)$ ou ímpar $(2n+1)$, respectivamente, e $n$ é um inteiro positivo não-nulo. A letra S (inicial de *special*) significa que o determinante de cada uma das matrizes representando os elementos destes grupos é sempre igual à unidade. No presente caso, o grupo SO(2) é a descrição matemática da simetria axial, ou seja, das rotações em torno de um eixo fixo.

Que tal um exemplo de uma simetria axial ocorrendo naturalmente em Física? Considere uma molécula linear disposta ao longo do eixo $z$. Os elétrons deste sistema, considerando que os núcleos sejam muito mais lentos que os elétrons, sentem a presença de um potencial que depende apenas da distância até o eixo $z$. Portanto, este sistema exibe uma simetria axial (invariância do potencial por rotações em torno do eixo $z$). O conhecimento deste fato é útil ao experimentalista? Estou vendo que você está com um excelente arsenal de perguntas. Sim, o experimentalista se beneficia muito deste fato, pois simetrias implica em leis físicas, denominadas de leis de conservação. Para deixá-lo ainda mais curioso, este é um resultado geral conhecido como teorema de Nöether (a história pessoal desta brilhante matemática merece ser conhecida!). Claro, tudo isto é o início de uma nova estória...

A partir deste exemplo dado pela simetria axial, podemos suspeitar que existam outros grupos de Lie. De fato, transformações lineares em geral formam um grupo contínuo e é possível existir apenas três tipos delas: (1) as transformações unitárias que formam os grupos de Lie SU($n$); (2) as transformações ortogonais que formam os grupos de Lie SO($2n$) e SO($2n+1$); (3) as transformações simplécticas que formam os grupos de Lie Sp($2n$). Além destes, conhecidos como grupos clássicos, é possível haver apenas outros cinco grupos particulares, denominados assim de excepcionais. Estes são denotados por $\mathrm{E}_6$, $\mathrm{E}_7$, $\mathrm{E}_8$, $\mathrm{F}_4$ e $\mathrm{G}_2$. Esta foi a classificação dos grupos de Lie, iniciada por Lie e Killing no final do Século 19 e finalizada por Cartan no início do Século 20. Não deixe de conhecer um pouquinho sobre Killing e Cartan (principalmente este!).

Antes de passarmos para a próxima seção, vamos olhar novamente para a rotação representada matricialmente em (1.6)–(1.7). Podemos usar a mesma geometria plana que forneceu as coordenadas novas em (1.4) para determinar as novas coordenadas dos versores $\mathbf{e}_1$ e $\mathbf{e}_2$ (verifique),

$$\bar{\mathbf{e}}_1 = \cos\theta\,\mathbf{e}_1 + \operatorname{sen}\theta\,\mathbf{e}_2, \quad \bar{\mathbf{e}}_2 = -\operatorname{sen}\theta\,\mathbf{e}_1 + \cos\theta\,\mathbf{e}_2. \tag{1.12}$$

Curiosamente, estamos vendo que os versores transformam de forma diferente, $(\bar{\mathbf{e}}_1, \bar{\mathbf{e}}_2) = R^{\mathrm{T}}(\theta)\,(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$, em relação às coordenadas $\mathbf{r} = (x, y)$, $\bar{\mathbf{r}} = R(\theta)\,\mathbf{r}$. E é isto mesmo! Os versores da base têm um comportamente diferente das coordenadas. Obviamente podemos perguntar qual forma iremos usar para representar matricialmente nossa rotação, $R(\theta)$ ou a sua transposta $R^{\mathrm{T}}(\theta)$? Ficaremos com $R(\theta)$. Porém, não poderemos esquecer que a matriz $R(\theta)$ dada em (1.6)–(1.7) atua no "espaço" das coordenadas (também conhecido como espaço das configurações).

Quando usamos matrizes para representar um elemento do grupo, é imperativo explicitar onde estas matrizes atuam. Desta forma, dada a representação matricial atuando no espaço das coordenadas, ela induz uma outra ação no espaço dos versores da base,

$$\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} = R(\theta) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad (\bar{\mathbf{e}}_1\ \bar{\mathbf{e}}_2) = (\mathbf{e}_1\ \mathbf{e}_2) R(\theta), \tag{1.13}$$

onde

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}. \tag{1.14}$$

Note que os versores foram colocados como elementos de uma matriz linha para não termos de usar a transposta da matriz de rotação (um artifício engenhoso) na equação à direita em (1.13). A ação nos versores da base coincide com a ação no espaço de funções. De fato, seja $\bar{h} = gh$ a função resultante da ação de $g$ (um dos elementos de um grupo) sobre uma determinada função $h = h(\mathbf{r})$ e seja $\bar{\mathbf{r}} = g\mathbf{r}$ a ação no espaço das configurações. A ação no espaço das funções é definida impondo

$$h(\mathbf{r}) = \bar{h}(\bar{\mathbf{r}}) \implies gh(\mathbf{r}) = h(g^{-1}\mathbf{r}). \tag{1.15}$$

Assim, quando expressarmos coordenadas cartesianas em termos de coordenadas polares, $x = r\cos\alpha = \mathsf{x}(r,\alpha)$ e $y = r\operatorname{sen}\alpha = \mathsf{y}(r,\alpha)$, como fizemos no início desta seção, devemos atuar com a rotação $R(\theta)$ (em torno do eixo $z$) nestas funções $\mathsf{x}(r,\alpha)$ e $\mathsf{y}(r,\alpha)$ segundo a regra em (1.15):

$$R(\theta)\mathsf{x}(r,\alpha) = \mathsf{x}(r,\alpha-\theta) = r\cos(\alpha-\theta) = \cos\theta\,x + \operatorname{sen}\theta\,y, \tag{1.16}$$

e

$$R(\theta)\mathsf{y}(r,\alpha) = \mathsf{y}(r,\alpha-\theta) = r\operatorname{sen}(\alpha-\theta) = -\operatorname{sen}\theta\,x + \cos\theta\,y. \tag{1.17}$$

Podemos ver em (1.16)–(1.17) que a rotação $R(\theta)$ é representada pela transposta da matriz apresentada na Eq. (1.14), portanto, sua ação no espaço das funções é idêntica a sua ação nos versores da base do sistema de coordenadas, como mostrado pela equação à direita em (1.13). Note também que tomamos o cuidado de grafar de forma diferente as funções $\mathsf{x}(r,\alpha)$ e $\mathsf{y}(r,\alpha)$ para diferenciá-las das coordenadas $(x,y)$. Agir diretamente nas coordenadas $(x,y)$ não é a mesma coisa que agir sobre estas mesmas coordenadas enquanto vistas como as funções $\mathsf{x}(r,\alpha) = r\cos\alpha$ e $\mathsf{y}(r,\alpha) = r\,\mathrm{sen}\,\alpha$. Que confusões não tomem forma!

## 1.2 A álgebra do grupo SO(2)

Espere um pouco, um grupo de Lie é, em geral, um conjunto infinito. Então deve ser extremamente difícil lidar com um grupo de Lie! – você pode observar. De fato, é um grupo infinito. Mas não temos dificuldade alguma (além do usual) em trabalhar com ele. Uma das observações geniais feita por Lie é o fato de podermos estudar quase todas as propriedades de um grupo de Lie (com infinitos elementos) a partir de um conjunto finito e muito reduzido de outros elementos, definidos em torno da identidade do grupo, denominados de **geradores**. Estes geradores, os quais não fazem parte do grupo, formam uma **álgebra**, isto é, um espaço vetorial com um produto entre seus elementos,[4] denominada de **álgebra de Lie** associada a um determinado grupo de Lie. Em geral, as álgebras de Lie associadas aos grupos de Lie clássicos são denotadas pelas mesmas letras em forma minúscula. As álgebras associadas aos grupos excepcionais não possuem uma denominação especial. Vejamos a seguir como construir uma álgebra de Lie, usando o grupo SO(2) como protótipo. Isto significa que teremos de encontrar os elementos da álgebra so(2) associada ao grupo SO(2), verificar que eles formam um espaço vetorial e definir um produto entre eles.

Como visto anteriormente, a identidade do grupo SO(2) é dada por $\theta = 0$, $R(0) = I$. Usando a forma matricial encontrada em (1.7), uma transformação infinitesimal $R(\Delta\theta)$, com $\Delta\theta \to 0$, pode ser escrita também na seguinte forma, graças ao Teorema de Taylor[5], isto é, expandindo as funções trigonométricas em torno de zero e retendo somente os termos em primeira ordem (faça o Exercício 4):

$$R(\Delta\theta) = I - i\Delta\theta\, J_z, \quad J_z = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}. \tag{1.18}$$

A unidade imaginária $i = \sqrt{-1}$ foi introduzida aqui por mera conveniência de tornar a matriz $J_z$ hermitiana, $J_z^\dagger = (J_z^{\mathrm{T}})^* = J_z$; caso contrário ela seria anti-simétrica, $J_z^{\mathrm{T}} = -J_z$ (tem mais comentários logo adiante). Note que a matriz $J_z$ definida aqui não depende do parâmetro do grupo. Como você já notou, o simples fato de termos dado um nome a esta matriz nova, significa que ela terá um papel importante. De fato, ela formará a álgebra do grupo SO(2). Veremos também o significado do sub-índice $z$. Outra maneira de obter $J_z$? Sim, ela pode ser obtida considerando-se uma rotação arbitrária na forma $R(\theta + \Delta\theta)$:

$$R(\theta + \Delta\theta) = R(\theta)R(\Delta\theta) = R(\theta)(I - i\Delta\theta\, J_z), \tag{1.19}$$

onde usamos (1.18) e a propriedade (1.10). Deste resultado, podemos definir uma equação diferencial para $R$ e, subseqüentemente, determinar $J_z$:

$$\lim_{\Delta\theta\to 0} \frac{R(\theta + \Delta\theta) - R(\theta)}{\Delta\theta} = \frac{dR}{d\theta} = -iRJ_z. \tag{1.20}$$

Assim, calculando os dois lados desta equação na identidade ($\theta = 0$) e lembrando que $R|_{\theta=0} = I$, podemos definir a matriz $J_z$ associada ao parâmetro $\theta$ (faça o Exercício 5):

$$J_z = i\left.\frac{dR}{d\theta}\right|_{\theta=0}. \tag{1.21}$$

Uma vez que $J_z$ não depende do parâmetro $\theta$, então a solução da equação diferencial encontrada em (1.20) é imediata:

$$R(\theta) = \mathrm{e}^{-i\theta J_z}, \tag{1.22}$$

[4] Você já reparou que, na maioria das vezes, não aprendemos o que é uma álgebra no curso de Álgebra Linear? Pois bem, é simplesmente um espaço vetorial com um produto definido entre dois de seus elementos. Tem uma discussão mais detalhada nos apêndices que pode ser útil.

[5] Tem um teorema mais útil que este? Saudações ao Taylor!

onde a constante de integração foi determinada usando a condição $R(0) = I$ e a exponencial de um operador (ou matriz) arbitrário $A$ é definida, novamente, pelo Teorema de Taylor:

$$\mathrm{e}^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}. \tag{1.23}$$

Portanto, podemos afirmar que a matriz $J_z$ "gera" o grupo SO(2) através da aplicação exponencial (1.22). Como a rotação gerada é em torno do eixo $z$, isto é indicado pelo sub-índice $z$ do gerador $J_z$. Os resultados (1.21) e (1.22) são válidos para qualquer grupo de Lie: o primeiro define os elementos da álgebra de Lie associada ao grupo de Lie e o segundo estabelece uma relação entre o grupo e a sua álgebra. Em palavras, o grupo é a exponencial da álgebra. Espere um pouquinho! Toda série de Taylor tem um intervalo de validade! Então a relação (1.22) deve valer apenas para os elementos do grupo próximos à identidade. Certo? Sim e não! Primeiro observe que a série (1.23) é a própria definição da função exponencial. Portanto, ela vale para qualquer intervalo. Esta mesma observação vale para as funções trigonométricas. Mas também é verdade que algumas propriedades do grupo não podem ser obtidas através da aplicação exponencial (1.22). Adivinhe! não abordaremos tal situação aqui. Outra estória...

Alguns outros comentários. Usamos a definição de derivada em (1.20), assunto dos cursos de cálculo; definimos a exponencial de um operador (ou matriz) em (1.23) e resolvemos uma equação diferencial de primeira ordem (1.20), assunto dos cursos de equações diferenciais, simplesmente respondendo à pergunta: quem é a função cuja primeira derivada é proporcional a ela mesma? Não estranhe o fato de estarmos derivando matrizes, pois, na verdade, estamos derivando seus elementos, os quais são funções de $\theta$. Ou seja, os parágrafos anteriores estão recheados de recordações. Talvez uma pequena pausa para assentar tudo isto seja necessária. Lembre-se: sempre temos computação simbólica para nos auxiliar!

E a álgebra de Lie? Calma, estamos chegando lá! Suponha uma situação mais geral onde o grupo de Lie apresente mais parâmetros. Então haveria um gerador associado a cada parâmetro, segundo a definição (1.21). Lie mostrou que o conjunto (finito) das matrizes definidas em (1.21) forma uma álgebra em relação ao produto $*$ definido por

$$J_i * J_k = [J_i, J_k] = J_i J_k - J_k J_i, \tag{1.24}$$

conhecido como produto de Lie. Note que o produto de Lie (1.24) é sempre anti-simétrico e linear (você é capaz de provar esta última afirmação sobre a linearidade. Então prove, não perca tempo!). Naturalmente, para o presente caso $J_z * J_z = 0$, isto é, a álgebra de Lie so(2), associada ao grupo SO(2), tem um único elemento e, conseqüentemente, é abeliana (comutativa). Em geral, a dimensão de uma álgebra de Lie, isto é, a quantidade de seus elementos independentes, é sempre igual ao número de parâmetros do grupo de Lie correspondente, o qual continua sendo gerado por uma aplicação exponencial semelhante àquela dada em (1.22). Elaborar um pouco mais? Muito bem, seja $A_k$ ($k = 1, \ldots, r$) os elementos da álgebra $\mathcal{A}$ associada a um grupo de Lie $G$ com $r$ parâmetros contínuos $\omega_k$. Então, cada elemento $g$ do grupo $G$ é gerado por

$$g(\omega) = \exp(\sum_{k=1}^{r} \omega_k A_k) \tag{1.25}$$

e, conseqüentemente, cada gerador $A_k$ é obtido por

$$A_k = \frac{\partial g(\omega)}{\partial \omega_k}\Big|_{\omega=0}. \tag{1.26}$$

Existe um teorema conhecido como Teorema de Ado (aquele mesmo!) o qual garante que qualquer elemento de uma álgebra de Lie pode ser representado por matrizes. Como sabemos de Álgebra Linear que matrizes formam um espaço vetorial, isto é, sabemos fazer combinações lineares com matrizes, então o produto de Lie (1.24), conhecido também por comutador, define uma álgebra.

Mesmo procedimento anterior: quais são as propriedades do gerador $J_z$ definida em (1.18)? Elas são: (1) ele (isto é, a matriz) tem traço (soma dos elementos da diagonal) nulo. Isto é uma conseqüência do determinante da rotação $R$ ser igual a um e da aplicação exponencial (1.22)[6]; (2) ele é hermitiano (faça o Exercício 6),

$$J_z^\dagger = (J_z^{\mathrm{T}})^* = J_z, \tag{1.27}$$

[6] Mais um resultado de Álgebra Linear: $\det \mathrm{e}^A = \mathrm{e}^{\operatorname{tr} A}$, o qual pode verificado explicitamente com as matrizes que temos aqui. Use computação simbólica!

onde T simboliza a operação de transposição (troca de linhas por colunas) e $*$ representa a operação de conjugação complexa (troca da unidade imaginária $i = \sqrt{-1}$ por $-i$). Isto é uma conseqüência de $R$ ser ortogonal e da aplicação exponencial (1.22)[7]. (3) Aprendemos em Álgebra Linear que os autovalores de qualquer matriz hermitiana devem ser reais e que seus autovetores devem ser ortogonais. Sabemos também que a matriz $J_z$ é hermitiana. Então vamos encontrar seus autovetores e seus autovalores e verificar estes resultados. Vamos denotar os autovalores por $\lambda_k$ (caso haja mais de um deles) e por $|\lambda_k\rangle$ os respectivos autovetores. Esta é uma notação emprestada da Mecânica Quântica. O vetor $|v\rangle$ é denominado de "ket" e o vetor $\langle v|$ de "bra". A dupla bra+ket, $\langle u|v\rangle$, mais conhecida como *bracket*, forma o produto escalar entre os vetores $|u\rangle$ e $|v\rangle$. Iremos usar mais sutilezas desta notação em breve. Agradeça ao Dirac! Então da definição de autovalores, devemos ter

$$J_z\,|\lambda_k\rangle = \lambda_k\,|\lambda_k\rangle \;\leftrightarrow\; \langle\lambda|J_z^\dagger = \lambda_k^*\,\langle\lambda|. \tag{1.28}$$

Como proceder? Simples! Represente o vetor $|\lambda\rangle$ (vamos ignorar os índices para não sobrecarregar a notação) por um matriz coluna (ou linha), com elementos arbitrários, de mesma dimensão da matriz $J_z$:

$$|\lambda\rangle = \begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix} \;\leftrightarrow\; \langle\lambda| = \begin{pmatrix}\alpha^* & \beta^*\end{pmatrix}, \quad \alpha,\beta\in\mathbb{C}. \tag{1.29}$$

Note a relação entre um bra e um ket: quando um ket é associado a uma matriz coluna (vetor), como neste caso, o bra corresponde então ao transposto conjugado, ou seja, $|\lambda\rangle^\dagger = \langle\lambda|$. De fato, isto foi o que observamos em (1.29). No entanto, nem sempre bras e kets serão associados com matrizes linhas (colunas). Isto significa que a relação entre bras e kets deve ser mantida em um nível mais abstrato:

$$\alpha|a\rangle \;\leftrightarrow\; \alpha^*\langle a|. \tag{1.30}$$

Assim, a definição (1.28) transforma-se em um sistema homogêneo de equações lineares:

$$\big(J_z - \lambda\,I\big)\,|\lambda\rangle = 0. \tag{1.31}$$

Para que este sistema homogêneo tenha solução, então o determinante da matriz $J_z - \lambda\,I$, com a matriz $J_z$ definida em (1.18), deve ser nulo. Esta condição determina os autovalores $\lambda_k$:

$$\det\big(J_z - \lambda\,I\big) = 0 \;\Rightarrow\; \lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1. \tag{1.32}$$

Note que estes autovalores são reais. Esta é uma propriedade geral de operadores hermitianos: seus autovalores são reais sempre. Veremos outras propriedades interessantes de operadores hermitianos a seguir. Tendo os autovalores $\lambda_k$, podemos determinar as componentes $\alpha$ e $\beta$ dos autovetores correspondentes usando o sistema (1.31). De fato, podemos determinar apenas uma relação entre $\alpha$ e $\beta$, pois o sistema é indeterminado (verifique!):

$$|\lambda_1\rangle = \alpha_1\begin{pmatrix}1\\ i\end{pmatrix} \;\leftrightarrow\; \langle\lambda_1| = \alpha_1^*\begin{pmatrix}1 & -i\end{pmatrix}, \quad |\lambda_2\rangle = \alpha_2\begin{pmatrix}1\\ -i\end{pmatrix} \;\leftrightarrow\; \langle\lambda_2| = \alpha_2^*\begin{pmatrix}1 & i\end{pmatrix}. \tag{1.33}$$

Preste atenção em como a notação (ou desenho) de bras e kets é útil. O primeiro exemplo é um produto escalar. Caso seja desejado, as constantes $\alpha_k$ podem ser determinadas impondo que os autovetores $|\lambda_k\rangle$ estejam normalizados. Observando os vetores $|\lambda_k\rangle$ em (1.33), percebemos que a norma deles pode ser calculada por um produto matricial (quando os vetores são complexos, um deles deve ser conjugado para que o produto escalar seja calculado corretamente), ou seja, vamos impor $\langle\lambda_k|\lambda_k\rangle = 1$ para determinarmos as constantes arbitrárias $\alpha_i$. Então,

$$\langle\lambda_1|\lambda_1\rangle = |\alpha_1|^2\begin{pmatrix}1 & -i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ i\end{pmatrix} = |\alpha_1|^2(1+1) = 1 \;\Rightarrow\; |\alpha_1| = \frac{1}{\sqrt{2}}. \tag{1.34}$$

Repita este procedimento para encontrar $|\alpha_2| = \alpha_1$. Determinamos assim apenas o módulo das constantes $\alpha_k$, e as fases? Bem as fases, estas não temos como determiná-las! mas não se assuste! isto significa que

[7] Outro resultado de Álgebra Linear: $(\mathrm{e}^{A})^{\mathrm{T}} = \mathrm{e}^{A^{\mathrm{T}}}$. Note que a unidade imaginária $i$ aparece na definição (1.21) e na aplicação exponencial (1.22) com o sinal negativo. Isto torna real a exponencial (1.22).

temos a liberdade de escolher um valor para a fase. Então, simplesmente, vamos escolher uma fase unitária. Verifique então que os autovetores $|\lambda_k\rangle$ em (1.33) são ortogonais: $\langle\lambda_1|\lambda_2\rangle$. Esta é outra propriedade geral de um operador hermitiano: seus autovetores são ortogonais sempre. Podemos verificar agora que a matriz $M$ formada pelos autovetores $|\lambda_k\rangle$ (simplesmente justaponha as matrizes colunas $|\lambda_k\rangle$ para formar uma matriz $2\times 2$) é uma matriz unitária, isto é, a sua inversa é obtida por uma conjugação hermitiana (uma matriz ortogonal é a versão real de uma matriz hermitiana):

$$M = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}, \quad M^{-1} = M^{\dagger}. \tag{1.35}$$

Esta matriz diagonaliza a matriz $J_z$:

$$M^{-1}J_zM = \Lambda, \quad \Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{1.36}$$

Note que $\Lambda$ é uma matriz diagonal contendo os autovalores $\lambda_k$ na sua diagonal. (4) Finalmente, verifique que as potências pares e ímpares da matriz $J_z$ são (faça os Exercícios 7 e 8)

$$J_z^{2k} = I, \quad J_z^{2k+1} = J_z, \tag{1.37}$$

respectivamente. Isto deve ser verificado diretamente da matriz (1.18). (5) Os resultados (1.37) nos permite escrever também que (prove!)

$$\Lambda^k = (M^{-1}J_zM)^k = M^{-1}J_z^kM. \tag{1.38}$$

Este resultado, por sua vez, nos permite verificar que (6) a matriz unitária $M$ também diagonaliza a rotação $R(\theta)$ definida em (1.7):

$$M^{-1}RM = \mathrm{e}^{-i\theta M^{-1}J_zM} = \mathrm{e}^{-i\theta\Lambda} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-i\theta} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{+i\theta} \end{pmatrix}. \tag{1.39}$$

Demonstre isto usando a série de Taylor (1.23) e a propriedade (5) acima (faça o Exercício 9).

Disse anteriormente que a notação (desenho) de bras e kets é realmente útil. O primeiro exemplo foi um produto escalar, onde a propriedade

$$\langle a|b\rangle = \langle b|a\rangle^* \tag{1.40}$$

pode ser verificada imediatamente em (1.33). (Verifique!) Pois bem, vejamos outro exemplo, considerando ainda os bras e kets em (1.33), devidamente normalizados. Faça agora o produto matricial $|\lambda\rangle\langle\lambda|$:

$$|\lambda_1\rangle\langle\lambda_1| = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -i \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix}, \quad |\lambda_2\rangle\langle\lambda_2| = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & i \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}. \tag{1.41}$$

Muito bem, agora some estes resultados:

$$|\lambda_1\rangle\langle\lambda_1| + |\lambda_2\rangle\langle\lambda_2| = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{1.42}$$

Eureka! obtivemos a matriz identidade! Isto deve ser comemorado, pois é um resultado geral: os autovetores de uma matriz hermitiana ($J_z$ neste caso) podem ser usados para escrevermos a matriz identidade. No jargão matemático (e também da Mecânica Quântica) diz-se que os autovetores $|a\rangle$ de um operador hermitiano são completos, isto é, o operador identidade pode ser decomposto na forma

$$\mathbb{I} = \sum_a |a\rangle\langle a|. \tag{1.43}$$

Este resultado é conhecido como relação de completeza ou resolução da unidade. Ele será muito útil nas discussões sobre a interpretação física dos geradores de um grupo de Lie. Há ainda uma terceira utilidade para a notação de bras e kets que iremos usar com muita freqüência: uma notação para escrevermos os elementos de matriz de um determinado operador. Vamos continuar usando o operador $J_z$ e seus autovalores

$\lambda = \pm 1$, e seus autovetores normalizados dados em (1.33). Calcule então, os seguintes produtos matriciais: $\langle\lambda|J_z|\lambda\rangle$. Isto mesmo! estes são os próprios elementos de matriz da matriz $\Lambda$ em (1.36):

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \langle +1|J_z|+1\rangle & \langle +1|J_z|-1\rangle \\ \langle -1|J_z|+1\rangle & \langle -1|J_z|-1\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{1.44}$$

Em geral, $\langle a|A|b\rangle$ simboliza o elemento de matriz $A_{ab}$ do operador $A$ e satisfaz

$$A_{ab} = \langle a|A|b\rangle = \langle b|A^\dagger|a\rangle^*. \tag{1.45}$$

Quando o operador $a$ é hermitiano, $A^\dagger = A$, então

$$A_{ab} = \langle a|A|b\rangle = \langle b|A|a\rangle^*. \tag{1.46}$$

Verifique explicitamente estas propriedades usando o operador $J_z$.

Hora de sumariar e mudar de assunto: vimos que a matriz representando uma rotação em torno de um eixo fixo é ortogonal, isto é, sua inversa é igual à sua transposta e, conseqüentemente, seus autovetores são ortogonais. Isto significa que existe uma transformação unitária $M$ que diagonaliza $R$. Quando é possível encontrar uma transformação unitária que diagonaliza, completamente ou numa forma diagonal por blocos, a matriz que representa nossa rotação em torno de um eixo, diz-se que tal representação é uma representação redutível. Quando uma representação não é diagonalizável, isto é, quando não é possível encontrar uma matriz unitária como $M$, então ela é denominada de representação irredutível (ou irrep, simplesmente). Representações irredutíveis merecem uma seção própria.

## 1.3 Representações irredutíveis

Até o momento temos usado a matriz ortogonal (1.7) para representar uma rotação $R(\theta)$ em torno de um eixo fixo. Usamos também a matriz hermitiana $J_z$ definida em (1.18) para representar o gerador $J_z$ das rotações $R(\theta)$. Tudo isto está de acordo com os teoremas enunciados por Ado. Vimos também em (1.36) e (1.39) que as matrizes representando $J_z$ e $R(\theta)$ são completamente redutíveis. A matriz $J_z$ é uma soma direta[8] das matrizes unidimensionais hermitianas $(1)$ e $(-1)$, conforme indicado em (1.36). A matriz $R(\theta)$ é uma soma direta das matrizes unitárias unidimensionais $(\mathrm{e}^{i\theta})$ e $(\mathrm{e}^{-i\theta})$, conforme indicado em (1.39).

Perguntas que devem ser feitas: (1) existem matrizes irredutíveis hermitianas distintas de $(\pm 1)$ que representam o gerador $J_z$? (2) analogamente, existem matrizes irredutíveis unitárias distintas de $(\mathrm{e}^{\pm i\theta})$ que representam a rotação $R(\theta)$? Note que estamos pedindo por matrizes irredutíveis. (3) Caso tais matrizes existam, como isto tudo é generalizado para um grupo de Lie qualquer? Esta é uma pergunta bastante ambiciosa. Vamos elaborar uma estratégia para trabalhar estas três questões. A estratégia consiste em primeiro trabalharmos com as representações irredutíveis hermitianas da álgebra so(2), isto é, responder a primeira pergunta. Em seguida, podemos usar a aplicação exponencial (1.22) para construir as representações irredutíveis unitárias do grupo SO(2). Teremos então um outro exemplo da grande utilidade em termos definido a álgebra de Lie so(2) associada ao grupo de Lie SO(2): na álgebra, temos apenas um gerador para representar matricialmente, enquanto que o grupo, temos uma quantidade infinita. Felizmente cada elemento do grupo pode ser obtido atrvés de uma aplicação exponencial envolvendo apenas os elementos da álgebra correspondente. Isto foi uma das grandes descobertas de Sophus Lie. Quanto à terceira e última questão, esta é outra estória!

Então mãos a obra! Vamos começar perguntando se podem existir outras matrizes hermitianas irredutíveis de dimensão maior que um para representar o operador $J_z$. A resposta é não. Em uma álgebra abeliana como so(2), as únicas matrizes irredutíveis (hermitianas ou não) que representam seus elementos são de dimensão um (escalares), pois qualquer conjunto de matrizes comutantes devem ser múltiplos da identidade. Este resultado geral é conhecido como Lema de Schur. Bem, sabemos agora que as únicas representações irredutíveis da álgebra so(2) são unidimensionais, mas ainda podemos perguntar se há outras representações irredutíveis além de $(\pm 1)$. Desta vez a resposta é sim. De fato existe uma infinidade de

[8] Mais uma definição proveniente de Álgebra Linear. Uma soma direta entre duas matrizes produz uma terceira matriz contendo as duas primeiras como sub-matrizes dispostas ao longo da diagonal principal.

representações irredutíveis unidimensionais para o gerador $J_z$. Como obtê-las? Fácil, vamos denotar por $|a\rangle$ cada autovetor associado ao autovalor $a$ (em geral, complexo) do operador $J_z$. Então,

$$J_z|a\rangle = a|a\rangle \;\leftrightarrow\; \langle a|J_z^\dagger = a^*\,\langle a|, \quad a \in \mathbb{C}. \tag{1.47}$$

Portanto, cada representação irredutível (irrep) para $J_z$ é dada por uma matriz unidimensional formada pelo autovalor $a$. Na linguagem da teoria de representações dos grupos de Lie e suas álgebras associadas, estes autovalores são denominados de pesos da representação. Pesos são usados para etiquetar univocamente os vetores de uma determinada representação irredutível. Até o momento, estes pesos são simplesmente números complexos.

Não disse que era fácil? Sim realmente esta primeira tarefa foi fácil, mas realmente não existe qualquer restrição aos possíveis valores dos pesos $a$ em (1.47), principalmente se quisermos impor a condição de hermiticidade? Sim, de fato existe, você está com razão! Vamos encontrar agora que restrições devem ser impostas sobre os pesos da representação (1.47) para que ela seja hermitiana. Antes, porém, um pouco mais sobre a notação de bras e kets. Os elementos de matriz do gerador $J_z$ são calculados a partir de (1.47) e escritos da seguinte forma:

$$\langle a|J_z|a\rangle = \langle a|\; J_z|a\rangle = \langle a|\, a\,|a\rangle = a\,\langle a|a\rangle = a, \tag{1.48}$$

onde estamos assumindo que os vetores $|a\rangle$ estejam normalizados, $\langle a|a\rangle = 1$, e que o operador $J_z$ agiu "à direita", ou seja, no ket $|a\rangle$. Note o espaço em branco à esquerda de $J_z$ no segundo termo em (1.48). Se agiu à direita, então está implícita a possibilidade de $J_z$ também agir à esquerda! Muito bem! A ação à esquerda é denotada por $\langle a|J_z^\dagger$ e é definida a partir da ação à direita dada em (1.47):

$$\langle a|J_z^\dagger = (J_z|a\rangle)^\dagger = a^*\,\langle a|. \tag{1.49}$$

Assim, o elemento de matriz (1.48) também pode ser escrito de outra forma:

$$\langle a|J_z^\dagger\;|a\rangle = a^*\,\langle a|a\rangle = a^*. \tag{1.50}$$

Requerendo que o gerador $J_z$ seja hermitiano, isto é, $J_z^\dagger = J_z$, conforme verificado em (1.27), usando também (1.48) e (1.50), temos

$$\langle a|J_z^\dagger|a\rangle = \begin{cases} \langle a|\;\; J_z|a\rangle = a \\ \langle a|J_z^\dagger\;\;|a\rangle = a^* \end{cases} \quad \Rightarrow \quad a = a^* \quad \Rightarrow \quad a \in \mathbb{R}. \tag{1.51}$$

Isto significa que os autovalores de $J_z$ devem ser números reais. De fato, isto comprova um resultado geral em Álgebra Linear: os autovalores de qualquer operador hermitiano são reais.

Há mais restrições sobre os autovalores de $J_z$, além de serem reais? Devemos investigar! Já usamos todas as informações advindas da álgebra so(2), gerada por $J_z$. Então, estas restrições, se houver alguma, devem vir de informações contidas no próprio grupo SO(2), especificamente, nos elementos de matriz dos elementos do grupo SO(2). Os elementos de matriz do grupo SO(2) podem ser obtidos facilmente com o auxílio de (1.22) da seguinte maneira. Primeiro determinamos a ação do operador rotação $R(\theta)$ no autovetor $|a\rangle$ (faça o Exercício 10):

$$R(\theta)\,|a\rangle = \mathrm{e}^{-i\theta J_z}|a\rangle = \mathrm{e}^{-ia\theta}\,|a\rangle. \tag{1.52}$$

Agora procedemos como anteriormente quando calculamos os elementos de matriz de $J_z$ em (1.48):

$$R_{aa}(\theta) = \langle a|\,R(\theta)\,|a\rangle = \langle a|\;\mathrm{e}^{-i\theta J_z}\,|a\rangle = \mathrm{e}^{-ia\theta}\,\langle a|a\rangle = \mathrm{e}^{-ia\theta}, \tag{1.53}$$

ou, para sermos mais precisos,

$$R_{aa'}(\theta) = \langle a|\,R(\theta)\,|a'\rangle = \langle a|\;\mathrm{e}^{-i\theta J_z}\,|a'\rangle = \mathrm{e}^{-ia'\theta}\,\langle a|a'\rangle = \mathrm{e}^{-ia\theta}\,\delta_{aa'}. \tag{1.54}$$

Uma restrição no autovalor $a$ é obtida impondo a condição $R(0) = R(2\pi)$, isto é, após uma volta completa em torno do eixo de rotação, voltamos ao ponto de partida:

$$R(0) = R(2\pi) \Rightarrow \mathrm{e}^{-ia2\pi} = 1 \Rightarrow a = m \in \mathbb{Z}. \tag{1.55}$$

Isto é tudo que podemos dizer a respeito dos autovalores de $J_z$: eles são números inteiros, positivos, nulos ou negativos. O fato é que estes autovalores são discretos, isto é, podem ser enumerados (ou etiquetados) por números inteiros [9]. Portanto, para cada representação irredutível $|m\rangle$, etiquetada pelo autovalor de $J_z$, temos:

$$J_z|m\rangle = m|m\rangle, \quad R|m\rangle = \mathrm{e}^{-im\theta}|m\rangle, \quad \langle m|m'\rangle = \delta_{mm'}, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \tag{1.56}$$

onde $\langle m|m'\rangle = \delta_{mm'}$ simboliza o produto escalar entre estes vetores. Os respectivos elementos de matriz desses operadores são calculados da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \langle m|J_z|m'\rangle &= m'\langle m|m'\rangle = m\,\delta_{mm'}, \\ R_{mm'} = \langle m|R(\theta)|m'\rangle &= \mathrm{e}^{-im'\theta}\langle m|m'\rangle = \mathrm{e}^{-im\theta}\delta_{mm'}. \end{aligned} \tag{1.57}$$

Note que todos os elementos de matriz são nulos entre representações distintas. Esta é uma característica geral das representações irredutíveis de qualquer grupo e álgebra de Lie.

Importante: observe em (1.57) (e verifique!) que $R^\dagger = R^{-1}$, isto é, que estas representações são unitárias. Como podemos provar esta propriedade de unitariedade? Podemos usar os elementos de matriz (1.56). Prossiga! Você afirmou momentos atrás que um operador pode agir também à esquerda em um bra, desde que devidamente transposto e conjugado (conjugação hermitiana):

$$\langle m|R^\dagger = \mathrm{e}^{+im\theta}\,\langle m|. \tag{1.58}$$

Prossiga! A condição de unitariedade $R^\dagger = R^{-1}$ também não implica que $RR^\dagger = R^\dagger R = I$? Muito bem, prossiga! Então, se você não se importar que eu escreva em seu texto, podemos escrever

$$1 = \langle m|\,I\,|m\rangle = \langle m|R^\dagger\;\; R|m\rangle = \mathrm{e}^{+im\theta}\,\mathrm{e}^{-im\theta}\,\langle m|m\rangle = 1. \tag{1.59}$$

Bravo!

Algumas considerações semi-finais: (1) vale ressaltar que a representação matricial de $J_z$ definida em (1.18) foi diagonalizada em (1.36). Os autovalores encontrados em (1.36) correspondem aos pesos $m = 1$ e $m = -1$ em (1.56). Então a matriz $2 \times 2$ em (1.18) é uma soma direta das matrizes unidimensionais obtidas das representações $m = 1$ e $m = -1$:

$$J_z = \left(\begin{array}{c|c} \langle 1|J_z|1\rangle & 0 \\ \hline 0 & \langle -1|J_z|-1\rangle \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & -1 \end{array}\right). \tag{1.60}$$

Isto nos mostra que qualquer matriz de dimensão maior que 1 representando os operadores $R$ e $J_z$ pode ser decomposta numa soma direta de matrizes unidimensionais como esta em (1.60). (2) Podemos ver facilmente que todas as propriedades mencionadas na Seção 1.1 sobre o operador $R$ também são verificadas com o mesmo sendo representado pelas matrizes unidimensionais encontradas em (1.57). (3) O caráter $\chi$ de uma determinada representação é definido como sendo o traço da matriz correspondente a cada elemento do grupo. No presente caso, todas as matrizes (irredutíveis) são unidimensionais e o caráter $\chi_m(\theta)$ de cada elemento etiquetado pelo ângulo de rotação $\theta$, em cada representação irredutível etiquetada pelo inteiro $m$, é

$$\chi_m(\theta) = \mathrm{e}^{-im\theta}. \tag{1.61}$$

Até aqui, nós representamos os operadores $R$ e $J_z$ por matrizes. Recordamos muito sobre Álgebra Linear e mencionamos Cálculo e Equações Diferenciais. É possível então representar os operadores $R$ e $J_z$ por outros objetos matemáticos? Como derivadas, por exemplo. Direto ao ponto! Sim, podemos representar operadores por derivadas, na verdade, o termo correto não é "representar" mas *realizar*. Nós podemos realizar os operadores $R$ e $J_z$ observando os elementos de matriz em (1.56) e lembrando que $J_z$ e $R$ comutam, isto é, $J_z R = R J_z$. Então podemos calcular a ação do gerador $J_z$ sobre $R(\theta)|m\rangle$ de duas formas:

$$J_z\,R(\theta)|m\rangle = \mathrm{e}^{-im\theta}J_z|m\rangle = m\,\mathrm{e}^{-im\theta}|m\rangle = i\frac{\partial}{\partial\theta}\,\mathrm{e}^{-im\theta}|m\rangle = i\frac{\partial}{\partial\theta}R(\theta)|m\rangle \tag{1.62}$$

[9] Um processo onde os possíveis autovalores de um operador hermitiano tornam-se discretos devido à imposição de alguma condição de contorno (geralmente motivada por alguma necessidade física) é denominado de "quantização". Neste caso, o espectro de autovalores do operador $J_z$ é quantizado. Vocês verão que este termo, quantização, será muito utilizado em Mecânica Quântica.

e

$$R(\theta)\, J_z|m\rangle = mR(\theta)|m\rangle. \tag{1.63}$$

Portanto,

$$J_z\, R(\theta)|m\rangle = i\frac{\partial}{\partial\theta}R(\theta)|m\rangle = mR(\theta)|m\rangle. \tag{1.64}$$

Usando a ação de $R(\theta)$ dada em (1.56), podemos multiplicar os dois lados de (1.64) a esquerda por $\langle m|$ para obtermos um dos elementos de matriz listados em (1.57),

$$J_z\, \psi_m(\theta) = i\frac{\partial}{\partial\theta}\psi_m(\theta) = m\psi_m(\theta), \quad \psi_m(\theta) = \psi_0\, \mathrm{e}^{-im\theta}, \tag{1.65}$$

onde $\psi_0$ é uma constante (complexa) arbitrária. Este resultado sugere a identificação

$$J_z = i\frac{\partial}{\partial\theta}, \tag{1.66}$$

a qual realiza o operador $J_z$ em termos de uma derivada. Esta identificação é denominada de realização da álgebra por operadores diferenciais. Note que as funções $\psi_m(\theta)$ são os próprios elementos de matriz dos elementos do grupo que encontramos em (1.56), a menos de uma constante arbitrária $\psi_0$. Se existe uma realização por operadores diferenciais, então devem existir equações diferenciais! De fato, as funções $\psi_m(\theta)$ satisfazem a equação diferencial harmônica pois

$$\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\psi_m(\theta) = -m^2\, \psi_m(\theta). \tag{1.67}$$

Veremos mais adiante que resultados similares a (1.66) e (1.67) também ocorrem para outros grupos de Lie.

E a Física? Como ela pode se beneficiar de toda esta linguagem construída até o momento? Vejamos (modestamente) como estas representações irredutíveis podem ser usadas em Física. Para tal, vamos continuar a utilizar moléculas lineares. Como Bohr mostrou claramente, a energia mecânica de um elétron em um sistema atômico é quantizada, isto é, existe somente um conjunto enumerável (discreto) de possíveis energias (ou níveis de energia). Como foi dito anteriormente, a energia potencial de uma molécula linear tem simetria axial. Isto significa que este sistema físico deve ser invariante por rotações em torno de seu eixo de simetria. Isto significa que o operador energia mecânica (hamiltoniana), gerador das órbitas eletrônicas, deve comutar com $J_z$, o gerador das rotações axiais. Como operadores que comutam podem possuir autovetores comuns [10], podemos usar os pesos $m$ para classificar (etiquetar) as órbitas (ou estados) eletrônicos. Usualmente em Física Molecular, os estados eletrônicos associados a $m = 0$ são denominados de estados $\Sigma$, aqueles com $m = 1$ de estados $\Pi$, aqueles com $m = 2$ de estados $\Delta$, etc. Este exemplo nos mostra que pesos de uma determinada álgebra de Lie podem ser usados como etiquetas para situações físicas (exemplificadas aqui pelos estados eletrônicos). Isto indica que estes pesos (ou números quânticos) podem ser usados para estabelecer padrões em um conjunto de informações sobre um determinado sistema físico. Esta situação é estendida a várias áreas da Física, como Física de Partículas, para citar um outro exemplo importante, onde os pesos são usados para organizar partículas em famílias de acordo com suas propriedades físicas (massa, momentum angular, carga, etc.). Além da função organizacional, os grupos de Lie e suas álgebras associadas podem também ser usadas como guias para a construção de sistemas dinâmicos. Isto mesmo, vou parar por aqui! Outras estórias...

Antes de mudarmos de assunto, uma estória magnífica! Vale observar que encontramos a condição $m \in \mathbb{Z}$ usando a condição $R(0) = R(2\pi)$, a qual é fruto do nosso bom senso. No entanto, nossa Natureza tem nos revelado aspectos curiosos que fogem ao senso comum. Por exemplo, existem sistemas físicos, denominados de *espinoriais*, onde $R(2\pi) = -R(0)$ e, somente, $R(4\pi) = R(0)$! Acredite! Chocado?! Então veja as conseqüências! Isto implica que os autovalores $m$ também podem assumir valores *semi-inteiros*. Note que esta nova condição não afeta a álgebra definida por $J_z$, mas certamente fornece um novo grupo de Lie, pois os valores semi-inteiros de $m$ não podem pertencer ao grupo SO(2), pois nesse grupo $R(0) = R(2\pi)$ e não tem conversa! Este novo grupo, onde $R(4\pi) = R(0)$, é denotado por U(1). Ele é o grupo das transformações

[10] Outro resultado de Álgebra Linear. Suponha dois operadores, $H$ e $J_z$, tais que $[H, J_z] = 0$. Seja $|m\rangle$ os autovetores de $J_z$, $J_z|m\rangle = m\,|m\rangle$. Então, $J_z(H|m\rangle) = H(J_z|m\rangle) = m\,H|m\rangle$, ou seja, $H|m\rangle \propto |m\rangle$.

unitárias em uma dimensão, isto é, multiplicar um número complexo $z = x + iy = r\, e^{i\alpha}$ por uma fase. Assim, o módulo $|z|^2 = r^2$ permanece invariante e podemos identificar um vetor $(x, y)$ com o número complexo $z = x + iy$. Portanto, em uma dimensão, uma rotação é equivalente a caminharmos sobre um círculo no plano complexo. Pelo fato do grupo U(1) possuir a mesma álgebra do grupo SO(2) e admitir representações irredutíveis unitárias etiquetadas por valores de $m$ inteiros e semi-inteiros, ele é denominado de grupo de cobertura do grupo SO(2). Quando dois grupos apresentam a mesma álgebra, como neste exemplo, eles são denominados de localmente isomórficos. No entanto, suas propriedades globais podem ser muito diferentes. Vamos tentar um quadro pictórico desta situação: imagine que nosso sistema físico com simetria axial seja um gato[11] inicialmente apoiado no plano $xy$ pelas suas patas. Caso este sistema admita o grupo SO(2) como o seu grupo de simetria, então após uma volta completa em torno do eixo $z$, o gato retornará à sua posição inicial com suas patas apoiadas no plano $xy$, como manda o nosso bom senso[12]. No entanto, caso o grupo de simetria deste sistema seja o grupo U(1), então é possível que após uma volta completa em torno do eixo $z$, o gato se encontre apoiado no plano $xy$ pela sua costa e, somente, após mais uma volta completa ele voltará à posição inicial apoiando o plano $xy$ com suas patas novamente[13]. Este é o caso $m = 1/2$. Esta situação ocorre na natureza: elétrons[14] têm este comportamento. Resumindo: a física resultante quando $m$ assume valores inteiros é completamente diferente daquela resultante quando $m$ assume valores semi-inteiros. Isto mostra que embora grupos de Lie possam ser localmente isomórficos, suas propriedades globais podem ser completamente diferentes. Até o presente momento, não conhecemos sistemas físicos com valores de $m$ que não sejam inteiros ou semi-inteiros e nem sabemos se esta restrição é uma lei fundamental da nossa natureza. Os sistemas com $m$ inteiros são denominados de bósons e aqueles com $m$ semi-inteiros são denominados de férmions. Vale mencionar também que o grupo U(1) é o grupo de simetria das equações de Maxwell para o eletromagnetismo no contexto das teorias de *gauge* (ou calibre). Esta é uma estória que vale a pena ser contada, mas não agora. Em breve!

## 1.4 Integração sobre o grupo

De fato este é um título que não tem um significado em si. Sabemos o que é um grupo. A palavra "integração" nos lembra Cálculo Diferencial e Integral. Aprendemos em Cálculo e em Física que uma integral é, essencialmente, uma soma de áreas retangulares infinitesimais. Assim, a interpretação geométrica da integral (definida) de uma determinada função (contínua) é a área abaixo do gráfico desta função. Este tipo de integração foi desenvolvido por Newton e seus contemporâneos e é conhecido como integral de Riemann. Certamente, como você pode adivinhar, o processo de integração evoluiu muito desde Newton. Hoje, é possível definir uma integral sem qualquer interpretação geométrica relacionada com área e nem há a necessidade de termos funções bem comportadas (contínuas). Por exemplo, podemos definir uma integral para a função exótica $\{f(x) = 1 \text{ se } x \in \mathbb{Z} \text{ e } f(x) = 0 \text{ se } x \in \mathbb{Q}\}$. Como? Outra estória! Mas vale mencionar que este processo de integração mais geral é conhecido como integral de Lesbegue e faz parte de uma área da Matemática denominada de Teoria das Medidas. Uma integral de Lesbegue produz o mesmo valor de uma integral de Riemann (quando aplicável), mas tem a vantagem de ser uma definição mais geral.

Naturalmente, esta pequena estória é para precisar o significa do título desta seção: nos podemos definir um processo de integração em um grupo de Lie da seguinte forma. Cada elemento de um grupo de Lie é etiquetado por índices contínuos, ou seja, pelos parâmetros do grupo. Evidentemente vamos usar o grupo SO(2) para ilustrar tudo isto (como temos feito nas seções anteriores). Os elementos $R(\theta)$ do grupo SO(2) são etiquetados pelo (único) parâmetro (compacto) $\theta$. Portanto, podemos usar os parâmetros do grupo como variáveis de integração. Quem fará o papel do integrando neste processo de integração? Muito bem! Vamos precisar um pouco mais esta situação. O integrando será uma função dos elementos do grupo, a qual denotaremos por $f(R(\theta))$. Explico! Uma função é uma regra que associa um ou mais elementos de um determinado conjunto a um número real (ou complexo). Assim, é perfeitamente possível definirmos uma infinidade de funções sobre um grupo de Lie. Um exemplo importante é o caráter de um elemento do grupo. Primeiro, nós representamos os elementos do grupo por matrizes (isto é sempre possível devido ao Teorema

[11]Dizem que Schrödinger não gostava muito de gatos, julgando como ele os usava em seus experimentos fictícios. Vamos tentar ser ecologicamente corretos aqui.

[12]Note que até aqui o nosso gato de laboratório não sofreu qualquer tipo de maus tratos.

[13]Isto não significa qualquer mau trato! Afinal, um gato sempre cai de pé.

[14]Além dos gatos!

de Ado). Depois, nós definimos o caráter como sendo o traço da matriz que representa um determinado elemento. Por exemplo, o caráter dos elementos do grupo SO(2) na representação irredutível unidimensional (1.57) está dado em (1.61). Então, podemos definir a função

$$f(R(\theta)) = \text{tr } R(\theta) = \mathrm{e}^{-im\theta}, \tag{1.68}$$

como exemplo de uma função (contínua) dos elementos do grupo SO(2). Temos uma variável de integração, $\theta$, e um integrando, $f(R(\theta))$. Desta forma, nossa integral,

$$\int d\theta\, f(R(\theta)), \tag{1.69}$$

está pronta, não está? Não! É preciso tomar o seguinte cuidado: observe que além do ângulo de rotação $\theta$, qualquer outra função de $\theta$, digamos $\xi(\theta)$, também serve para etiquetar um elemento do grupo SO(2). Assim, podemos ter outra forma de definir uma integral sobre o grupo:

$$\int d\xi\, f(R(\xi)) = \int d\theta\, \frac{\partial \xi}{\partial \theta} f(R(\theta)). \tag{1.70}$$

Podemos ver claramente que as duas definições (1.69) e (1.70) são incompatíveis. O problema está na própria definição de integral. Vejamos.

Uma integral deve ser definida com dois ingredientes: um integrando e uma "medida". A tradução de **medida** para a Física é "elemento de volume". No caso do grupo SO(2), usamos $d\theta$ como elemento de volume na definição (1.69) e $d\xi$ como elemento de volume no lado esquerdo na definição (1.70). Como $\xi$ é uma função de $\theta$, $\xi = \xi(\theta)$, temos $d\xi = (\partial\xi/\partial\theta)\, d\theta$, o que faz com que o lado direito de (1.70) fique diferente de (1.69), a não ser que $\partial\xi/\partial\theta = 1$. Devemos definir uma medida mais geral que não produza esta inconsistência. Vamos denotar por $d\tau$ esta medida correta. Em geral ela é também uma função dos elementos do grupo, $d\tau(R(\theta))$. Assim, uma integral sobre todos os elementos do grupo SO(2) deve ser definida corretamente como

$$\int\limits_{R\in \mathrm{SO}(2)} d\tau(R)\, f(R). \tag{1.71}$$

Vejamos agora que propriedades deve ter o elemento de volume $d\tau(R)$ para que a integral (1.71) seja bem definida. Primeiro observe que, devido à completeza (ou fechamento) de um grupo em relação ao produto entre seus elementos, a multiplicação à esquerda $R'\mathrm{SO}(2)$, ou à direita $\mathrm{SO}(2)R'$, continua sendo o próprio grupo SO(2). Suponha por um instante que o volume $d\tau$ seja uma constante, isto é, não dependa dos elementos do grupo. Então devido à identidade $R'\mathrm{SO}(2)$=SO(2), temos

$$\int\limits_{R\in \mathrm{SO}(2)} d\tau\, f(R) = \int\limits_{R''\in R'\mathrm{SO}(2)} d\tau\, f(R'') = \int\limits_{R\in \mathrm{SO}(2)} d\tau\, f(R'R). \tag{1.72}$$

Esta é a propriedade que estamos precisando! Basta impor que

$$d\tau(R'R) = d\tau(R), \tag{1.73}$$

para que (1.72) seja válida em geral. A condição (1.73) significa que $R$ e $R'R$ tem os mesmos pesos na "soma" (1.71). Uma medida com a propriedade (1.73) é denominada de **medida invariante à esquerda** (ou medida de Haar). Sim, poderiámos ter definido igualmente uma medida invariante à direita. Evidentemente, as definições medidas invariantes, à direita ou à esquerda, feitas aqui usando o grupo SO(2) como protótipo, são as mesmas para qualquer grupo de Lie.

Como determinamos de fato uma medida invariante? A primeira providência é escrever a medida $d\tau$ como uma densidade $\rho$ no espaço dos parâmetros. Explico! Vamos tomar o grupo SO(2) como exemplo. O espaço dos parâmetros neste caso é unidimensional, $\theta$. Então seja $\rho(\theta)$ uma função densidade que multiplicada pelo volume do espaço de parâmetros, $d\theta$, neste caso, dê a medida $d\tau(R(\theta))$:

$$d\tau(R(\theta)) = \rho(\theta) d\theta. \tag{1.74}$$

Como esta medida é invariante à esquerda, e como $R''(\theta'') = R'(\theta')R(\theta)$, com $\theta'' = \xi(\theta, \theta') = \theta + \theta'$, então

$$d\tau(R(\theta)) = \rho(\theta)d\theta = d\tau(R''(\theta'')) = \rho(\theta'')d\theta''. \tag{1.75}$$

Vamos ilustrar agora um procedimento para determinarmos uma medida invariante para o grupo SO(2). Podemos determinar a função densidade $\rho$ fazendo $\theta = 0$ (identidade) e depois atuar à esquerda com $R(\theta')$. Neste caso, temos

$$\theta' = \xi(0, \theta') \Rightarrow d\theta' = \left.\frac{\partial \xi}{\partial \theta}\right|_{\theta=0} d\theta = d\theta, \tag{1.76}$$

e de (1.75) temos

$$d\tau(R(0)) = \rho(0)\, d\theta = d\tau(R'(\theta')) = \rho(\theta')\, d\theta' = \rho(\theta')\, d\theta. \tag{1.77}$$

Portanto, $\rho(\theta') = \rho(0)$, ou seja, a densidade é constante. O valor da função densidade na identidade pode ser escolhido arbitrariamente, então vamos escolher $\rho(0) = 1$. Isto determina o elemento de volume $d\tau = d\theta$ do grupo SO(2). Como o grupo SO(2) é compacto, isto é, $0 \le \theta \le 2\pi$, então o volume total é $2\pi$. Note que o volume total é exatamente o perímetro de um círculo unitário, como esperado.

Tendo determinado a medida $d\tau = d\theta$ associada ao parâmetro $\theta$ do grupo SO(2), podemos verificar uma de suas utilidades. Os elementos de matriz $R_m(\theta) = R_{mm}(\theta)$ determinados em (1.57) satisfazem as seguintes relações:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\theta\, R^\dagger_m(\theta)R_{m'}(\theta) = \delta_{mm'}, \quad \text{(ortogonalidade)}, \tag{1.78}$$

e

$$\frac{1}{2\pi}\sum_{m\in\mathbb{Z}} R^\dagger_m(\theta)R_m(\theta') = \delta(\theta-\theta'), \quad \text{(completeza)}, \tag{1.79}$$

onde $\delta_{mm'}$ é a função delta de Kronecker e $\delta(\theta - \theta')$ é a distribuição delta de Dirac,

$$\delta_{mm'} = \begin{cases} 1 & \text{se } m = m' \\ 0 & \text{se } m \neq m' \end{cases}, \qquad \int_0^{2\pi} d\theta\, f(\theta)\delta(\theta-\theta') = \begin{cases} f(\theta') & \text{se } 0 \le \theta' \le 2\pi, \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}, \tag{1.80}$$

respectivamente. Estas relações são casos particulares de um teorema mais geral sobre ortogonalidade e completeza conhecido como Teorema de Peter-Weyl. Note a presença do volume total $2\pi$ e da medida $d\theta$.

A verificação das relações de ortogonalidade (1.78) é imediata, pois basta usar $R_m = \mathrm{e}^{-im\theta}$ [veja os elementos de matriz em (1.57)] e executar a integral. Como consequência, a relação de ortogonalidade (1.78) garante que qualquer função contínua $f(\theta)$ pode ser expandida em termos das representações irredutíveis $R_m(\theta)$:

$$f(\theta) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} c_m R_m(\theta) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} c_m\, \mathrm{e}^{-im\theta}. \tag{1.81}$$

Basta verificarmos que os coeficientes $c_m$ podem ser calculados multiplicando $f(\theta)$ por $R^\dagger_m(\theta)$ e integrar sobre o grupo para obtermos

$$c_m = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\theta\, f(\theta)R^\dagger_m(\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\theta\, f(\theta)\, \mathrm{e}^{im\theta}. \tag{1.82}$$

A expansão (1.81) em funções harmônicas é a conhecida série de Fourier.

A demostração da relação de completeza (1.79) apresenta uma das idéias mais exóticas da análise matemática moderna: o conceito de distribuição (ou função generalizada). Seja

$$\Phi(\theta-\theta') = \frac{1}{2\pi}\sum_{m\in\mathbb{Z}} R^\dagger_m(\theta)R_m(\theta') = \frac{1}{2\pi}\sum_{m\in\mathbb{Z}} \mathrm{e}^{im(\theta-\theta')}. \tag{1.83}$$

Podemos criar uma função desta recém-criada quantidade[15] $\Phi$ através da integral

$$F[\Phi] = \int_0^{2\pi} d\theta f(\theta)\Phi(\theta - \theta'), \tag{1.84}$$

denominada adequadamente de *funcional*, onde $f(\theta)$ é uma função contínua, a qual admite uma expansão na série de Fourier dada em (1.81). Então usando (1.83),

$$\begin{aligned} F[\Phi] &= \int_0^{2\pi} d\theta f(\theta)\Phi(\theta - \theta') \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta f(\theta)\frac{1}{2\pi}\sum_{m\in\mathbb{Z}} \mathrm{e}^{im(\theta-\theta')} = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \mathrm{e}^{-im\theta'}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\theta f(\theta)\,\mathrm{e}^{im\theta} = \sum_{m\in\mathbb{Z}} c_m\,\mathrm{e}^{-im\theta'} = f(\theta'), \end{aligned} \tag{1.85}$$

onde usamos também (1.82). Note em (1.85) a incrível propriedade da "quantidade" (1.83) com relação à função contínua (arbitrária) $f(\theta)$ (denominada de "núcleo"). Esta propriedade assegura a qualidade de "função generalizada" (ou distribuição) à quantidade $\Phi$ em (1.83). A propriedade (1.85) é tão fascinante que recebeu um sobrenome: distribuição "delta" de Dirac[16],

$$\delta(\theta - \theta') = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \mathrm{e}^{im(\theta-\theta')}, \quad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\theta f(\theta)\delta(\theta - \theta') = f(\theta'). \tag{1.86}$$

Uma observação importante: o resultado à direita em (1.86) é válido somente para $0 \leq \theta' \leq 2\pi$, pois esta é a condição para determinarmos os coeficientes da expansão de Fourier da função $f(\theta)$ de acordo com (1.82). Quando $\theta'$ não está no intervalo indicado em (1.86), aquela integral é zero! isto parece mágica (como em *mathema***g***icians* em referência aos nossos colegas *mathematicians*).

## 1.5 Mecânica Quântica

Não se assuste com este título! ele não pressupõe que você saiba, melhor, tenha alguma familiaridade com as técnicas de Mecânica Quântica. Diz um ditado que aquele que afirma saber a Mecânica Quântica, com certeza não a sabe. Desejamos, portanto, modestamente, explorar um pouco mais a notação de bras e kets para interpretar fisicamente os geradores de uma álgebra de Lie. Certamente, a Mecânica Quântica, por ser uma parte importante na fronteira do nosso conhecimento, é um paradigma para estas interpretações.

Vamos supor que uma determinada partícula esteja localizada (no sentido clássico) no plano $xy$ por coordenadas polares $(r, \theta)$. Naturalmente você já deve ter notado que o complemento "no sentido clássico" de "localizada" deve ter implicações. De fato, um dos princípios básicos em Mecânica Quântica, entre muitos outros que fogem ao nosso senso comum, diz que uma partícula não pode ser localizada com exatidão. Mais ainda, a incerteza na posição está ligada à incerteza no momentum linear. Sim, posição e momentum são variáveis conjugadas em Mecânica Clássica. Perfeito! estas incertezas ocorrem sempre com variáveis conjugadas, como tempo e energia ou ângulos de rotação e momentum angular. Este princípio é conhecido como o Princípio de Heisenberg. Outra sutileza é que quantidades clássicas como posição e momentum são operadores em Mecânica Quântica. Os autovalores destes operadores estão em correspondência com as quantidades clássicas. Para incorporarmos tudo isto, falaremos sobre os autovetores (ou auto-estados) $|r, \theta\rangle$ do operador posição desta partícula localizada classicamente em $(r, \theta)$. Como estaremos interessados aqui apenas no operador rotação, o qual deixa o módulo $r$ inalterado, iremos escrever apenas $|\theta\rangle$ por comodidade. O nosso objetivo é interpretar fisicamente a ação do operador de rotação e de seu gerador no estado $|\theta\rangle$. Classicamente, a partícula será rodada em torno de um eixo fixo passando pelo origem e perpendicular ao plano $xy$. E quanticamente? Considere o estado inicial como sendo $|\theta_0\rangle$. Após a ação de uma rotação $R(\theta)$,

[15] Quantidade?! Não é uma função? Não é uma função, mas é classificada como uma função generalizada.
[16] Na Física, conhecida por "função" delta de Dirac, embora não seja uma função.

esperamos que o novo estado do operador posição seja $|\theta_0+\theta\rangle$. Vamos mostrar a seguir como este resultado pode ser usado para interpretarmos fisicamente o gerador de uma rotação.

Primeiro devemos observar que os estados $|m\rangle$, ou seja, os autovetores do gerador $J_z$ das rotações $R_m(\theta)$, formam um conjunto completo, isto é

$$\langle m|m'\rangle=\delta_{mm'},\ \text{(ortonormalidade)},\quad \sum_m |m\rangle\langle m|=\mathbb{I},\ \text{(completeza)}. \tag{1.87}$$

Ser um conjunto completo tem as suas vantagens, significa que qualquer outro estado, como $|\theta\rangle$, por exemplo, pode ser decomposto na forma

$$|\theta\rangle=\sum_m c_m|m\rangle. \tag{1.88}$$

Usando a relação de ortonormalidade em (1.87), podemos determinar as constantes $c_m$:

$$\langle m|\theta\rangle=\sum_{m'} c_{m'}\langle m|m'\rangle=c_m. \tag{1.89}$$

Substituindo este resultado de volta em (1.88), temos

$$|\theta\rangle=\sum_m\langle m|\theta\rangle\,|m\rangle=\sum_m|m\rangle\langle m|\theta\rangle\ \Rightarrow\ \sum_m|m\rangle\langle m|=\mathbb{I}. \tag{1.90}$$

Note que reobtivemos aqui a relação de completeza sem a necessidade de supor que os bras e kets sejam matrizes. Lembrando que o operador de rotação é unitário, $R^\dagger(\theta)=R^{-1}(\theta)=R(-\theta)$, e que $R(\theta)$ atua nos autovetores de $J_z$ na forma

$$R(\theta)|m\rangle=\mathrm{e}^{-im\theta}\,|m\rangle\quad\Longleftrightarrow\quad\langle m|R^\dagger=\mathrm{e}^{+im\theta}\,\langle m|,\quad R^\dagger|m\rangle=\mathrm{e}^{im\theta}\,|m\rangle, \tag{1.91}$$

e levando em conta que o estado $|\theta\rangle$ pode ser obtido através de uma rotação aplicada ao estado de referência $|\theta_0=0\rangle$, $|\theta\rangle=R(\theta)|\theta_0\rangle$, então

$$|\theta\rangle=\sum_m\langle m|\theta\rangle\,|m\rangle=\sum_m\langle m|R|\theta_0\rangle\,|m\rangle=\sum_m\langle\theta_0|R^\dagger|m\rangle^*\,|m\rangle=\sum_m\langle m|\theta_0\rangle\,\mathrm{e}^{-im\theta}\,|m\rangle, \tag{1.92}$$

onde usamos também a propriedade (1.45). Tendo escrito o estado $|\theta\rangle$ em termos dos autovetores de $J_z$, podemos calcular a ação de $R(\theta')$ em $|\theta\rangle$:

$$\begin{aligned}R(\theta')|\theta\rangle&=\mathrm{e}^{-i\theta' J_z}|\theta\rangle=\sum_m\langle m|\theta_0\rangle\,\mathrm{e}^{-im\theta}\,\mathrm{e}^{-i\theta' J_z}\,|m\rangle\\&=\sum_m\langle m|\theta_0\rangle\,\mathrm{e}^{-im(\theta+\theta')}\,|m\rangle=|\theta+\theta'\rangle.\end{aligned} \tag{1.93}$$

Isto é exatamente o que esperávamos: o vetor $|\theta\rangle$ é rodado de um ângulo $\theta'$ pela ação de $R(\theta')$. A ação do gerador $J_z$ em $|\theta\rangle$ também pode ser calculada facilmente (primeira linha da expressão abaixo):

$$\begin{aligned}J_z|\theta\rangle&=\sum_m\langle m|\theta_0\rangle\,\mathrm{e}^{-im\theta}\,J_z|m\rangle=\sum_m\langle m|\theta_0\rangle m\,\mathrm{e}^{-im\theta}\,|m\rangle\\&=i\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sum_m\langle m|\theta_0\rangle\,\mathrm{e}^{-im\theta}\,|m\rangle\right)=i\frac{\partial}{\partial\theta}|\theta\rangle.\end{aligned} \tag{1.94}$$

Note que a segunda linha foi invenção nossa e é esta observação que nos permite um interpretação física para o gerador $J_z$. Portanto, o gerador $J_z$ comporta-se como uma derivada em relação ao ângulo de rotação $\theta$ e isto é exatamente a definição da componente $z$ do operador momentum angular em Mecânica Quântica (faça o Exercício 11),

$$J_z=xp_y-yp_x=-i\hbar\big(x\frac{\partial}{\partial y}-y\frac{\partial}{\partial x}\big)=-i\hbar\frac{\partial}{\partial\theta}, \tag{1.95}$$

onde estamos usando $\hbar = 1$ em (1.94). Podemos conjecturar então que as componentes do momentum angular serão os geradores das rotações espaciais. Esta conjectura é verdadeira e será o tema do Capítulo 4. Estas relações entre quantidade físicas e geradores de grupos de Lie serão exploradas também nos próximos capítulos.

Espere um minutinho! tem um sinal trocado quando os resultados obtidos em (1.94) e (1.95) são comparados. Muito bem! Além disto, se você acha estranho a derivada de um estado quântico em (1.94), por estar habituado a derivar somente funções, então podemos observar o seguinte: em Mecânica Quântica sempre existem funções associadas a estados, denominadas de funções de onda. Em geral, uma função de onda é sempre obtida através de um produto escalar. Por exemplo, a função de onda $\psi(\theta)$, associada ao estado $|\psi\rangle$ projetado no vetor posição $|\theta\rangle$, é definida como

$$\psi(\theta) = \langle\theta|\psi\rangle. \tag{1.96}$$

A ação do operador $J_z$ na função de onda $\psi(\theta)$ é calculada também por um elemento de matriz (faça o Exercício 12):

$$J_z\psi(\theta) = \langle\theta|J_z|\psi\rangle = \langle\theta|J_z^\dagger\ |\psi\rangle = -i\frac{\partial}{\partial\theta}\langle\theta|\psi\rangle = -i\frac{\partial\psi}{\partial\theta}, \tag{1.97}$$

onde usamos a condição de hermiticidade $J_z^\dagger = J_z$ e o resultado (1.94) escrito na forma de um bra. Note que o sinal negativo é recuperado quando permitimos $J_z$ atuar em uma função de onda. Portanto, o gerador $J_z$ das rotações SO(2) em torno de um eixo fixo é interpretado fisicamente como a componente $z$ do momentum angular em Mecânica Quântica.

## 1.6 Exercícios

**Exercício 1** *Use*

$$\operatorname{sen}(\alpha\pm\beta) = \operatorname{sen}\alpha\,\cos\beta \pm \cos\alpha\,\operatorname{sen}\beta, \quad \cos(\alpha\pm\beta) = \cos\alpha\,\cos\beta \mp \operatorname{sen}\alpha\,\operatorname{sen}\beta, \tag{1.98}$$

*para provar as relações (1.5). Efetue o produto matricial (1.6) e verifique que ele fornece o mesmo resultado.*

**Exercício 2** *Verifique a propriedade de linearidade (1.8) explicitamente, isto é, escrevendo todas as componentes dos vetores envolvidos.*

**Exercício 3** *Use a matriz $R(\theta)$ definida em (1.7) para verificar cada uma das propriedades de um grupo de Lie, satisfeitas pelas rotações: (1) existência da identidade, (1.9); (2) existência da inversa, (1.9); (3) o produto entre elas é fechado, (1.10), e que o novo parâmetro é uma função contínua dos antigos, (1.10); (4) o produto entre os elementos do grupo é associativo, (1.11). Verifique também que o produto é abeliano, (1.10).*

**Exercício 4** *Obtenha a matriz $J_z$ definida em (1.18) usando a matriz de rotação (1.7), a definição (1.23) e*

$$\cos\Delta\alpha \simeq 1, \qquad \operatorname{sen}\Delta\alpha \simeq \Delta\alpha, \qquad \Delta\theta \to 0. \tag{1.99}$$

**Exercício 5** *Re-obtenha a matriz $J_z$ definida em (1.18) derivando cada elemento da matriz (1.7), multiplicando por $i$ e fazendo $\theta = 0$, conforme indicado em (1.21).*

**Exercício 6** *Use a matriz $J_z$ definida em (1.18) para verificar explicitamente a propriedade de hermiticidade dada em (1.27).*

**Exercício 7** *Use a matriz $J_z$ definida em (1.18) para calcular os seus autovalores e autovetores normalizados como em (1.36) e depois verifique explicitamente as propriedades dadas em (1.37).*

**Exercício 8** *Use as propriedades (1.37) para mostrar explicitamente que a matriz de rotação definida em (1.7) pode ser obtida através da exponencial (1.22).*

**Exercício 9** *Verifique a (1.39) da seguinte forma: primeiro efetue os produtos matriciais do lado esquerdo e depois efetue a exponencial do lado direito, usando a definição dada em (1.22).*

**Exercício 10** *Usando a definição da exponencial de um operador dada em (1.22), determine explicitamente a ação do operador $J_z$ em (1.52).*

**Exercício 11** *Use*

$$J_z = xp_y - yp_x = -i\big(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\big), \quad x = r\cos\theta,\ y = r\,\mathrm{sen}\,\theta, \tag{1.100}$$

*onde $(x, y)$ é a posição de uma partícula numa trajetória circular de raio $r$ e $(p_x, p_y)$ são as componentes do respectivo vetor momentum linear, para mostrar que $J_z$ também pode ser reescrito na forma*

$$J_z = -i\frac{\partial}{\partial\theta}. \tag{1.101}$$

*Sugestão: use a regra da função composta para escrever primeiro as derivadas parciais $\partial/\partial r$ e $\partial/\partial\theta$ em função das derivadas parciais em $x$ e $y$; depois inverta estas relações e substitua-as de volta em (1.100).*

**Exercício 12** *Verifique que o mesmo resultado (1.97) pode ser obtido também usando diretamente (1.94) e a propriedade de hermiticidade enunciada em (1.46). Espero que estes exemplos tenham convencido você da importância prática (visual) da notação de bras e kets.*

# Capítulo 2

# Simetria Translacional

Realmente me agrada saber que você é perseverante; não desiste de suas metas. A ciência se alimenta disto e de pessoas como você. Muito bem! passou pelo primeiro capítulo. Eis então algumas linhas sobre o que será feito nas próximas seções. Além das rotações, as translações espaciais, contínuas e discretas, desempenham um papel igualmente importante em física pois, afinal de contas, um movimento não está completo somente com rotações, precisamos transladar e rodar, ou seja, precisamos bailar. Iniciaremos estudando as translações unidimensionais contínuas e em seguida aquelas discretas, onde faremos uma aplicação em Física do Estado Sólido. Sim, uma aplicação modesta, muito modesta. Mostraremos como é possível provar o teorema de Floquet-Bloch apenas com base nos conhecimentos adquiridos sobre o grupo das translações. Sem exageros, o teorema de Bloch, como o teorema de Floquet-Bloch é mais conhecido, é uma das pedras fundamentais (ou dos sonhos?) da Física do Estado Sólido. Em outras palavras, deveremos comemorar assim que demonstrarmos este resultado.

## 2.1 Caso contínuo

Ser atraído pelo desconhecido é uma característica humana. O conhecimento mora no desconhecido. É preciso mergulhar na escuridão para encontrar o conhecimento novo. "Vamos tomar emprestada aqui uma notação muito comum em Mecânica Quântica (Dirac) para representar estados de um sistema físico." É disto que estou falando (novamente!). Vamos denotar por $|x_0\rangle$ o auto-estado do operador posição de uma partícula localizada (classicamente) na posição $x_0$. Uma translação $T(x)$ por uma quantidade contínua $x$ pode ser então escrita como

$$T(x)|x_0\rangle = |x_0 + x\rangle, \tag{2.1}$$

isto é, a partícula localizada (classicamente) inicialmente na posição $x_0$ é transladada para $x_0 + x$. Podemos ver facilmente que o conjunto infinito destes operadores de translação, $T(x)$, dependentes de um único parâmetro contínuo, $-\infty < x < \infty$, forma um grupo de Lie abeliano (faça o Exercício 13):

$$\mathbb{I} = T(0), \tag{2.2}$$

$$T^{-1}(x) = T(-x), \tag{2.3}$$

$$T(x'') = T(x)T(x') = T(x')T(x), \quad x'' = \xi(x, x') = x + x', \tag{2.4}$$

$$T(x'')[T(x')T(x')] = [T(x'')T(x')]T(x'). \tag{2.5}$$

Note que $x'' = \xi(x, x') = x + x'$ em (2.4) é uma função contínua de $x$ e $x'$, uma condição necessária para ser um grupo de Lie.

Vamos denotar por $\mathrm{T}_1$ o grupo destas translações unidimensionais, independentemente da direção espacial. Naturalmente, podemos definir os grupos $\mathrm{T}_2$ e $\mathrm{T}_3$, das translações no plano e no espaço, respectivamente. Mesmo em direções diferentes, as operações de translação comutam. Desta forma, uma translação tridimensional $T(\mathbf{r})$ numa direção arbitrária $\mathbf{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ pode ser escrita como uma composição das translações em cada direção (sem nos preocuparmos com a ordem), $T(\mathbf{r}) = T(x)T(y)T(z)$. Obviamente, estas translações espaciais formam grupo $\mathrm{T}_3$ das translações espaciais no espaço euclidiano, o qual contém $\mathrm{T}_i$ como subgrupos ($i = 1, 2$). Como estes subgrupos comutam entre si, nenhum deles é modificado pela ação dos demais (subgrupos invariantes). Neste caso, a composição $T(x)T(y)T(z)$ é um produto direto $T(x)T(y)T(z) = T(x) \otimes T(y) \otimes T(z)$. Também faremos uso da notação $T(\mathbf{r}) = T(x)T(y)T(z) = T(x, y, z)$. Estas translações tridimensionais atuam em vetores também escritos em termos de produtos diretos: $T(x, y, z)|x, y, z\rangle = T(x)|x\rangle \otimes T(y)|y\rangle \otimes T(z)|z\rangle$.

Note que o parâmetro $x$ do grupo das translações $\mathrm{T}_1(x)$ não está limitado a um determinado intervalo, isto é, não há limites inferior e superior. Como o parâmetro $x$ não está limitado, diz-se que o grupo $\mathrm{T}_1(x)$ é não-compacto. Assim, o grupo SO(2) estudado no Cap. 1 é compacto. Desta forma, os grupos de Lie são classificados em duas grandes categorias: compactos e não-compactos. Todos os grupos compactos têm todos os seus parâmetros limitados inferiormente e superiormente, enquanto os grupos não-compactos têm pelo menos um de seus parâmetros sem um ou nenhum dos limites inferior ou superior.

Naturalmente, queremos seguir na trilha construída no capítulo anterior. Após definirmos fisicamente uma rotação, inventamos uma maneira de descrevê-la matematicamente através de matrizes. Nós adoramos matrizes! O próximo passo então, é escrever uma translação unidimensional numa forma matricial. Sem receitas, apenas invente uma maneira! Como estamos no caso unidimensional, os vetores e matrizes naturais serão também unidimensionais. Isto seria perfeito se o grupo em questão agisse multiplicando os vetores originais, mas uma translação age somando um número real. Não tem jeito, devemos abandonar o espaço unidimensional e ir para um espaço de dimensão mais alta. Olhar de cima sempre nos dá uma visão panorâmica, unificada. Então vamos subir para duas dimensões. Assim, o estado $|x\rangle$ será representado por uma matriz coluna contendo a posição $x$ na primeira linha e a unidade (1) na segunda linha,

$$|x\rangle \to \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{2.6}$$

Após uma inspeção rápida, a matriz que representa a translação $T(x)$ definida em (2.1) será (faça os Exercícios 14 e 15)

$$T(x) = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{2.7}$$

Note que a generalização para mais dimensões é imediata. Por exemplo, as translações $T(x, y)$ no plano $xy$ e $T(x, y, z)$ no espaço podem ser escritas como (faça o Exercício 16)

$$T(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad T(x, y, z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 & y \\ 0 & 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{2.8}$$

respectivamente. Note a presença da identidade no bloco formado pelas duas primeiras linhas e colunas de $T(x, y)$. A mesma observação vale para três dimensões.

Quem são os geradores das translações? Como no caso das rotações, podemos expressar uma translação arbitrária em termos de um gerador. Para isto, basta escrevermos uma translação infinitesimal em torno da identidade:

$$T(\Delta x) = \mathbb{I} - i\Delta x\, P_x, \quad P_x = \begin{pmatrix} 0 & i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.9}$$

Procedendo exatamente como no caso das rotações, o operador translação $T(x)$ satisfaz a mesma equação diferencial harmônica (faça o Exercício 17),

$$\frac{dT}{dx} = -iP_x T, \quad T(x) = \mathrm{e}^{-ixP_x}, \tag{2.10}$$

onde

$$P_x = i\frac{dT}{dx}\bigg|_{x=0}. \tag{2.11}$$

O gerador $P_x$ forma a álgebra de Lie $\mathfrak{T}_1$, abeliana, associada ao grupo $\mathrm{T}_1$. Em duas dimensões, a álgebra $\mathfrak{T}_2$ tem dois elementos (faça o Exercício 18):

$$P_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.12}$$

Podemos notar então que

$$[P_x, P_y] = 0, \tag{2.13}$$

isto é, a álgebra $\mathfrak{T}_2$ também é abeliana. Faça o Exercício 19 para generalizar estes resultados para três dimensões.

Como a álgebra de Lie $\mathfrak{T}_1$, associada ao grupo $\mathrm{T}_1$, é formada somente por $P_x$, então ela é abeliana. Portanto, suas representações irredutíveis são unidimensionais, devido ao lema de Schur. O mesmo vale para mais dimensões. Vamos denotar por $p_x$ os autovalores (contínuos) de $P_x$ e por $|p_x\rangle$ os autovetores correspondentes:

$$P_x|p_x\rangle = p_x|p_x\rangle, \quad \langle p_x|p'_x\rangle = 2\pi\delta(p_x - p'_x), \quad \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} dp_x\, |p_x\rangle\langle p_x| = \mathbb{I}. \tag{2.14}$$

A única restrição que queremos impor sobre os autovalores $p_x$ é que eles sejam reais, para garantir que os geradores $P$ sejam hermitianos, $P_x = P_x^\dagger$, se quisermos nos restringir às representações unitárias do grupo das translações. Generalize para três dimensões. No entanto, neste caso, veremos que não há qualquer outra restrição. Os autovalores $p_x$ são números reais contínuos e ilimitados. As representações irredutíveis do grupo $\mathrm{T}_1$ serão então etiquetadas pelo índice contínuo $p_x$,

$$T(x)|p_x\rangle = \mathrm{e}^{-ixP_x}|p_x\rangle = \mathrm{e}^{-ixp_x}|p_x\rangle. \tag{2.15}$$

Podemos notar que estas representações são unitárias, $T_{p_x}^{-1} = T_{p_x}^\dagger$ (faça o Exercício 20). Os elementos de matriz correspondentes são

$$\begin{aligned} \langle p_x|P_x|p'_x\rangle &= p'_x\langle p_x|p'_x\rangle = 2\pi p_x\,\delta(p_x - p'_x), \\ T_{p_x p'_x} = \langle p_x|T(x)|p'_x\rangle &= \mathrm{e}^{-ixp'_x}\langle p_x|p'_x\rangle = 2\pi\,\mathrm{e}^{-ixp_x}\,\delta(p_x - p'_x). \end{aligned} \tag{2.16}$$

Note que não há qualquer restrição adicional aos possíveis valores do autovalor $p_x$ neste caso. Eles são contínuos e ilimitados, ao contrário das irreps unitárias do grupo SO(2), onde o índice das irreps é discreto. Este é um resultado geral: irreps unitárias de grupos não-compactos sempre apresentam alguns de seus índices (números quânticos) contínuos. Portanto, do ponto de vista físico, os grupos compactos devem ser úteis na descrição de sistemas com um espectro discreto de energias (digamos), como é o caso de sistemas em Mecânica Quântica que exibem estados ligados (átomos, moléculas, etc.). Os grupos não-compactos estão, em geral, associados com sistemas físicos cujo espectro de energia é contúnuo, como uma partícula livre.

Também, de forma análoga ao grupo das rotações, o elemento de volume invariante a esquerda neste caso é $dx$. No entanto, como o grupo é não-compacto, o seu volume é infinito, isto é, algumas integrais divergem. Estava demorando para começar os problemas. Mas isto não nos impede de escrever as relações de ortonormalidade e completeza para os elementos de matriz $T_{p_x}(x) = T_{p_x p_x}(x)$ como:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, T_{p_x}^*(x) T_{p'_x}(x) = 2\pi\delta(p_x - p'_x), \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} dp_x\, T_{p_x}(x) T_{p_x}^*(x') = 2\pi\delta(x - x'). \tag{2.17}$$

Note que a "soma" no índice $p$, correspondente à soma no índice discreto $m$ em (1.57), foi devidamente trocada por uma integral. Estas relações são novamente as mesmas relações usadas em análise harmônica por séries de Fourier generalizadas.

Como usual em Mecânica Quântica, uma função de onda arbitrária $\psi(x)$ é dada por um produto escalar,

$$\psi(x) = \langle x|\psi\rangle, \tag{2.18}$$

onde $|\psi\rangle$ é um estado possível do sistema físico em consideração. Isto nos permite interpretar fisicamente o gerador $P_x$. Primeiro, precisamos escrever o estado $|x\rangle$ em termos dos autovetores $|p_x\rangle$, levando em conta que $p_x \in \mathbb{R}$ (faça o Exercício 21),

$$|x\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} dp_x\; c(p_x)|p_x\rangle, \quad c(p_x) = \mathrm{e}^{-ip_x x}\langle p_x|x = 0\rangle. \tag{2.19}$$

Desta forma, a ação do gerador $P_x$ em $|x\rangle$ é (faça o Exercício 22)

$$P_x|x\rangle = i\frac{\partial}{\partial x}|x\rangle. \tag{2.20}$$

Portanto, usando (2.18) e o fato de $P_x$ ser hermitiano, $P_x^\dagger = P_x$, pois caso contrário, o operador translação $T_{p_x}(x)$ não seria unitário devido a (2.10), teremos

$$P_x\psi(x) = \langle x|P_x|\psi\rangle = -i\frac{\partial\psi}{\partial x}. \tag{2.21}$$

Isto significa que, do ponto de vista da mecânica Quântica, onde derivadas espaciais estão ligadas ao operador momentum linear, o nosso gerador $P_x$ das translações unidimensionais $T_{p_x}(x)$ na irrep $p_x$ é o operador momentum linear $P_x = -(i\hbar)\partial/\partial x$ (com $\hbar = 1$). Generalize para três dimensões. Assim, podemos afirmar que as componentes do momentum linear gera o grupo das translações espaciais.

## 2.2 Caso discreto

Vamos considerar aqui apenas as translações por uma quantidade da forma $a = n_1 a_1$, $n_1 \in \mathbb{Z}$, $a_1 \in \mathbb{R}$, na direção do eixo $x$. Assim,

$$T(a)|x\rangle = |x + a\rangle \text{ ou } T(a)x = x + a. \tag{2.22}$$

Este é um caso particular das translações contínuas estudadas na seção anterior. No entanto, vamos denotar por $K$ o gerador destas translações particulares. Portanto, suas representações irredutíveis devem ser similares àquelas do caso contínuo,

$$K|k\rangle = k|k\rangle, \quad T_k(a)|k\rangle = \mathrm{e}^{-iaK}|k\rangle = \mathrm{e}^{-iak}|k\rangle, \quad \langle k|k'\rangle = 2\pi\delta(k - k'), \quad k \in \mathbb{R}. \tag{2.23}$$

Entretanto, ao contrário do caso geral, aqui podemos ter restrições aos possíveis valores de $k$, devido à forma dos deslocamentos $a$ ser discreta, $a = n_1 a_1$, $n_1 \in \mathbb{Z}$. De fato, vamos considerar duas irreps, $k$ e $k'$, onde

$$k' = k + b, \quad b = m_1 b_1, \quad b_1 = \frac{2\pi}{a_1}, \quad m_1 \in \mathbb{Z}. \tag{2.24}$$

Então as irreps $k$ e $k'$ são equivalentes, pois

$$\mathrm{e}^{-ik'a} = \mathrm{e}^{-i(k+b)a} = \mathrm{e}^{-ika}\,\mathrm{e}^{-iba} = \mathrm{e}^{-ika}\,\mathrm{e}^{-im_1 n_1 2\pi} = \mathrm{e}^{-ika}. \tag{2.25}$$

Portanto, as representações irredutíveis em (2.23) estão restritas à região $k' < k + b$. Esta região é conhecida como primeira zona de Brillouin, uma nomenclatura emprestada da Física do Estado Sólido.

Seja $\psi_k(x) = \langle x|k\rangle$ uma função de onda (contínua em $x$). Então, de (2.23) temos

$$K\psi_k(x) = \langle x|K|k\rangle = k\psi_k(x), \tag{2.26}$$

mostrando que as funções de onda $\psi_k(x)$ são autofunções do gerador $K$. A ação de $T_k(a)$ em $\psi_k(x)$ pode ser calculada de duas formas. Primeiro, a forma mais direta,

$$T_k(a)\psi_k(x) = \langle x|T_k(a)|k\rangle = \mathrm{e}^{-ika}\psi_k(x), \tag{2.27}$$

onde usamos também as ações dadas em (2.23). Este resultado é esperado, pois as funções $\psi_k(x)$ são autovetores do gerador $K$ das translações $T_k(a)$. Por outro lado, como é a ação da translação $T(a)$ em uma função contínua como $f(x) = x$? Se entendermos que esta ação deve transladar o gráfico de $f(x) = x$ paralelamente ao eixo $X$ por uma quantidade $a$, então devemos ter $T(a)f(x) = x - a = f(x - a)$ (faça o Exercício 23). Isto significa que a ação de $T(a)$ em uma função contínua $\psi(x)$ deve ser da forma $T(a)\psi(x) = \psi(x - a)$ (faça o Exercício 23). Assim, a segunda forma de escrevermos a de $T_k(a)$ em $\psi_k(x)$ é

$$T_k(a)\psi_k(x) = \psi_k(x - a). \tag{2.28}$$

Note então que conseguimos uma propriedade importante sobre as funções de onda $\psi_k(x)$:

$$\psi_k(x-a) = \mathrm{e}^{-ika}\psi_k(x) \quad \text{ou} \quad \psi_k(x+a) = \mathrm{e}^{ika}\psi_k(x). \tag{2.29}$$

Funções obedecendo esta propriedade são denominadas de quasi-periódicas (devido a presença da fase) de período $a$. A importância de uma função quasi-periódica como $\psi_k(x)$ reside no fato de podermos construir uma função completamente periódica $\phi_k(x)$ de imediato, através da prescrição (faça o Exercício 24)

$$\phi_k(x) = \mathrm{e}^{-ikx}\psi_k(x). \tag{2.30}$$

Portanto, quando $\psi_k(x)$ é uma autofunção do gerador $K$, ela sempre pode ser escrita como

$$\psi_k(x) = \mathrm{e}^{ikx}\phi_k(x), \quad \phi_k(x+a) = \phi_k(x), \tag{2.31}$$

onde $\phi_k(x)$ é uma função periódica, denominada de função de Bloch. Este resultado é essencial em Física do Estado Sólido e é conhecido lá como Teorema de Floquet, para o caso unidimensional, e Teorema de Bloch, para o caso tridimensional. A sua generalização para o caso tridimensional (ou mais dimensões) é imediata: as quantidades $x$, $a$, $b$ e $k$ tornam-se em vetores, $x \to \mathbf{r}$, $a \to \mathbf{a}$, $b \to \mathbf{b}$, $k \to \mathbf{k}$, e os produtos $ka$ e $kx$ tornam-se produtos escalares, $ka \to \mathbf{k}\cdot\mathbf{a}$ e $kx \to \mathbf{k}\cdot\mathbf{x}$.

A simetria translacional discreta aparece naturalmente em Física do Estado Sólido devido ao arranjo periódico da rede cristalina. Quando a interação elétron-elétron é desprezada, embora ela seja muito importante, o comportamento de um elétron (conhecido também por elétron de Bloch) pode ser descrito pela equação de Schrödinger

$$H\psi_{\mathbf{k}} = \varepsilon_{\mathbf{k}}\psi_{\mathbf{k}}, \quad H = \frac{1}{2m}p^2 + U(\mathbf{r}), \quad U(\mathbf{r}+\mathbf{a}) = U(\mathbf{r}), \tag{2.32}$$

onde $U(\mathbf{r})$ é o potencial efetivo e periódico produzido pela rede cristalina com $\mathbf{a}$ em uma rede de Bravais. Como uma translação $T_{\mathbf{k}}(\mathbf{a})$ não afeta a parte cinética do operador hamiltoniano $H$, e o potencial é periódico em $\mathbf{r}$ com período $\mathbf{a}$, então estes dois operadores comutam. Portanto, se comutam, $H$ e $T_{\mathbf{k}}$ podem ser diagonalizados simultaneamente. Assim, a autofunção $\psi_{\mathbf{k}}$ do operador hamiltoniano $H$ também será autofunção de $T_{\mathbf{k}}$. Desta forma, fazendo uso do Teorema de Bloch, $\psi_{\mathbf{k}} = \mathrm{e}^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}\phi_{\mathbf{k}}$, a equação de Schrödinger (2.32) torna-se numa equação diferencial para a função periódica $\phi_{\mathbf{k}}$ (faça o Exercício 25).

Em Física do Estado Sólido, as quantidades $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ e $\mathbf{k}$, têm as seguintes interpretações geométricas e físicas: o vetor $\mathbf{a} = n_1\mathbf{a}_1 + n_2\mathbf{a}_2 + n_3\mathbf{a}_3$ define a rede de Bravais; o vetor $\mathbf{b} = m_1\mathbf{b}_1 + m_2\mathbf{b}_2 + m_3\mathbf{b}_3$, onde

$$\mathbf{b}_1 = 2\pi\,\frac{\mathbf{a}_2\wedge\mathbf{a}_3}{\mathbf{a}_1\cdot\mathbf{a}_2\wedge\mathbf{a}_3}, \quad \mathbf{b}_2 = 2\pi\,\frac{\mathbf{a}_3\wedge\mathbf{a}_1}{\mathbf{a}_2\cdot\mathbf{a}_3\wedge\mathbf{a}_1}, \quad \mathbf{b}_3 = 2\pi\,\frac{\mathbf{a}_1\wedge\mathbf{a}_2}{\mathbf{a}_3\cdot\mathbf{a}_1\wedge\mathbf{a}_2}, \tag{2.33}$$

é o vetor da rede recíproca. Note que $\mathbf{a}_i\cdot\mathbf{b}_j = \delta_{ij}$. O vetor $\mathbf{k}$ é o vetor de onda, definido por $\mathbf{k} = k_1\mathbf{b}_1 + k_2\mathbf{b}_2 + k_3\mathbf{b}_3$, $k_i \in \mathbb{C}$. A quantidade $\hbar\mathbf{k}$ é conhecida como momentum linear do cristal, mas não é o momentum linear usual $\mathbf{p}$.

## 2.3 Exercícios

**Exercício 13** *Use a ação (2.1) para deduzir explicitamente as propriedades (2.2)–(2.5).*

**Exercício 14** *Suponha que o operador $T(x)$ possa ser representado por uma matriz bidimensional qualquer,*

$$T(x) \to \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}. \tag{2.34}$$

*Use a ação (2.1), reescrita na forma matricial*

$$T(x)|x_0\rangle = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 + x \\ 1 \end{pmatrix} = |x_0 + x\rangle, \tag{2.35}$$

*para mostrar que $a = d = 1$, $b = x$ e $c = 0$, conforme indicado em (2.7).*

**Exercício 15** *Mostre que a representação matricial dada em (2.7) satisfaz as propriedades (2.2)–(2.5).*

**Exercício 16** *Mostre que as matrizes dadas em (2.8) satisfazem as propriedades (2.2)–(2.5).*

**Exercício 17** *Mostre que equação diferencial em (2.10) pode ser obtida de $T(x + \Delta x) = T(\Delta x)T(x)$, com $T(\Delta x)$ escrita em termos do gerador $P_x$ em (2.9), no limite $\Delta x \to 0$.*

**Exercício 18** *Use a prescição (2.11) e a representação espacial dada em (2.8) para calcular os dois geradores do grupo $T_2$ dados em (2.12). Mostre que eles comutam.*

**Exercício 19** *Use a prescição (2.11) e a representação espacial dada em (2.8) para calcular os dois geradores do grupo $T_3$. Mostre que eles comutam.*

**Exercício 20** *Use $T^\dagger(x) = (\mathrm{e}^{-ixP_x})^\dagger = \mathrm{e}^{ixP_x^\dagger}$ e a condição de hermiticidade do gerador $P_x$ para mostrar que $T^\dagger(x) = T^{-1}(x) = T(-x)$.*

**Exercício 21** *Parta da identidade $|x\rangle = \mathbb{I}\,|x\rangle$, com a identidade reescrita em termos da sua relação de completeza, como em (2.14), para determinar o coeficiente $c(p_x)$ em (2.19). Use também o fato que $|x\rangle = T(x)|x = 0\rangle$.*

**Exercício 22** *Use a expansão (2.19) para o vetor $|x\rangle$ e calcule a ação do gerador $P_x$ neste vetor e mostre que o resultado dado em (2.20) está correto.*

**Exercício 23** *Assuma que a ação da translação $T(a)$ em uma função contínua $f(x) = x$ deva transladar seu gráfico paralelamente ao eixo $X$ por uma quantidade $a$. (1) Mostre graficamente que $T(a)f(x) = x - a = f(x-a)$, para $f(x) = x$. (2) Mostre graficamente que $T(a)f(x) = (x-a)^2 = f(x-a)$, para $f(x) = x^2$. Assim, por indução, devemos ter $T(a)f(x) = (x-a)^n = f(x-a)$, para qualquer potência $f(x) = x^n$. (3) Use o fato de que qualquer função contínua $f(x)$ possui uma série de Taylor para mostrar que $T(a)f(x) = f(x-a)$.*

**Exercício 24** *Mostre que função $\phi_k(x)$ definida em (2.30) é de fato periódica de periódo $a$, se a função $\psi_k(x)$ é quasi-periódica de periódo $a$.*

**Exercício 25** *Substitua $\psi_{\mathbf{k}} = \mathrm{e}^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}\phi_{\mathbf{k}}$ em (2.32) e mostre as funções periódicas $\phi_{\mathbf{k}}$ satisfazem*

$$H\phi_{\mathbf{k}} = \varepsilon_{\mathbf{k}}\phi_{\mathbf{k}}, \quad H = \frac{1}{2m}p^2 + U(\mathbf{r}) + \frac{(\hbar\mathbf{k})^2}{2m}, \quad p^2 = -\hbar^2\nabla^2. \tag{2.36}$$

# Capítulo 3

# Grupo Euclidiano Bidimensional

## 3.1 O grupo $E_2$

O grupo euclidiano no plano, o qual será denotado por $E_2$, é formado por transformações lineares no plano compostas pelas rotações SO(2) em torno de um eixo fixo seguidas pelas translações uniformes $T_2$ no plano perpendicular ao eixo de rotação. Assim, o grupo $E_2$ preserva o comprimento de qualquer vetor no plano. Note também que o grupo $E_2$ é formado por transformações lineares contínuas dependentes em três parâmetros, um parâmetro compacto proveniente das rotações e outros dois parâmetros não-compactos provenientes das translações. Portanto o grupo euclidiano é não-compacto. Como antes, vamos denotar por $R(\alpha)$ uma rotação por um ângulo $\alpha$ ($0 \leq \alpha < 2\pi$) em torno de eixo fixo, digamos o eixo $z$, e por $T(\mathbf{a})$ uma translação bidimensional por uma quantidade $\mathbf{a} = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2$ ($-\infty < a_k < \infty$), onde $\mathbf{e}_k$ são os versores da base escolhida no plano $xy$. Então podemos verificar todas as propriedades de um grupo para o grupo euclidiano numa forma algébrica. Para tal, vamos denotar por

$$g(\alpha, \mathbf{a}) = T(\mathbf{a})R(\alpha), \quad R^{\mathrm{T}} = R^{-1}, \tag{3.1}$$

um elemento qualquer do grupo $E_2$. Em geral, uma rotação em torno de um eixo fixo numa determinada posição não comuta com uma translação (faça o Exercício 26). Desta forma, a ordem dos operadores em (3.1) é relevante e, uma vez escolhida, deve ser mantida. A ação deste elemento em um vetor $\mathbf{r} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2$ no plano $xy$ é

$$\mathbf{r}' = g(\alpha, \mathbf{a})\mathbf{r} = T(\mathbf{a})\big[R(\alpha)\mathbf{r}\big] = \mathbf{a} + R(\alpha)\mathbf{r} \Rightarrow x_i' = a_i + \sum_{j=1}^{2} R_{ij}(\alpha)x_j. \tag{3.2}$$

Evidentemente, este resultado pode ser reescrito numa forma matricial. No entanto, algumas propriedades gerais serão discutidas primeiro. Deixaremos esta forma matricial para o final desta subseção. Note que a condição de ortogonalidade $R^{\mathrm{T}} = R^{-1} = R(-\alpha)$ da rotação $R(\alpha)$ garante que o vetor transladado $\mathbf{r}' - \mathbf{a}$ tenha o mesmo comprimento que o vetor original $\mathbf{r}$ (faça o Exercício 27). Desta forma, podemos deduzir de (3.2) as seguintes propriedades (faça o Exercício 28):

$$\mathbb{I} = g(0, \mathbf{0}) \quad \text{(identidade)}, \tag{3.3}$$

$$g(\beta, \mathbf{b})g(\alpha, \mathbf{a}) = g(\alpha + \beta, \mathbf{b} + R(\beta)\mathbf{a}) \quad \text{(completeza)}, \tag{3.4}$$

$$g^{-1}(\alpha, \mathbf{a}) = g\big(-\alpha, -R(-\alpha)\mathbf{a}\big) \quad \text{(inverso)}, \tag{3.5}$$

$$g(\gamma, \mathbf{c})[g(\beta, \mathbf{b})g(\alpha, \mathbf{a})] = [g(\gamma, \mathbf{c})g(\beta, \mathbf{b})]g(\alpha, \mathbf{a}) \quad \text{(associatividade)}. \tag{3.6}$$

A forma (3.5) do elemento inverso pode ser obtida diretamente do produto (3.4) impondo que $g(\beta, \mathbf{b})g(\alpha, \mathbf{a}) = g(\alpha, \mathbf{a})g(\beta, \mathbf{b}) = g(0, \mathbf{0})$. O elemento inverso também pode ser escrito na forma de operadores (muito útil) se usarmos a definição (3.1) e o fato que o inverso (ou o transposto) do produto de dois operadores é o produto dos inversos (transpostos) na ordem invertida:

$$g^{-1}(\alpha, \mathbf{a}) = \big[T(\mathbf{a})R(\alpha)\big]^{-1} = R^{-1}(\alpha)T^{-1}(\mathbf{a}) = R(-\alpha)T(-\mathbf{a}). \tag{3.7}$$

Na definição (3.1), escolhemos escrevemos as translações à esquerda. Vimos no Exercício 26 que translações não comutam com rotações. Vimos também em capítulos anteriores que tanto translações quanto rotações (em torno de um eixo fixo) formam grupos abelianos. E o grupo euclidiano, ele é abeliano? Vamos mostrar que não. Para isto, vamos partir do produto (3.4) entre dois elementos do grupo $\mathrm{E}_2$. Expandindo os dois lados da igualdade em (3.4) em termos dos respectivos operadores e usando a identidade $\mathbb{I} = R(-\alpha)R(\alpha)$, obteremos:

$$\begin{aligned} g(\alpha,\mathbf{a})g(\beta,\mathbf{b}) &= T(\mathbf{a})R(\alpha)T(\mathbf{b})R(\beta) = T(\mathbf{a})R(\alpha)T(\mathbf{b})\big[R(-\alpha)R(\alpha)\big]R(\beta) \\ &= T(\mathbf{a})\big\{R(\alpha)T(\mathbf{b})R(-\alpha)\big\}R(\alpha+\beta) = \\ g(\alpha+\beta,\mathbf{a}+R(\alpha)\mathbf{b}) &= T(\mathbf{a}+R(\alpha)\mathbf{b})R(\alpha+\beta) = T(\mathbf{a})\big\{T(R(\alpha)\mathbf{b})\big\}R(\alpha+\beta), \end{aligned} \tag{3.8}$$

de onde concluímos que

$$R(\alpha)T(\mathbf{b})R^{-1}(\alpha) = T\big(R(\alpha)\mathbf{b}\big) \quad \text{ou} \quad R(\alpha)T(\mathbf{b}) = T\big(R(\alpha)\mathbf{b}\big)R(\alpha). \tag{3.9}$$

Então provamos que o grupo euclidiano não é abeliano, pois a última expressão em (3.9) nos diz que $R(\alpha)T(\mathbf{b}) \neq T(\mathbf{b})R(\alpha)$. Além disto, provamos outro resultado importante: a primeira expressão em (3.9) nos diz que o subgrupo das translações é invariante perante às rotações, isto é, as rotações atuam como uma transformação de similaridade nas translações e o resultado é outra translação,

$$T(\mathbf{a}) = R(-\alpha)\,T\big(R(\alpha)\mathbf{a}\big)\,R(\alpha). \tag{3.10}$$

Sim, obtivemos uma translação $T\big(R(\alpha)\mathbf{a}\big)$ diferente da primeira $T(\mathbf{a})$, mas ainda é uma translação. Isto significa que as rotações apenas modificam a ordem em que escrevemos originalmente as translações. Como as translações formam um subgrupo abeliano, então elas são também invariante à ação do grupo euclidiano inteiro. Esta observação é fundamental para uma classificação geral dos grupos de Lie. Grupos de Lie que não contém subgrupos invariantes são denominados de simples. Portanto o grupo euclidiano não é simples, pois ele contém um subgrupo invariante formado pelas translações. Quando um grupo de Lie contém subgrupos invariantes, mas nenhum deles sendo abeliano, ele é denominado de semi-simples. Portanto, o grupo euclidiano também não é semi-simples, pois as translações formam um subgrupo invariante abeliano. Estes dois conceitos, simplicidade e semi-simplicidade, terão importância fundamental na classificação geral dos grupos de Lie e são aplicados também às álgebras de Lie correspondentes.

Como mencionado anteriormente, usando a ação (3.2), é possível realizar um elemento do grupo euclidiano por uma matriz (faça o Exercício 29),

$$g(\alpha,\mathbf{a}) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha & a_1 \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha & a_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}, \tag{3.11}$$

onde usamos novamente o truque de escrever o vetor posição usando três componentes. Esta matriz representa univocamente um elemento de $\mathrm{E}_2$ agindo no vetor $\mathbf{r}$, isto é, todas as propriedades em (3.3)–(3.4) podem ser verificadas usando diretamente (faça o Exercício 30) a representação matricial (3.11). Algumas propriedades da matriz (3.11) devem ser comentadas (verifique): (i) o seu determinante é 1; (ii) seus autovalores são 1 e $\mathrm{e}^{\pm i\alpha}$; (iii) ela não é ortogonal (e nem unitária). A aparente artificialidade da dimensão extra em (3.11), além dela não ser unitária, é mais uma característica das representações de dimensão finita dos grupos não-compactos e não-abelianos. Veremos logo adiante que as representações (irredutíveis) unitárias do grupo euclidiano terão dimensões infinitas. Este é um resultado geral para os grupos de Lie não-compactos (não-abelianos): suas representações irredutíveis unitárias são de dimensões infinitas.

## 3.2 A álgebra do grupo $\mathrm{E}_2$

### 3.2.1 Geradores

A álgebra $\mathfrak{E}_2$ do grupo euclidiano pode ser calculada através da representação matricial (3.11). Seguindo os passos anteriores, teremos aqui três geradores (faça o Exercício 30):

$$J_z = i\frac{\partial g}{\partial\alpha}\bigg|_{\alpha=0} = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P_1 = i\frac{\partial g}{\partial a_1}\bigg|_{a_1=0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P_2 = i\frac{\partial g}{\partial a_2}\bigg|_{a_2=0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & o \\ 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.12}$$

De fato, os elementos do subgrupo das translações, bem como os elementos do subgrupo das rotações, podem ser escritos numa forma exponencial (faça o Exercício 31),

$$T(\mathbf{a}) = \mathrm{e}^{-i(a_1 P_1 + a_2 P_2)}, \quad R(\alpha) = \mathrm{e}^{-i\alpha J_z}. \tag{3.13}$$

Note que as matrizes representando os geradores $P_k$ não são hermitianas. Isto está relacionado com o fato da representação (3.11) não ser unitária.

Vale comentar que o fato da subálgebra das translações ser abeliana, isto é, $[P_1, P_2] = 0$, então a primeira exponencial em (3.13) também pode ser escrita como

$$T(\mathbf{a}) = \mathrm{e}^{-i(a_1 P_1 + a_2 P_2)} = \mathrm{e}^{-ia_1 P_1}\,\mathrm{e}^{-ia_2 P_2} = \mathrm{e}^{-ia_2 P_2}\,\mathrm{e}^{-ia_1 P_1}. \tag{3.14}$$

Em geral, a exponencial da soma de matrizes (ou operadores) não é simplesmente o produto das exponenciais como em (3.14), mas o produto de exponenciais de funções polinomiais das matrizes originais. Somente quando as matrizes (ou operadores) comutam, a exponencial de uma combinação linear delas pode ser reescrita na forma de um produto de exponenciais de cada uma delas. Como outro exemplo, verifique que as matrizes $\exp(-i\alpha\, J_z - ia_1 P_1 - ia_2 P_2)$ e $\exp(-i\alpha\, J_z)\exp(-ia_1 P_1 - ia_2 P_2)$ são diferentes e que esta última é que reproduz a representação matricial em (3.11).

Os produtos de Lie, isto é, os comutadores entre os geradores, podem ser calculados diretamente de (3.12),

$$[J_z, P_1] = iP_2, \quad [J_z, P_2] = -iP_1, \quad [P_1, P_2] = 0. \tag{3.15}$$

Os dois primeiros comutadores refletem o fato das rotações deixarem o grupo das translações invariante. O último comutador reflete o fato das translações formarem um grupo abeliano, ou seja, a álgebra de um grupo abeliano também é abeliana. A invariância da subálgebra $\mathfrak{T}_2$ das translações perante a subálgebra so(2) das rotações é melhor evidenciada usando os seguintes geradores para as translações:

$$P_\pm = P_1 \pm iP_2. \tag{3.16}$$

Usando os novos geradores $P_\pm$, as relações de comutação (3.15) podem ser reescritas como

$$[J_z, P_\pm] = \pm P_\pm, \quad [P_+, P_-] = 0. \tag{3.17}$$

Note que o primeiro comutador tem a forma de uma equação de autovalores. De fato, podemos definir uma operação entre estes geradores da forma $J_z \circ P_\pm = [J_z, P_\pm]$. Assim, $J_z \circ P_\pm = \pm P_\pm$, mostrando que $P_\pm$ comporta-se como autovetores de $J_z$, com autovalores $\pm 1$. Isto para enfatizar que a a álgebra das translações é invariante perante a ação da álgebra das rotações. Desta forma, a álgebra $\mathfrak{E}_2$ do grupo euclidiano tem uma subálgebra invariante ($\mathfrak{T}_2$). Existe uma notação apropriada para o caso onde uma determinada álgebra de Lie contém uma subálgebra invariante. Para o presente caso, vamos denotar por

$$\mathfrak{E}_2 = \mathfrak{T}_2 \dotplus \mathrm{so}(2) = \{J_z, P_1, P_2\} \tag{3.18}$$

a álgebra do grupo euclidiano, onde $\mathfrak{T}_2$ é a subálgebra abeliana das translações, formada pelos dois geradores $P_1, P_2$, e so(2) é a subálgebra das rotações, formada pelo gerador $J_z$. A notação (3.18) é uma convenção onde a subálgebra invariante é colocada mais a esquerda das demais. Quando as subálgebras comutam, o símbolo $\dotplus$ (soma semi-direta) é trocado por $\oplus$ (soma direta).

Tanto (3.15) quanto (3.17) mostra que os geradores $\{J_z, P_1, P_2\}$ formam uma base para uma álgebra de dimensão três, com um produto interno definido pelo produto de Lie. Isto significa que, por exemplo, usando a forma (3.17),

$$[J_z, P_\pm] = \sum_k C^k_{z\pm} X_k, \quad X_k \in \{J_z, P_1, P_2\}, \tag{3.19}$$

onde $C^k_{z\pm} = -C^k_{\pm z}$ são denominadas de constantes de estrutura de uma álgebra de Lie. A anti-simetria nos dois índices inferiores das constantes de estrutura refletem o fato do produto de Lie ser anti-simétrico. No presente caso, estas constantes são (faça o Exercício 32):

$$\begin{aligned} C^z_{z+} &= 0, & C^-_{z+} &= +1, & C^+_{z+} &= 0, \\ C^z_{z-} &= 0, & C^-_{z-} &= 0, & C^+_{z-} &= -1, \\ C^z_{+-} &= 0, & C^-_{+-} &= 0, & C^+_{+-} &= 0. \end{aligned} \tag{3.20}$$

As constantes de estrutura funcionam como uma espécie de identificação de uma álgebra. Cada álgebra de Lie possui então esta "carteira de identidade" formada pelas suas constantes de estrutura. Esta forma de identificação é única a menos de transformações lineares envolvendo os elementos da álgebra. Desta forma, as constantes de estrutura presentes nas relações de comutação (3.15) e (3.17) não definem álgebras diferentes.

### 3.2.2 Representações irredutíveis

Tendo estabelecido a estrutura de uma álgebra de Lie, isto é, tendo efetuado explicitamente os produtos de Lie entre todos os geradores, o próximo passo é um estudo de suas representações irredutíveis. O caminho mais fácil é aquele que nos leva a representações unitárias para o grupo de Lie correspondente. Portanto, iniciaremos estudando as representações hermitianas da álgebra $\mathfrak{E}_2$. Em termos concretos, o problema que temos de solucionar é o seguinte: determinar a forma matricial de cada um dos geradores $\{J_z, P_1, P_2\}$, interpretados como operadores atuando em algum espaço vetorial a ser construído, sob a condição de que tais matrizes sejam hermitianas, $J_z^\dagger = J_z$, $P_k^\dagger = P_k$, e que satisfaçam as mesmas relações de comutação (3.15). Por pura conveniência, iremos representar primeiro os geradores $\{J_z, P_\pm\}$, ou seja, iremos usar as relações de comutação (3.17) ao invés de (3.15). Então, usando a condição $P_k^\dagger = P_k$ na definição (3.16), devemos requerer que $P_\pm^\dagger = P_\mp$ para que os operadores $P_k$ sejam hermitianos.

Pois bem, temos agora de construir um espaço vetorial apropriado para a ação dos geradores $\{J_z, P_\pm\}$. O adjetivo apropriado significa que as matrizes irredutíveis representando estes geradores serão hermitianas. Felizmente existe um procedimento geral para a construção deste espaço vetorial, denominado de espaço portador das representações irredutíveis. A primeira providência é encontrar um conjunto de operadores invariantes, isto é, que comutam entre si, também conhecidos por operadores de Casimir. Então, como eles comutam, podemos diagonalizá-los simultaneamente. Feito isto, os autovetores destes operadores invariantes poderão ser usados como uma base para o espaço vetorial portador das representações procuradas. Veja que o processo de construção das representações irredutíveis está, passo a passo, tomando uma forma concreta. Nossa atenção agora está voltada para os operadores invariantes. Existe um procedimento para encontrá-los? Sim, felizmente existe, e depende somente das relações de comutação da álgebra, mas funciona somente para álgebras semi-simples ou simples. No entanto, apesar da álgebra $\mathfrak{E}_2$ em questão não ser simples e nem semi-simples, podemos verificar que o operador hermitiano (faça o Exercício 33)

$$P^2 = P_1^2 + P_2^2 = P_\pm P_\mp \tag{3.21}$$

comuta com todos os geradores definidos em (3.12). Para verificar esta propriedade, sem usar as matrizes (3.12), devemos utilizar outra propriedade inerente aos comutadores entre matrizes (ou operadores) quaisquer,

$$[A, BC] = B[A, C] + [A, B]C, \tag{3.22}$$

a qual pode ser provada expandindo os dois lados e verificando-se a igualdades deles (faça o Exercício 33). Note ques esta propriedade é idêntica à regra de derivação de um produto (daí seu adjetivo "derivação"). Já que estamos nos comportando como matemáticos em boa parte destes estudos, não podemos esquecer da unicidade. O operador (3.21) é o único operador de Casimir da álgebra $\mathfrak{E}_2$? Sim, ele é o único operador invariante para a álgebra $\mathfrak{E}_2$. E as subálgebras $\mathfrak{T}_2$ e so(2), elas não podem fornecer mais invariantes? De fato, a subálgebra so(2) pode contribuir com o seu único operador invariante: o próprio $J_z$. A subálgebra $\mathfrak{T}_2$ já contribuiu com $P^2$. Note que apenas $P^2$ é um operador invariante da álgebra maior $\mathfrak{E}_2$. Note também que o invariante $P^2$ é um polinômio quadrático nos elementos da subálgebra $\mathfrak{T}_2$. Portanto, ele não pertence à álgebra $\mathfrak{T}_2$, pois, segundo a definição de uma álgebra linear, apenas combinações lineares nos seus elementos estão contidas nela. Entretanto, podemos pensar numa estrutura mais geral formada pela álgebra e todos os polinômios possíveis em seus elementos: esta estrutura é conhecida como álgebra envelope. Assim, em geral, os operadores invariantes pertencem à álgebra envelope.

De volta ao nosso conjunto completo de operadores comutantes (CSCO, em Mecânica Quântica) da álgebra $\mathfrak{E}_2$ e de suas subálgebras: $\{P^2, J_z\}$. Agora, estamos a meio caminho de terminarmos a construção do espaço portador. Como dito antes, os autovetores $|p, m\rangle$ são comuns ao conjunto $\{P^2, J_z\}$, ou seja,

$$\begin{aligned} P^2|p, m\rangle &= p^2|p, m\rangle, \\ J_z|p, m\rangle &= m|p, m\rangle, \end{aligned} \tag{3.23}$$

onde $p$ e $m$ são quantidades reais para que a condição de hermiticidade seja satisfeita. Estes autovetores $|p,m\rangle$, abstratos, formam a base do espaço portador das irreps que estamos procurando. Algumas observações: (i) usamos $p^2$ como o autovalor do operador $P^2$ por pura conveniência; (ii) os autovetores $|p,m\rangle$ são abstratos, mas a ortogonalidade deles é garantida pela condição de hermiticidade dos operadores $\{P^2, J_z\}$. Certamente podemos assumir que eles estejam normalizados. Esta é uma das vantagens de trabalharmos com representações hermitianas.

Como os operadores $P_\pm$ agem nos vetores $|p,m\rangle$? Isto é o que falta para caracterizarmos melhor o espaço portador e, portanto, conhecermos completamente as irreps que estamos procurando. As ações dos operadores $P_\pm$ podem ser determinadas com o auxílio da relação de comutação $[J_z, P_\pm] = \pm P_\pm$, pois ela implica que o novo vetor $P_\pm|p,m\rangle$ é também um autovetor de $J_z$, com autovalor $m \pm 1$,

$$J_z P_\pm|p,m\rangle = (P_\pm J_z \pm P_\pm)|p,m\rangle = (m\pm 1)P_\pm|p,m\rangle. \tag{3.24}$$

Então devemos ter $P_\pm|p,m\rangle \propto |p, m\pm 1\rangle$, ou seja, os operadores $P_\pm$ modificam os autovalores $m$. De forma análoga, podemos mostrar que estes operadores não modificam os autovalores $p$,

$$P^2 P_\pm|p,m\rangle = P_\pm P^2|p,m\rangle = p^2 P_\pm|p,m\rangle. \tag{3.25}$$

Portanto, estes dois resultados implicam que a ação geral dos operadores $P_\pm$ em $|p,m\rangle$ deve se escrita na forma

$$P_\pm|p,m\rangle = A_\pm(p,m)|p,m\pm 1\rangle. \tag{3.26}$$

A constante complexa $A_\pm$ é determinada usando a condição de hermiticidade do operador de Casimir $P^2$. A norma do vetor (3.26) é determinada através de um produto escalar complexo, isto é, por

$$\langle p,m|P_\pm^\dagger P_\pm|p,m\rangle = A_\pm^* A_\pm \,\langle p,m\pm 1|p,m\pm 1\rangle = |A_\pm|^2, \tag{3.27}$$

onde estamos assumindo que os vetores $|p,m\rangle$ estejam normalizados. Mas há outra maneira de calcularmos o produto escalar (3.27), usando a ação de $P^2$ dada em (3.23):

$$\langle p,m|P_\pm^\dagger P_\pm|p,m\rangle = \langle p,m|P_\mp P_\pm|p,m\rangle = \langle p,m|P^2|p,m\rangle = p^2\,\langle p,m|p,m\rangle = p^2. \tag{3.28}$$

Assim, de (3.27) e (3.28), podemos determinar o módulo das constantes $A_\pm$:

$$|A_\pm|^2 = p^2. \tag{3.29}$$

Isto justifica termos escolhido $p^2 \geq 0$ para os autovalores de $P^2$ em (3.23). E as fases? sim, qualquer número complexo pode ser escrito como o produto de seu módulo pela sua fase, $A_\pm = |A_\pm|\,\mathrm{e}^{i\phi_\pm}$. Estas fases $\phi_\pm(p,m)$ das constantes $A_\pm$ devem ser determinadas pelas propriedades globais do grupo $\mathrm{E}^2$, pois não há mais informações que possam ser usadas no contexto da álgebra $\mathfrak{E}_2$ para determinarmos as fases. Sumariando o que fizemos até o momento, temos:

$$P^2|p,m\rangle = p^2|p,m\rangle, \tag{3.30}$$

$$J_z|p,m\rangle = m|p,m\rangle, \tag{3.31}$$

$$P_\pm|p,m\rangle = p\,\mathrm{e}^{i\phi_\pm}|p,m\pm 1\rangle, \tag{3.32}$$

$$P_1|p,m\rangle = +\frac{1}{2}p\;\mathrm{e}^{i\phi_+}|p,m+1\rangle + \frac{1}{2}p\;\mathrm{e}^{i\phi_-}|p,m-1\rangle, \tag{3.33}$$

$$P_2|p,m\rangle = -\frac{i}{2}p\;\mathrm{e}^{i\phi_+}|p,m+1\rangle + \frac{i}{2}p\;\mathrm{e}^{i\phi_-}|p,m-1\rangle. \tag{3.34}$$

Observe que a ação dos operadores $P_\pm$ é mais simples que a ação dos operadores $P_k$. Observe também a forma como os vetores $|p,m\rangle$ são modificados pela ação dos operadores $P_\pm$: é uma ação ascendente ($m \to m+1$) para $P_+$ e descendente ($m \to m-1$) para $P_-$, conectando apenas vizinhos mais próximos. Por isto, os operadores $P_\pm$ são denominados de operadores de levantamento e abaixamento, respectivamente, com passo unitário.

Portanto, até o momento, não há qualquer restrição aos valores reais de $p$ e $m$ ou qualquer relação entre eles. Então, para cada valor de $p$ haverá infinitos vetores rotulados por $m$ e conectados pela ação dos operadores de levantamento e abaixamento $P_\pm$. Na linguagem da teoria de representação dos grupos de Lie, diz-se que cada representação irredutível, unitária, do grupo euclidiano é caracterizada pelo autovalor $p$ de $P^2$, um índice contínuo, onde cada vetor desta representação é indexado pelo autovalor $m$ de $J_z$, também real, pelo menos até o momento. Em teoria de grupos, os autovalores $p$ e $m$ em (3.23) são mais conhecidos por pesos das representações irredutíveis. Então, estas representações unitárias (hermitianas na álgebra) têm dimensões infinitas. Como a álgebra e o grupo estão relacionados por uma aplicação exponencial em torno da identidade, então as representações irredutíveis do grupo também serão de dimensões infinitas. Isto exemplifica um resultado geral sobre grupos de Lie não-compactos: suas representações irredutíveis unitárias são todas de dimensões infinitas. Apenas os grupos compactos admitem representações irredutíveis e unitárias de dimensões finitas.

### 3.2.3 A forma de Killing

Em princípio, esta subseção pode ser ignorada numa primeira leitura. Porém, o momento é oportuno para discutirmos uma ferramenta muito útil para identificarmos algumas propriedades importantes de uma determinada álgebra. Imagine que você encontre uma determinada álgebra, a qual você desconhece. Você pode tentar algumas combinações lineares entre seus elementos a fim de reescrever seus comutadores numa forma conhecida e então identificá-la. No entanto, isto pode ser muito difícil se não tivermos outras informações sobre esta álgebra desconhecida. Por exemplo, ajudaria saber se ela é compacta ou não; ajudaria saber se ela é semi-simples ou simples ou nenhum dos dois; também ajudaria saber quem são seus operadores invariantes. O procedimento que passaremos a trabalhar a seguir nos dirá se uma determinada álgebra é compacta ou não, se ela é semi-simples ou não, conhecendo apenas suas constantes de estrutura e, além disto, se ela for semi-simples, teremos também um procedimento para escrevermos explicitamente os seus operadores invariantes.

Primeiro, precisaremos construir uma representação inerente a qualquer álgebra de Lie da seguinte forma. Naturalmente, usaremos a álgebra $\mathfrak{E}_2$ como laboratório. Então vamos mudar um pouquinho a notação que temos usado para os geradores: $X_1 = J_z$, $X_2 = P_+$ e $X_3 = P_-$. Fixe esta ordem. Agora use o produto de Lie para definir uma ação da álgebra $\mathfrak{E}_2$ nela mesma, ou seja, os elementos da álgebra $\mathfrak{E}_2$ serão interpretados como operadores (à esquerda) $\hat{X}$ e vetores (à direita) $X$: $\hat{X}_i X_k = [X_i, X_k]$. Para ver como isto funciona, basta reescrever as relações de comutação (3.17) na seguinte forma (faça o Exercício 34)

$$\begin{aligned} \hat{X}_1 X_1 &= [X_1, X_1] = 0X_1 + 0X_2 + 0X_3 \\ \hat{X}_1 X_2 &= [X_1, X_2] = 0X_1 + 1X_2 + 0X_3 \\ \hat{X}_1 X_3 &= [X_1, X_3] = 0X_1 + 0X_2 - 1X_3 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad J_z = X_1 \to \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \tag{3.35}$$

onde iniciamos com o operador $X_1 = J_z$. Note que nos guardamos as três constantes de estrutura presentes em cada um dos comutadores como uma coluna de uma matriz $3 \times 3$. Faça o mesmo para $X_2 = J_+$,

$$\begin{aligned} \hat{X}_2 X_1 &= [X_2, X_1] = -X_2 \\ \hat{X}_2 X_2 &= [X_2, X_2] = 0 \\ \hat{X}_2 X_3 &= [X_2, X_3] = 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad J_+ = X_2 \to \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{3.36}$$

e para $X_3 = J_-$,

$$\begin{aligned} \hat{X}_3 X_1 &= [X_3, X_1] = +X_3 \\ \hat{X}_3 X_2 &= [X_3, X_2] = 0 \\ \hat{X}_3 X_3 &= [X_3, X_3] = 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad J_- = X_3 \to \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.37}$$

Estas três matrizes representam fielmente (faça o Exercício 35) os elementos da álgebra $\mathfrak{E}_2$, isto é, elas satisfazem as relações de comutação (3.17). Note também que as matrizes representando $P_1$ e $P_2$ não são hermitianas. Esta representação é denominada de adjunta. Ela é inerente a qualquer álgebra de Lie. **Teorema:** a representação adjunta é sempre irredutível. Naturalmente, não queremos provar este teorema numa primeira leitura como esta.

Agora estamos prontos para estabelecermos um critério para podermos verificar se uma álgebra é compacta ou não. Para isto, temos de construir uma outra matriz $g$, muito especial, denominada de forma de Killing (ou de Cartan-Killing). Os elementos $g_{ik}$ da forma de Killing são definidos assim:

$$g_{ik} = \operatorname{tr}(X_i X_k), \tag{3.38}$$

onde $X_i$ são as matrizes da representação adjunta (3.35)–(3.37) (ou de qualquer outra representação irredutível). A forma de Killing da álgebra $\mathfrak{E}_2$, calculada (faça o Exercício 36) usando a representação adjunta (3.35)–(3.37), é

$$g = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.39}$$

Note que esta matriz é degenerada, isto é, $\det g = 0$, e que a álgebra $\mathfrak{E}_2$ não é semi-simples. Então, mais um **Teorema:** a forma de Killing de uma álgebra não-compacta é degenerada. Também podemos notar que a matriz $g$ em (3.39) é diagonal e que seus autovalores (2 e 0) não possuem o mesmo sinal, pois zero não tem um sinal definido. Então, lembrando que a álgebra $\mathfrak{E}_2$ não é compacta, temos mais um **Teorema:** a forma de Killing de uma álgebra não-compacta não é positiva (ou negativa) definida, isto é, seus autovalores não possuem o mesmo sinal. Certamente, esta é a subseção dos teoremas. Deixando de lado o trabalho manual em calcular a forma de Killing, ela é um teste direto, dependente apenas da representação adjunta, para sabermos se uma determinada álgebra é compacta ou não e se ela é semi-simples ou não. O fato da forma de Killing ser degenerada ou não e ser definida ou não é inerente à álgebra, ou seja, não depende de uma escolha particular das constantes de estrutura [1]. Veremos no próximo capítulo como a forma de Killing pode ser usada para determinarmos os operadores invariantes de uma álgebra semi-simples (compacta ou não).

## 3.3 Representações irredutíveis para o grupo $E_2$

Tendo estabelecido as representações irredutíveis hermitianas (3.30)–(3.34) da álgebra $\mathfrak{E}_2$, resta determinar as representações irredutíveis e unitárias do grupo euclidiano $E_2 = T_2 \times SO(2)$ correspondente. Vimos no primeiro capítulo que a natureza compacta do subgrupo das rotações SO(2) fornece uma condição (global) extra sobre o autovalor $m$ de $J_z$ em (3.31): (i) $m$ deve ser inteiro (positivo, nulo ou negativo) para o caso em que so(2) é a álgebra do grupo SO(2); (ii) $m$ deve ser semi-inteiro (positivo, nulo ou negativo) para o caso em que so(2) é a álgebra do grupo U(1), o grupo de cobertura do grupo SO(2). Fisicamente, so(2) é a álgebra formada pela componente $z$ dos momenta angulares orbital ($m$ inteiro) e espinorial ($m$ semi-inteiro), respectivamente. Desta forma, os valores de $m$ nas irreps (3.30)–(3.34) podem ser apenas inteiros e semi-inteiros. Como estamos interessados em re-interpretar as funções de Bessel via grupos de Lie (sim, estamos), e isto é feito com as representações irredutíveis do grupo euclidiano $E_2$ contendo o subgrupo SO(2), então nos restringiremos somente aos valores inteiros de $m$. Note também que não há qualquer outra informação que possa ser usada para relacionar os valores de $m$ e $p$, ou seja, as representações irredutíveis etiquetadas por $p$ continuam sendo de dimensão infinita.

Passemos assim ao cálculo dos elementos de matriz dos elementos do grupo $E_2$ agindo no espaço portador $|p, m\rangle$, $p \in \mathbb{R}$, $m = 0, \pm1, \pm2, \ldots$ Isto é feito através das relações exponenciais (3.13):

$$\begin{aligned} R(\alpha)|p, m\rangle &= \mathrm{e}^{-i\alpha J_z}|p, m\rangle = \mathrm{e}^{-im\alpha}|p, m\rangle, \\ T(\mathbf{a})|p, m\rangle &= \mathrm{e}^{-ia_1P_1 - ia_2P_2}|p, m\rangle. \end{aligned} \tag{3.40}$$

A ação do elemento geral $g(\alpha, \mathbf{a})$ definido em (3.1) é calculada a partir das ações calculadas em (3.40),

$$g(\alpha, \mathbf{a})|p, m\rangle = T(\mathbf{a})R(\alpha)|p, m\rangle = \mathrm{e}^{-im\alpha}T(\mathbf{a})|p, m\rangle. \tag{3.41}$$

Note que deixamos a ação do subgrupo das translações incompleta, pois ela pode ser simplificada pela observação feita a seguir. Uma translação arbitrária $T(\mathbf{a})$ pode ser também escrita como na primeira forma em (3.9), envolvendo uma outra translação arbitrária e uma rotação. Então, espertamente, podemos ver que

[1] Em álgebra linear, este resultado é conhecido como teorema da inércia de Sylvester.

o vetor arbitrário $\mathbf{a} = a_x\,\mathbf{e}_1 + a_y\,\mathbf{e}_2$ pode ser obtido rodando o vetor $a\mathbf{e}_1 = (a, 0)$ com o operador $R(\theta)$, por um ângulo $\theta$ devidamente escolhido,

$$\mathbf{a} = R(\theta)\,a\mathbf{e}_1 = a\cos\theta\,\mathbf{e}_1 + a\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathbf{e}_2 = a_x\,\mathbf{e}_1 + a_y\,\mathbf{e}_2, \qquad ||\mathbf{a}|| = a. \tag{3.42}$$

Isto implica numa simplificação enorme no cálculo da ação de $T(\mathbf{a})$ em (3.40), pois, usando (3.9), temos

$$T(\mathbf{a}) = T\big(R(\theta)a\mathbf{e}_1\big) = R(\theta)T(a\mathbf{e}_1)R(-\theta) = \mathrm{e}^{-i\theta J_z}\,\mathrm{e}^{-iaP_1}\,\mathrm{e}^{+i\theta J_z}. \tag{3.43}$$

A presença do gerador $P_1$ em (3.43) ainda incomoda. É melhor usar os operadores de levantamento e abaixamento. Com $P_1 = (P_+ + P_-)/2$, temos

$$T(\mathbf{a}) = \mathrm{e}^{-i\theta J_z}\,\mathrm{e}^{-iaP_1}\,\mathrm{e}^{+i\theta J_z} = \mathrm{e}^{-i\theta J_z}\,\mathrm{e}^{-i\frac{a}{2}(P_+ + P_-)}\,\mathrm{e}^{+i\theta J_z} = \mathrm{e}^{-i\theta J_z}\,\mathrm{e}^{-i\frac{a}{2}P_\pm}\,\mathrm{e}^{-i\frac{a}{2}P_\mp}\,\mathrm{e}^{+i\theta J_z}, \tag{3.44}$$

onde usamos também o fato que a exponencial da soma de dois operadores comutantes é o produto das exponenciais de cada um deles e que este produto é comutativo, como mencionado em (3.14). Note que $J_z$ não comuta com $P_\pm$ e, por isto, a ordem das exponenciais em (3.44) é relevante. A exponencial mais a direita em (3.44) pode ser efetuada facilmente:

$$T(\mathbf{a})|p, m\rangle = \mathrm{e}^{im\theta}\,\mathrm{e}^{-i\theta J_z}\,\mathrm{e}^{-i\frac{a}{2}P_\pm}\,\mathrm{e}^{-i\frac{a}{2}P_\mp}|p, m\rangle. \tag{3.45}$$

Usando a definição da exponencial de uma matriz (ou operador) apresentada em (1.22), a ação da exponencial dos geradores $P_\pm$ pode ser efetuada:

$$\mathrm{e}^{-i\frac{a}{2}P_\pm}|p, m\rangle = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-ia)^k}{k!\,2^k}P_\pm^k|p, m\rangle = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-ia)^k}{k!\,2^k}p^k\,\mathrm{e}^{ik\phi_\pm}|p, m \pm k\rangle. \tag{3.46}$$

Levando este resultado em (3.45), teremos

$$\begin{aligned} T(\mathbf{a})|p, m\rangle &= \mathrm{e}^{im\theta}\sum_{k,l}\frac{(-ia)^{k+l}}{k!l!\,2^{k+l}}p^{k+l}\,\mathrm{e}^{i(k\phi_+ + l\phi_-)}\,\mathrm{e}^{-i\theta J_z}|p, m + k - l\rangle \\ &= \sum_{k,l}\frac{(-ia)^{k+l}}{k!l!\,2^{k+l}}p^{k+l}\,\mathrm{e}^{i(k\phi_+ + l\phi_-)}\,\mathrm{e}^{-i(k-l)\theta}|p, m + k - l\rangle, \end{aligned} \tag{3.47}$$

onde usamos novamente a ação diagonal de $J_z$.

Vamos agora fixar uma representação irredutível, isto é, fixar um valor para $p$, e determinar os elementos de matriz do operador $T(\mathbf{a})$,

$$\begin{aligned} \langle p, m'|T(\mathbf{a})|p, m\rangle &= \sum_{k,l}\frac{(-ia)^{k+l}}{k!l!\,2^{k+l}}p^{k+l}\,\mathrm{e}^{i(k\phi_+ + l\phi_-)}\,\mathrm{e}^{-i(k-l)\theta}\,\langle p, m'|p, m + k - l\rangle \\ &= \sum_{k,l}\frac{(-ia)^{k+l}}{k!l!\,2^{k+l}}p^{k+l}\,\mathrm{e}^{i(k\phi_+ + l\phi_-)}\,\mathrm{e}^{-i(k-l)\theta}\delta_{m', m+k-l}. \end{aligned} \tag{3.48}$$

Devido à função delta de Kronecker participar das somas, uma delas pode ser efetuada. Vamos escolher a soma em $l = k + m - m'$ para ser eliminada. Além disto, a diferença $m - m' = n$ é um inteiro positivo ou negativo. Vamos supor por um momento que $n \geq 0$. Então o elemento de matriz (3.48) pode ser reescrito como

$$\begin{aligned} \langle p, m'|T(\mathbf{a})|p, m\rangle &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-ia)^{2k+n}}{k!(k+n)!\,2^{2k+n}}p^{2k+n}\,\mathrm{e}^{ik(\phi_+ + \phi_-) + in\phi_-}\,\mathrm{e}^{in\theta} \\ &= \mathrm{e}^{in\theta}(-i)^n\,\mathrm{e}^{in\phi_-}\Big(\frac{pa}{2}\Big)^n\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!(k+n)!}\Big(\frac{pa}{2}\Big)^{2k}\,\mathrm{e}^{ik(\phi_+ + \phi_-)}. \end{aligned} \tag{3.49}$$

Este é o momento para escolhas: as fases $\phi_\pm$ são arbitrárias e estão à nossa disposição. Simplicidade é um princípio que deve ser usado sempre! A última soma em (3.49) pode visivelmente ser simplificada se escolhermos

$$\phi_+ + \phi_- = 0, \quad (-i)^n\,\mathrm{e}^{in\phi_-} = 1. \tag{3.50}$$

Assim, as fases ficam determinadas,

$$\phi_+ = -\frac{\pi}{2}, \quad \phi_- = \frac{\pi}{2}. \tag{3.51}$$

Desta forma, o elemento de matriz (3.49) pode ser re-escrito em termos de uma das funções de Bessel, a de primeira espécie, $J_n(x)$,

$$T^{(p)}_{mm'} = \langle p, m'|T(\mathbf{a})|p, m\rangle = \mathrm{e}^{in\theta}\big(\frac{pa}{2}\big)^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(k+n)!}\big(\frac{pa}{2}\big)^{2k} = \mathrm{e}^{in\theta}\, J_n(pa), \quad n = m - m', \tag{3.52}$$

onde $\theta$ e $a$ são as coordenadas polares do vetor de translação $\mathbf{a} = (a, \theta)$. A função de Bessel de primeira espécie $J_n(x)$ é definida como

$$J_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(k+n)!}\big(\frac{x}{2}\big)^{2k+n}. \tag{3.53}$$

Pausa para contemplação: as funções de Bessel de primeira espécie podem ser interpretadas como sendo elementos de matrizes irredutíveis representando os elementos do grupo das translações bi-dimensionais.

Observe que os elementos de matriz (3.52) dependem das coordenadas polares do vetor de translação $\mathbf{a} = (a, \theta)$, com a coordenada angular aparecendo somente numa fase. Outro resultado interessante é o fato dos elementos de matriz (3.52) dependerem apenas da diferença entre as etiquetas $m$ dos vetores dentro de uma dada irrep $p$. Assim, podemos ter muitos destes elementos iguais. Escrevendo as funções de Bessel em (3.52) em termos dos elementos de matriz $T^p_{mm'}$ e usando resultados gerais da teoria de representações, várias propriedades destas funções de Bessel podem ser deduzidas neste contexto, mas não iremos derivá-las neste momento. No entanto, pelo menos uma propriedade deve ser discutida aqui. Obtivemos os elementos de matriz (3.52) supondo $n = m - m' \geq 0$. Pois bem, quando tivermos $m \leq m'$, podemos efetuar primeiro a soma em $k$ na última expressão em (3.48). Neste caso $k = l + n$, com $n = m' - m$. Fazendo isto e mantendo as mesmas escolhas feitas em (3.51) para as fases $\phi_\pm$, encontraremos (faça o Exercício 37)

$$J_{-n}(x) = (-1)^n j_n(x). \tag{3.54}$$

Para completar, levando os resultados (3.52) e (3.40) de volta a (3.41), os elementos de matriz de um elemento qualquer do grupo euclidiano numa dada representação irredutível $p$ são

$$\langle p, m'|g(\alpha, \mathbf{a})|p, m\rangle = \mathrm{e}^{-im\alpha}\, \mathrm{e}^{in\theta}\, J_n(pa), \quad \mathbf{a} = (a, \theta), \quad n = m - m', \tag{3.55}$$

independentemente de $n$ ser positivo ou negativo. Este resultado é brilhante, na incapacidade de encontrar um adjetivo mais apropriado: os elementos de matriz de um elemento do grupo euclidiano bidimensional podem ser escritos em termos das funções de Bessel de primeira espécie, exigindo apenas uma escolha de fase. Igualmente surpreendente será encontrar também a equação diferencial de Bessel para $J_n$ e suas relações de recorrência ainda no contexto da teoria de representações aplicada ao grupo euclidiano bidimensional.

Podemos obter as relações de recorrência das funções $J_n$ a partir das equações diferenciais harmônicas (3.14) satisfeitas pelos geradores $P_\pm$. Para tal, é conveniente reescrevermos a translação $T(\mathbf{a})$ na forma (faça o Exercício 38)

$$T(\mathbf{a}) = \mathrm{e}^{-i(a_1P_1 + a_2P_2)} = \mathrm{e}^{-ia_1\frac{1}{2}(P_+ + P_-) - a_2\frac{1}{2}(P_+ - P_-)} = \mathrm{e}^{-ia_+P_+}\, \mathrm{e}^{-ia_-P_-}, \tag{3.56}$$

onde

$$a_\pm = \frac{1}{2}(a_1 \mp ia_2) = \frac{a}{2}\,\mathrm{e}^{\mp i\theta}, \quad a^2 = 4a_\pm a_\mp, \quad \mathrm{tg}(\pm\theta) = \pm\frac{a_2}{a_1}. \tag{3.57}$$

Note que fizemos duas reparametrizações adicionais para os elementos do grupo das translações usando os geradores de levantamento e abaixamento: (i) forma circular $\mathbf{a} = (a_+, a_-)$ e (ii) forma polar $\mathbf{a} = (a, \theta)$. Como os operadores $P_\pm$ comutam, então, da última expressão em (3.56), temos

$$\frac{\partial T}{\partial a_\pm} = -iP_\pm\, T. \tag{3.58}$$

Os elementos de matriz do lado direito e do lado esquerdo desta expressão podem ser calculados da seguinte maneira:

$$\langle p, m'|\frac{\partial T(\mathbf{a})}{\partial a_\pm}|p, m\rangle = \frac{\partial}{\partial a_\pm}\langle p, m'|T(\mathbf{a})|p, m\rangle = -i\langle p, m'|P_\pm T(\mathbf{a})|p, m\rangle = -i\langle p, m'|T(\mathbf{a})P_\pm|p, m\rangle, \tag{3.59}$$

ou seja,

$$\frac{\partial T^{(p)}_{m',m}}{\partial a_\pm} = -i(\mp ip)T^{(p)}_{m',m\pm 1} = \mp p\, T^{(p)}_{m',m\pm 1}, \tag{3.60}$$

onde usamos (3.32) com a escolha de fase dada em (3.51). Esta é uma relação de recorrência para estes elementos de matriz que irá nos conduzir às relações de recorrência para as funções de Bessel, as quais ficam mais simples na parametrização polar para os parâmetros das translações. Usando a regra da derivada de uma função composta, as derivadas em termos de $a$ e $\theta$, definidas em (3.57), podem ser obtidas (faça o Exercício 39):

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial a} &= \frac{\partial a_+}{\partial a}\frac{\partial}{\partial a_+} + \frac{\partial a_-}{\partial a}\frac{\partial}{\partial a_-} = \frac{1}{2}\big(\mathrm{e}^{-i\theta}\frac{\partial}{\partial a_+} + \mathrm{e}^{+i\theta}\frac{\partial}{\partial a_-}\big),\\
\frac{\partial}{\partial \theta} &= \frac{\partial a_+}{\partial \theta}\frac{\partial}{\partial a_+} + \frac{\partial a_-}{\partial \theta}\frac{\partial}{\partial a_-} = \frac{-ia}{2}\big(\mathrm{e}^{-i\theta}\frac{\partial}{\partial a_+} - \mathrm{e}^{+i\theta}\frac{\partial}{\partial a_-}\big).
\end{aligned} \tag{3.61}$$

Estas derivadas podem ser invertidas facilmente,

$$\frac{\partial}{\partial a_\pm} = \mathrm{e}^{\pm i\theta}\big(\frac{\partial}{\partial a} \pm \frac{i}{a}\frac{\partial}{\partial \theta}\big). \tag{3.62}$$

Substituindo este resultado e os elementos de matriz (3.52) em (3.60), teremos

$$\mathrm{e}^{\pm i\theta}\big(\frac{\partial}{\partial a} \pm \frac{i}{a}\frac{\partial}{\partial \theta}\big)\,\mathrm{e}^{in\theta}J_n(pa) = \mathrm{e}^{i(n\pm 1)\theta}\big(\frac{\partial}{\partial a} \mp \frac{n}{a}\big)J_n(pa) = \mp p\,\mathrm{e}^{i(n\pm 1)\theta}J_{n\pm 1}(pa). \tag{3.63}$$

Portanto, as funções $J_n$ satisfazem a relação de recorrência dada por

$$\big(\frac{d}{dx} \mp \frac{n}{x}\big)J_n(x) = \mp J_{n\pm 1}(x), \quad x = pa. \tag{3.64}$$

Outras duas relações podem ser obtidas pela soma e pela diferença destas, respectivamente,

$$2J'_n(x) = -J_{n+1}(x) + J_{n-1}(x), \quad 2xJ_n(x) = xJ_{n+1}(x) + xJ_{n-1}(x), \quad J'_n(x) = \frac{d}{dx}J_n(x). \tag{3.65}$$

Além de obtermos as relações de recorrência (3.64)–(3.65), descobrimos também uma outra maneira de escrever os geradores $P_\pm$: via operadores diferenciais (sem usar recursos de Mecânica Quântica). Para isto, basta reinterpretarmos a equação diferencial (3.58) numa forma ligeiramente diferente:

$$P_\pm T = i\frac{\partial}{\partial a_\pm}T = i\,\mathrm{e}^{\pm i\theta}\big(\frac{\partial}{\partial a} \pm \frac{i}{a}\frac{\partial}{\partial \theta}\big)\,T, \tag{3.66}$$

onde usamos as relações (3.62) para trocar as derivadas circulares ($a_\pm$) pelas derivadas polares ($a$ e $\theta$). Agora podemos interpretar as expressões à esquerda de $T$ nestas duas igualdades como operadores diferenciais agindo em $T$,

$$P_\pm = i\frac{\partial}{\partial a_\pm} = i\,\mathrm{e}^{\pm i\theta}\big(\frac{\partial}{\partial a} \pm \frac{i}{a}\frac{\partial}{\partial \theta}\big). \tag{3.67}$$

Podemos checar (faça o Exercício 40) também que o produto de Lie entre estes dois operadores diferenciais é nulo. Isto significa que os geradores $P_\pm$ podem ser identificados univocamente com os operadores diferenciais em (3.67). Vimos anteriormente em (1.97) que o gerador das rotações pode ser realizado em termos de uma derivada em relação ao parâmetro do grupo ($\alpha$ neste caso),

$$J_z = i\frac{\partial}{\partial \alpha}. \tag{3.68}$$

A realização do operador de Casimir $P^2 = P_\pm P_\mp$ é imediata (faça o Exercício 40),

$$P^2 = P_\pm P_\mp = -\left(\frac{\partial^2}{\partial a^2} + \frac{1}{a}\frac{\partial}{\partial a} + \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}\right). \tag{3.69}$$

Como mencionado anteriormente, esta identificação de um elemento abstrato de uma álgebra com uma entidade matemática concreta é denominada de realização da álgebra.

E a tão esperada dedução da equação de Bessel? Estamos chegando lá... Vale a pena emprestar um pouco mais da notação usada em Mecânica Quântica. Usamos $|p,m\rangle$ em (3.23) para denotar os vetores da representação irredutível $p$. Esta é uma notação emprestada da Mecânica Quântica e ela sempre existe aos pares: para cada vetor $|p,m\rangle$, denominado de *ket*, existe um outro vetor correspondente $\langle p,m|$, denominado de *bra*. Estes dois tipos de vetores devem existir para que o produto escalar entre eles possa ser escrito como $\langle p,m|p,m\rangle$, o qual está normalizado a um neste caso. Em Mecânica Quântica nem sempre é mais interessante trabalhar com esses vetores abstratos. Em muitas ocasiões precisamos de funções concretas. No presente caso, podemos construir explicitamente as funções que estão associadas aos vetores $|p,m\rangle$ projetando estes nos autovetores $|\alpha,a,\theta\rangle$ do operador posição,

$$\psi_{p,m}(\alpha,a,\theta) = \langle \alpha,a,\theta|p,m\rangle, \tag{3.70}$$

onde $\alpha$ é o ângulo de rotação das rotações $R(\alpha)$ e $(a,\theta)$ é o vetor deslocamento $\mathbf{a} = R(\theta)\,a\mathbf{e}_1$, em coordenadas polares, usado nas translações $T(\mathbf{a})$. Naturalmente, queremos funções que satisfaçam as condições (3.30)–(3.34), com a escolha de fase feita em (3.51):

$$P^2\psi_{p,m}(\alpha,a,\theta) = p^2\,\psi_{p,m}(\alpha,a,\theta), \quad p^2 \geq 0, \tag{3.71}$$

$$J_z\psi_{p,m}(\alpha,a,\theta) = m\,\psi_{p,m}(\alpha,a,\theta), \quad m = 0,\pm1,\pm2,\ldots \tag{3.72}$$

$$P_\pm\psi_{p,m}(\alpha,a,\theta) = \mp ip\,\psi_{p,m\pm1}(\alpha,a,\theta). \tag{3.73}$$

Aqui, todos os geradores $J_z$ e $P_\pm$, bem como o operador de Casimir $P^2$, devem ser realizados por operadores diferenciais, como em (3.67), (3.68) e (3.69), respectivamente. Como as realizações de $P_\pm$ em (3.67) não envolvem o ângulo de rotação $\alpha$, podemos propor uma separação de variáveis para as funções $\psi_{p,m}$ da forma

$$\psi_{p,m}(\alpha,a,\theta) = \psi_0\xi_{p,m}(\alpha)\,\chi_{p,m}(a,\theta), \tag{3.74}$$

onde $\psi_0$ é uma cosntante arbitrária. Desta forma, de (3.72), a equação diferencial para $\xi_{p,m}(\alpha)$ pode ser resolvida imediatamente:

$$J_z\xi_{p,m}(\alpha) = i\frac{\partial\xi_{p,m}(\alpha)}{\partial\alpha} = m\xi_{p,m}(\alpha) \Rightarrow \xi_{p,m}(\alpha) = \mathrm{e}^{-im\alpha}. \tag{3.75}$$

A equação diferencial resultante para $\chi_{p,m}(a,\theta)$, proveniente de (3.73), torna-se idêntica àquela em (3.60) para os elementos de matriz $T_{mm'}$, cuja solução está dada em termos das funções de Bessel em (3.52), para qualquer escolha de $m$ e $m'$. Então, escolhendo $m'=0$ em (3.52), temos

$$\chi_{p,m}(a,\theta) = \mathrm{e}^{im\theta}J_m(pa). \tag{3.76}$$

Portanto, levando as funções dadas em (3.76) e (3.75) de volta em (3.74), temos

$$\psi_{p,m}(\alpha,a,\theta) = \psi_0\,\mathrm{e}^{-im(\alpha-\theta)}J_m(pa). \tag{3.77}$$

Note que estas funções formam um subconjunto ($m'=0$) dos possíveis elementos de matriz do grupo euclidiano. Resta agora impor que estas funções (3.77) satisfaçam também a equação diferencial (3.71) proveniente do operador de Casimir. Após as derivadas angulares serem efetuadas, restará

$$\left(\frac{d^2}{da^2} + \frac{1}{a}\frac{d}{da} - \frac{m^2}{a^2} + p^2\right)J_m(pa) = 0, \tag{3.78}$$

ou, realizando uma mudança de variável da forma $x = pa$,

$$\left(x^2\frac{d^2}{dx^2} + x\frac{d}{dx} + x^2 - m^2\right)J_m(x) = 0, \quad x = pa. \tag{3.79}$$

Esta é a equação diferencial de Bessel de primeira espécie. Suas soluções são as funções (3.53) se a constante $m$ for um inteiro positivo ou negativo ou nulo. Observe que encontramos a solução desta equação diferencial sem resolvê-la explicitamente. O "preço" que pagamos foi o de calcular a ação da exponencial de alguns operadores da álgebro do grupo Euclidiano. Outras propriedades destas funções de Bessel, as quais não serão discutidas neste momento, podem também ser derivadas no contexto do grupo euclidiano.

## 3.4 Exercícios

**Exercício 26** *Use duas canetas muito parecidas para mostrar que rotações em torno de um eixo fixo não comutam com translações. Lembre-se: você não pode transladar o eixo de rotação.*

**Exercício 27** *Mostre que a norma dos vetores* $\mathbf{r}$ *e* $\mathbf{r}' - \mathbf{a}$*, com* $\mathbf{r}'$ *calculado em (3.2), são iguais. Assuma inicialmente que a base formada pelos versores* $\mathbf{e}_k$ *seja ortonormal,* $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij}$*. Repita este exercício supondo uma base não ortogonal da forma* $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_i = 1$ *e* $\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 = a$*.*

**Exercício 28** *Mostre explicitamente (usando componentes) que a ação definida em (3.2) satisfaz as propriedades (3.3)–(3.6). Este exercício serve também para ganharmos um pouco mais de intimidade com somas abstratas.*

**Exercício 29** *Obtenha a matriz (3.11) a partir da ação definida em (3.2) e use-a para verificar (novamente) todas as propriedades (3.3)–(3.6). Verifique também o resultado (3.9).*

**Exercício 30** *Obtenha as matrizes (3.12) a partir de (3.11).*

**Exercício 31** *Usando diretamente as matrizes (3.12), calcule as exponenciais em (3.13) e mostre que o produto* $T(\mathbf{a})R(\alpha)$ *destas duas matrizes coincide com a matriz (3.11).*

**Exercício 32** *Use a definição (3.19) para as constantes de estrutura de uma álgebra de Lie para determinar as constantes de estrutura (3.20) da álgebra* $\mathfrak{E}_2$*.*

**Exercício 33** *Verifique que o operador* $P^2$ *pode ser escrito nas duas formas mostradas em (3.21). Verifique também a identidade (3.22). Prove que o operador* $P^2$ *comuta com todos os geradores da álgebra associada ao grupo euclidiano.*

**Exercício 34** *Use as relações de comutação (3.17) para obter as matrizes (3.35)–(3.37) da representação adjunta.*

**Exercício 35** *Verifique que as matrizes (3.35)–(3.37) da representação adjunta satisfazem as relações de comutação (3.17).*

**Exercício 36** *Faça um programa em computação simbólica para calcular a forma de Killing de álgebra qualquer e verifique o resultado (3.39).*

**Exercício 37** *Suponha* $n = m - m' \geq 0$ *e efetue primeiro a soma em* $k = l + n$ *na última expressão em (3.48). Fazendo isto e mantendo as mesmas escolhas feitas em (3.51) para as fases* $\phi_\pm$*, prove a relação (3.54).*

**Exercício 38** *Verifique os resultados exibidos em (3.57).*

**Exercício 39** *Use as relações (3.57) entre* $a_\pm$ *e* $a$ *e* $\theta$ *para derivar as relações (3.61).*

**Exercício 40** *Use a realização (3.67) para obter a realização (3.68) para o operador de Casimir. Mostre também estas realizações (3.67)–(3.69) satisfazem as relações de comutação* $[J_z, P_\pm] = \pm P_\pm$*, e* $[P_+, P_-] = [P^2, J_z] = [P^2, P_\pm] = 0$*.*

# Capítulo 4

# Simetria Espacial Euclidiana

## 4.1 introdução

Devido à importância das rotações espaciais (euclidianas) em muitas áreas da Física, iremos discutir aqui suas principais propriedades, principalmente aquelas relacionadas com grupos contínuos. Vamos considerar inicialmente os possíveis movimentos de um corpo rígido. Um corpo rígido, também conhecido por sólido, é um sistema de massas pontuais sujeitas a forças de vínculos que mantêm as distâncias constantes entre pares de massas. O movimento mais geral de um sólido consiste em uma translação (deslocamentos espaciais numa dada direção) conjunta com uma rotação (movimento giratório em torno de um eixo fixo). Leonhard Euler (1807–1873) provou que o movimento mais geral de um sólido em torno de um ponto fixo é uma rotação. Michel Chasles (1793–1880) mostrou que é possível escolher um sistema de coordenadas no sólido de tal forma que a direção do eixo de rotação coincida com a direção da translação. Sendo necessário três graus de liberdade para especificar o movimento de translação e outros três para especificar a orientação de um sistema de coordenadas fixo no sólido em relação a um determinado sistema de coordenadas externo, então um corpo rígido é completamente especificado no espaço por apenas seis graus de liberdade. Este número independe da quantidade de massas pontuais internas ao sólido. Nas discussões seguintes, estaremos interessados apenas nas rotações.

Por definição, a rotação de um vetor tridimensional faz com que ele gire em torno de uma determinada direção sem alterar seu comprimento. Como vetores e pontos materiais em um sólido podem ser especificados de forma única em um sistema de coordenadas no espaço, uma rotação pode ser vista como uma transformação de coordenadas, linear e ortogonal, em um espaço euclidiano tridimensional. Uma descrição matemática um pouco mais formal de transformações lineares gerais e suas propriedades, incluindo as rotações espaciais, está feita no Apêndice A.

## 4.2 O grupo das rotações espaciais

### 4.2.1 Eixo e ângulo de rotação

Vimos no primeiro capítulo que uma rotação no plano é completamente caracterizada por um parâmetro real (limitado a um intervalo finito). As rotações espaciais possuem três graus de liberdade, exigindo assim três parâmetros contínuos para serem completamente caracterizadas. Estes três parâmetros também são limitados a intervalos reais finitos. Seguindo os passos dos capítulos anteriores, iremos procurar uma realização matricial para uma rotação espacial e mostrar que o conjunto destas rotações forma um grupo de Lie. Esta realização matricial deve depender de três parâmetros reais que caracterizarão uma rotação espacial. Talvez a parametrização mais conhecida seja através dos ângulos de Euler [3]. No entanto, iniciaremos com uma outra parametrização, mais adequada para uma discussão sobre as propriedades de grupo das rotações espaciais.

Seja $R(\alpha, \mathbf{n})$ uma rotação por um ângulo $\alpha$ em torno da direção do versor $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)$. Por comodidade, é conveniente restringir o ângulo de rotação ao intervalo $-\pi \leq \alpha < \pi$ ao invés do intervalo usual $0 \leq \alpha < 2\pi$. Uma das conveniências é que, desta forma, a identidade será especificada univocamente ($\alpha = 0$).

Considerando todas as direções possíveis, a ponta do versor $\mathbf{n}$ forma uma superfície esférica de raio unitário. Cada ponto nesta casca esférica é denominado de pólo. Podemos verificar experimentalmente [1] que

$$R(-\alpha, -\mathbf{n}) = R(\alpha, \mathbf{n}). \tag{4.1}$$

Desta forma, pólos diametralmente opostos representam a mesma rotação. O pólo formado por $-\mathbf{n}$ é denominado de anti-pólo.

Passemos agora ao problema de determinar os elementos de matriz $R_{ik}$ para uma rotação arbitrária $R(\alpha, \mathbf{n})$. Esta rotação pode ser vista de duas formas: (i) agindo sobre um corpo rígido ou, equivalentemente, (ii) modificando a posição de um ponto do corpo rígido (sem deformar o corpo rígido). Podemos encontrar uma realização matricial para $R(\alpha, \mathbf{n})$ com facilidade se adotarmos um sistema ortonormal de coordenadas e escrevermos a ação de uma rotação em um ponto arbitrário, localizado pelo vetor posição $\mathbf{r}$. Vamos supor que o vetor $\mathbf{r}$, com a sua origem fixa em $O$ e extremidade em $P$, tenha a sua extremidade rodada, no sentido anti-horário, por um ângulo $\alpha$, pela rotação $R(\alpha, \mathbf{n})$ (faça um esboço mostrando todas as quantidades; coloque o versor $\mathbf{n}$ na vertical). Note que estamos rodando um ponto (a extremidade do vetor $\mathbf{r}$), o qual passaremos a especificar também por $\mathbf{r}$. Após ser rodada, a extremidade que estava em $P$, está agora em $Q$. Assim, este ponto $\mathbf{r}$ descreverá o arco $PQ$ numa circunferência de raio $|\mathbf{n} \wedge \mathbf{r}|$ (projeção do vetor $\mathbf{r}$ perpendicularmente ao eixo de rotação $\mathbf{n}$). Vamos denotar por $N$ o centro desta circunferência e por $O$ a origem de um sistema de coordenadas ortogonais (faça o Exercício 41). O vetor rodado $\mathbf{r}'$ com a extremidade em $Q$ pode ser escrito como uma soma vetorial da forma

$$\mathbf{r}' = \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{NM} + \overrightarrow{MQ}, \tag{4.2}$$

onde $M$ é um ponto sobre a reta $NP$. Este ponto $M$ é determinado pela projeção do vetor $\overrightarrow{NQ}$ sobre o vetor $\overrightarrow{NP}$:

$$\overrightarrow{NM} = \overrightarrow{NP} \cos\alpha = \cos\alpha \big[\mathbf{r} - (\mathbf{r}\cdot\mathbf{n})\,\mathbf{n}\big], \tag{4.3}$$

onde

$$|\overrightarrow{NP}| = |\overrightarrow{NQ}| = |\mathbf{n} \wedge \mathbf{r}| \quad \text{e} \quad \overrightarrow{NP} = \mathbf{r} - (\mathbf{r}\cdot\mathbf{n})\,\mathbf{n}. \tag{4.4}$$

O vetor $\overrightarrow{MQ}$ é a projeção do vetor $\overrightarrow{NQ}$ sobre o vetor $\mathbf{n} \wedge \mathbf{r}$, perpendicular a $\overrightarrow{NP}$,

$$\overrightarrow{MQ} = \operatorname{sen}\alpha\, \mathbf{n} \wedge \mathbf{r}. \tag{4.5}$$

Fazendo uso destas relações, o vetor $\mathbf{r}'$ em (4.2) pode ser reescrito como

$$\mathbf{r}' = R(\alpha, \mathbf{n})\,\mathbf{r} = \cos\alpha\,\mathbf{r} + (1 - \cos\alpha)(\mathbf{r}\cdot\mathbf{n})\,\mathbf{n} + \operatorname{sen}\alpha\,\mathbf{n} \wedge \mathbf{r}. \tag{4.6}$$

Portanto (faça o Exercício 42), os elementos de matriz da rotação $R$, em coordenadas cartesianas, são (faça o Exercício 43)

$$R_{ik}(\alpha, \mathbf{n}) = \delta_{ik} \cos\alpha + n_i n_k (1 - \cos\alpha) - \sum_{l=1}^{3} \varepsilon_{ikl}\, n_l \operatorname{sen}\alpha, \tag{4.7}$$

onde $\varepsilon_{ikl}$ é o tensor de Levi-Civita [2] (Tullio Levi-Civita, 1873–1941). Assim, determinamos uma realização matricial para uma rotação espacial. Note que os elementos de matriz em (4.7) são funções contínuas dos parâmetros $\alpha$ e $(n_1, n_2, n_3)$. Considerando uma rotação em torno do eixo $z$, $\mathbf{n} = (0, 0, 1) = \hat{k}$, os elementos de matriz (4.7) fornecem

$$R(\alpha, \hat{k}) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\operatorname{sen}(\alpha) & 0 \\ \operatorname{sen}(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{4.8}$$

a qual é a mesma realização matricial usada no Capítulo 1.

[1] Pegue um lápis para fazer o papel do versor $\mathbf{n}$ e observe a ponta dele (sentido positivo) enquanto ele é girado em torno de seu eixo, digamos no sentido anti-horário, por um ângulo $\alpha$. Agora observe o pé (sentido negativo: $-\mathbf{n}$) do lápis e repita a mesma rotação: você verá uma rotação no sentido contrário, ou seja, no sentido horário $(-\alpha)$.

[2] Ele é completamente anti-simétrico em quaisquer dois índices (isto implica que para dois índices iguais este tensor é zero). Quando as três componentes de $\varepsilon_{ikl}$ são distintas o valor do tensor pode ser apenas $\pm 1$. Será $+1$ $(-1)$ quando a seqüência $ikl$ formar uma permutação par (ímpar) de 123. Uma permutação $ikl$ é par (ímpar) quando o número de transposições (troca de dois números) para re-obter 123 for par (ímpar). Por exemplo, 132 é uma permutação ímpar e 231 é par.

Resta agora verificarmos que as transformações de coordenadas $R\mathbf{r} = \mathbf{r}'$, com os elementos de matriz (4.7), formam um grupo de Lie. Naturalmente, a identidade $R = I$ corresponde à situação $\alpha = 0$, como pode ser facilmente verificado usando os elementos de matriz (4.7). Sendo uma rotação apenas (sem translação), então a transformação $R\,\mathbf{r} = \mathbf{r}'$ deve preservar o comprimento do vetor $\mathbf{r}$. Desta forma, a matriz $R$, com elementos de matriz (4.7), deve ser ortogonal (veja o Apêndice A para mais detalhes). De fato, usando a definição de determinante de uma matriz $3 \times 3$, e um pouco de esforço algébrico, podemos verificar (faça o Exercício 44) que

$$\det R = \frac{1}{6}\sum_{ijk}\sum_{rst}\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{rst}R_{ir}R_{js}R_{kt} = 1, \tag{4.9}$$

como esperado. Também com um pouco de esforço (faça o Exercício 45), podemos verificar que a inversa da rotação $R(\alpha, \mathbf{n})$ é a sua própria transposta,

$$R^{-1}(\alpha, \mathbf{n}) = R^{\mathrm{T}}(\alpha, \mathbf{n}) = R(-\alpha, \mathbf{n}). \tag{4.10}$$

Naturalmente o produto de matrizes ortogonais continua sendo uma matriz ortogonal. Além disto, o produto matricial é sempre associativo. Portanto, as matrizes ortogonais cujos elementos de matrizes estão dados em (4.7) formam um grupo contínuo com três parâmetros compactos. O traço é outra característica marcante da representação matricial (4.7): ele só depende do ângulo de rotação,

$$\mathrm{tr}\,R(\alpha, \mathbf{n}) = \sum_{i=1}^{3} R_{ii} = 1 + 2\cos\alpha. \tag{4.11}$$

Resta verificarmos que este grupo contínuo é um grupo de Lie. Para isto, devemos saber escrever os parâmetros $\alpha_3$ e $\mathbf{n}_3$ do produto $R(\alpha_1\mathbf{n}_1)R(\alpha_2\mathbf{n}_2) = R(\alpha_3\mathbf{n}_3)$, como funções contínuas dos demais parâmetros (lei de composição). Para isto usaremos um esquema geométrico conhecido como "construção de Euler-Rodrigues". Para melhorar a comunicação, acompanhe o procedimento usando a planilha "Euler-Rodrigues". Como as rotações em questão são arbitrárias, vamos colocar o eixo de rotação $\mathbf{n}_1$ na vertical e denotar seu pólo por $A$. O pólo do eixo de rotação $\mathbf{n}_2$ será $B$. Desenhe um arco do grande círculo (meridiano) que passa pelos pólos $A$ e $B$. Em cada pólo, gire este arco para a direita e para a esquerda pela metade do ângulo de rotação de cada pólo. Depois de girados, estes arcos se interceptam (dois-a-dois) nos pontos $C$ (direita) e $C'$ (esquerda). O ponto $C$ é o pólo do eixo de rotação $\mathbf{n}_3$, cujo ângulo de rotação é o dobro do ângulo entre o arco contendo $A$ e $C$ e o arco contendo $B$ e $C$ (faça o Exercício 46). Por comodidade, vamos alterar a notação para

$$\lambda_i = \cos(\frac{1}{2}\alpha_i), \quad \mathbf{\Lambda}_i = \mathrm{sen}\,(\frac{1}{2}\alpha_i)\,\mathbf{n}_i, \quad \lambda_i^2 + \Lambda_i^2 = 1. \tag{4.12}$$

Desta forma, genialmente, Rodrigues em 1840 encontrou

$$\lambda_3 = \lambda_1\lambda_2 - \mathbf{\Lambda}_1 \cdot \mathbf{\Lambda}_2, \quad \mathbf{\Lambda}_3 = \lambda_1\mathbf{\Lambda}_2 + \lambda_2\mathbf{\Lambda}_1 + \mathbf{\Lambda}_1 \times \mathbf{\Lambda}_2, \tag{4.13}$$

para a rotação

$$R(\lambda_3, \mathbf{\Lambda}_3) = R(\lambda_1, \mathbf{\Lambda}_1)R(\lambda_2, \mathbf{\Lambda}_2). \tag{4.14}$$

Portanto, esta lei de composição é contínua e as transformações (4.7) formam um grupo de Lie de ordem três, compacto e não-abeliano (faça o Exercício 47).

Duas observações importantes antes de procedermos ao cálculo dos geradores deste grupo. Há dois tensores (veja a definição de tensores dada no final da Seção 2 do Apêndice A) completamente invariantes às transformações (4.7): os tensores $\delta_{ij}$ (simétrico) e $\varepsilon_{ijk}$ (anti-simétrico), e apenas estes dois (faça o Exercício 48).

### 4.2.2 Ângulos de Euler

Uma rotação também pode ser parametrizada pelos três ângulos que caracterizam a posição relativa entre dois sistemas de coordenadas ($\mathbf{e}_i$ e $\mathbf{e}_i''$) fixos em um corpo rígido. Estes ângulos são conhecidos como ângulos de Euler e serão denotados por $(\theta, \phi, \psi)$. Desta forma, esta parametrização é dependente de um sistema de coordenadas. Os ângulos de Euler podem ser definidos da seguinte forma: I) uma rotação $R(\mathbf{e}_3, \phi)$ em torno do eixo $\mathbf{e}_3$ por um ângulo $\phi$, $0 \leq \phi < 2\pi$. O sistema $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ é levado ao sistema intermediário $(\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}_3)$; II) uma rotação $R(\mathbf{e}'_2, \theta)$ em torno do eixo intermediário $\mathbf{e}'_2$ por um ângulo $\theta$, $0 \leq \theta < \pi$. O sistema $(\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}_3)$ é levado ao sistema intermediário $(\mathbf{e}''_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}''_3)$; III) uma rotação $R(\mathbf{e}''_3, \psi)$ em torno do eixo $\mathbf{e}''_3$ por um ângulo $\psi$, $0 \leq \psi < 2\pi$. Assim, uma rotação arbitrária $R(\psi, \theta, \phi)$ pode ser escrita como o produto das rotações definindo os ângulos de Euler,

$$R(\psi, \theta, \phi) = R(\mathbf{e}''_3, \psi) R(\mathbf{e}'_2, \theta) R(\mathbf{e}_3, \phi). \tag{4.15}$$

Infelizmente, aparece uma dependência dos sistemas de coordenadas $\mathbf{e}'_i$ e $\mathbf{e}''_i$ no resultado anterior. É conveniente, em geral, escrever uma rotação envolvendo apenas um sistema de coordenadas, por exemplo $\mathbf{e}_i$. Para tal, devemos observar que

$$S R(\mathbf{n}, \alpha) S^{-1} = R(S\mathbf{n}, \alpha), \tag{4.16}$$

onde $S$ é uma rotação arbitrária. Uma maneira de verificarmos este resultado é verificando se o novo eixo de rotação $S\mathbf{n}$ é invariante perante à rotação $SR(\mathbf{n}, \alpha)S^{-1}$, pois qualquer rotação deixa apenas o seu eixo de rotação inalterado. De fato, o vetor $S\mathbf{n}$ é invariante pela rotação $SR(\mathbf{n}, \alpha)S^{-1}$:

$$S R(\mathbf{n}, \alpha) S^{-1} S\mathbf{n} = S R(\mathbf{n}, \alpha) \mathbf{n} = S\mathbf{n}. \tag{4.17}$$

Além disto, $|S\mathbf{n}| = |\mathbf{n}|$, pois uma rotação não modifica o módulo dos vetores. Como uma rotação em torno de algum eixo sempre o deixa invariante, então segue-se o lado direito da (4.16). Como o eixo intermediário $\mathbf{e}'_2$ é obtido pela rotação $R(\mathbf{e}_3, \phi)$, isto é, $\mathbf{e}'_2 = R(\mathbf{e}_3, \phi)\mathbf{e}_2$, então, de (4.17), temos

$$R(\mathbf{e}'_2, \theta) = R(\mathbf{e}_3, \phi) R(\mathbf{e}_2, \theta) R^{-1}(\mathbf{e}_3, \phi). \tag{4.18}$$

Analogamente, como o eixo $\mathbf{e}''_3$ é obtido pela rotação $R(\mathbf{e}'_2, \theta)$, temos

$$R(\mathbf{e}''_3, \psi) = R(\mathbf{e}'_2, \theta) R(\mathbf{e}_3, \psi) R^{-1}(\mathbf{e}'_2, \theta). \tag{4.19}$$

Substituindo (4.18) e (4.19) em (4.15), temos uma forma de expressar uma rotação parametrizada pelos ângulos de Euler em termos de um único sistema de coordenadas,

$$R(\phi, \theta, \psi) = R(\mathbf{e}_3, \phi) R(\mathbf{e}_2, \theta) R(\mathbf{e}_3, \psi). \tag{4.20}$$

Note que utilizamos o fato de duas rotações em torno do mesmo eixo comutarem,

$$R^{-1}(\mathbf{e}_3, \phi) R(\mathbf{e}_3, \psi) = R(\mathbf{e}_3, \psi) R^{-1}(\mathbf{e}_3, \phi). \tag{4.21}$$

Vale mencionar que em muitos outros textos a trinca $(\phi, \theta, \psi)$ é escrita como $(\alpha, \beta, \gamma)$.

Evidentemente, a identidade aqui é obtida tomando $(\phi, \theta, \psi) = (0, 0, 0)$. A inversa de $R(\phi, \theta, \psi)$ pode ser obtida da relação (4.20). De fato, tomando o hermitiano dos dois lados em (4.20) temos

$$R^{\dagger}(\phi, \theta, \psi) = R(\mathbf{e}_3, -\psi) R(\mathbf{e}_2, -\theta) R(\mathbf{e}_3, -\phi) = R(-\psi, -\theta, -\phi). \tag{4.22}$$

Agora é fácil verificar que

$$R(\phi, \theta, \psi) R^{\dagger}(\phi, \theta, \psi) = R^{\dagger}(\phi, \theta, \psi) R(\phi, \theta, \psi) = I. \tag{4.23}$$

Portanto, a inversa de (4.20) é a matriz

$$R^{-1}(\phi, \theta, \psi) = R(-\psi, -\theta, -\phi). \tag{4.24}$$

Esta seção também será muito útil quando estivermos calculando os elementos de matrizes dos elementos do grupo de rotação para cada uma de suas representações irredutíveis.

## 4.3 A álgebra de Lie do grupo das rotações

### 4.3.1 Forma cartesiana

Seguindo o procedimento anterior, os geradores $L_k$ das matrizes contendo os elementos (4.7) são determinados pela prescrição

$$L_k = \left.\frac{\partial R(\boldsymbol{\alpha})}{\partial \alpha_k}\right|_{\boldsymbol{\alpha}=0}, \tag{4.25}$$

cujas derivadas dos elementos de matriz (4.7) são (faça o Exercício 49)

$$\begin{aligned}\frac{\partial R_{ij}}{\partial \alpha_k} = -\delta_{ij}\frac{\alpha_k}{\alpha}\operatorname{sen}\alpha + \left(\delta_{ik}\frac{\alpha_j}{\alpha} + \delta_{jk}\frac{\alpha_i}{\alpha} - 2\frac{\alpha_i\alpha_j\alpha_k}{\alpha^3}\right)\frac{(1-\cos\alpha)}{\alpha} \\ + \left(\frac{\alpha_i\alpha_j\alpha_k}{\alpha^2} - \varepsilon_{ijk}\right)\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\alpha} - \left(\sum_{l=1}^{3}\varepsilon_{ijl}\frac{\alpha_l}{\alpha}\right)\frac{\alpha_k}{\alpha}\left(\cos\alpha - \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\alpha}\right).\end{aligned} \tag{4.26}$$

Note que não estamos incluindo a unidade imaginária na prescrição (4.25). Desta forma, a matriz correspondente à rotação $R(\boldsymbol{\alpha})$ é gerada pela aplicação exponencial

$$R(\boldsymbol{\alpha}) = \mathrm{e}^{\alpha_1 L_1 + \alpha_2 L_2 + \alpha_3 L_3}. \tag{4.27}$$

Os geradores $L_k$, definidos em (4.25), são representados pelas matrizes (faça o Exercício 50)

$$L_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad L_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad L_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{4.28}$$

as quais podem ser escritas numa forma compacta como

$$(L_i)_{jk} = -\varepsilon_{ijk}. \tag{4.29}$$

Estas matrizes são anti-simétricas, de traço nulo e linearmente independentes. Os produtos de Lie entre elas também podem ser escritos numa forma compacta (faça o Exercício 51),

$$[L_i, L_j] \equiv L_i L_j - L_j L_i = \sum_{k=1}^{3}\varepsilon_{ijk}L_k, \tag{4.30}$$

onde $C_{ij}^k = \varepsilon_{ijk}$ são constantes de estrutura. Desta forma, os geradores $L_i$ formam a álgebra de Lie so(3), compacta e semi-simples, associada ao grupo de Lie SO(3).

Nos capítulos anteriores, havíamos multiplicados os geradores (4.28) pela unidade imaginária $\imath^2 = -1$ para torná-los hermitianos,

$$J_k = iL_k, \; i^2 = -1. \tag{4.31}$$

Neste caso, as novas constantes de estrutura serão $i\varepsilon_{klm}$,

$$[J_k, J_l] = i\sum_{m=1}^{3}\varepsilon_{klm}J_m. \tag{4.32}$$

Note que as matrizes (4.28) são utilizadas apenas para estabelecer as relações de comutação (4.30) ou (4.32) para a álgebra que temos. Mais adiante iremos construir um mecanismo de gerar matrizes irredutíveis para representar os elementos desta álgebra.

### 4.3.2 Forma canônica

A forma canônica para as constantes de estrutura da álgebra so(3) é dada pelos geradores $J_z$ e $J_\pm$,

$$J_z = J_3 = iL_3, \quad J_\pm = J_1 \pm iJ_2 = iL_1 \mp L_2, \tag{4.33}$$

cujas relações de comutação são (verifique)

$$[J_z, J_\pm] = \pm J_\pm, \tag{4.34}$$
$$[J_+, J_-] = 2J_z. \tag{4.35}$$

Note que, da definição (4.33), os elementos $J_\pm$ não são hermitianos, pois $J_+^\dagger = J_-$. Isto é uma característica desta forma canônica (também conhecida por forma de Cartan-Weyl).

Como veremos adiante, esta forma canônica nos permitirá a determinação da representações irredutíveis da álgebra so(3) sem maiores dificuldades. A construção de representações irredutíveis em qualquer outra forma que não seja a canônica é uma tarefa quase impraticável.

### 4.3.3 Representação adjunta

Vimos nos capítulos anteriores que qualquer álgebra de Lie $\mathcal{A}$ (abstrata) traz consigo uma representação (irredutível) adjunta, onde cada elemento $X$ da álgebra é identificado com um operador $\hat{X}$ (o próprio elemento) agindo na própria álgebra, graças ao produto de Lie,

$$\hat{X}Y \equiv [X, Y], \quad \forall X, Y \in \mathcal{A}. \tag{4.36}$$

Usando a definição (4.36) e as relações de comutação na forma cartesiana (4.30), podemos ver que as matrizes (4.28) são as mesmas matrizes da representação adjunta (faça o Exercício 52). Como estas três matrizes não comutam, elas não podem ser diagonalizadas simultaneamente. Portanto, esta representação adjunta é irredutível. Naturalmente, quando transformamos as constantes de estrutura, a representação adjunta muda de forma. Por exemplo, usando a definição e as relações de comutação na forma canônica (4.34)–(4.35), a representação adjunta neste caso é (faça o Exercício 53)

$$\hat{J}_z = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \hat{J}_+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{J}_- = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{4.37}$$

Há duas observações importantes em (4.37): (1) $\hat{J}_z$ possui uma representação por uma matriz já diagonal; (2) os geradores $\hat{J}_\pm$ não satisfazem a condição de hermiticidade $\hat{J}_- = \hat{J}_+^\dagger$. A condição de hermiticidade, seja ela qual for, é sempre uma imposição adicional às relações de comutação que definem a álgebra.

### 4.3.4 Forma quadrática de Killing

Na construção da representação adjunta, usamos ora a álgebra como um conjunto de operadores, ora como um conjunto de vetores recebendo a ação de operadores. Da mesma forma que definimos a ação operacional (4.36), podemos também definir um produto escalar na álgebra $\mathcal{A}$ (vista como um espaço vetorial):

$$X \cdot Y \equiv \mathrm{tr}\,(\hat{X}\hat{Y}), \quad \forall X, Y \in \mathcal{A}, \tag{4.38}$$

onde $\hat{X}$ é a matriz da representação adjunta. Ordenando os elementos da álgebra, $\mathcal{A} = \{X_1, X_2, \ldots\}$, os produtos escalares

$$g_{ij} = X_i \cdot X_j = \mathrm{tr}\,(\hat{X}_i \hat{X}_j), \tag{4.39}$$

podem ser organizados numa matriz $g$, ou seja, formam uma métrica no espaço vetorial formado pela álgebra. Podemos ver que esta matriz é simétrica (devido a propriedade de simetria do traço). Ela é conhecida como forma (quadrática) de Killing. Há dois teoremas importantes associados a ela: (i) se o seu determinante é diferente de zero, então a álgebra é compacta e semi-simples; (ii) ela pode ser usada para construirmos operadores que comutam com todos os elementos da álgebra, conhecidos como operadores invariantes. Por exemplo, o operador quadrático

$$I_2 = \sum_{kl} g^{kl} X_k X_l, \tag{4.40}$$

onde $g^{kl}$ são os elementos da inversa $1/g$ da métrica $g$, é um operador invariante, conhecido como operador de Casimir (Hendrik Bugt Casimir, 1909–2000).

Como exemplo, a representação adjunta (4.28), oriunda do forma cartesiana (4.30), fornece uma métrica proporcional a identidade, $g = -2\mathcal{I}$ (faça o Exercício 54). Desprezando o fator numérico, o operador de Casimir aqui é $L_1^2 + L_2^2 + L_3^2 = L^2$, ou qualquer outro proporcional a ele (faça o Exercício 54). Note que, se $L_i$ representam componentes cartesianas do (vetor) momentum angular, então $L^2$ é o seu módulo ao quadrado. Sendo $L^2$ um operador invariante, então devemos ter $[L^2, L_i] = 0$ (faça o Exercício 54).

Como outro exemplo, a representação adjunta (4.37), oriunda do forma canônica (4.34)–(4.35) , fornece a métrica (faça o Exercício 55)

$$g = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}, \quad g^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{4.41}$$

Desprezando o fator numérico $1/2$, o operador de Casimir na forma canônica é (faça o Exercício 55)

$$J^2 = J_z^2 + \frac{1}{2}(J_+J_- + J_-J_+) = J_z(J_z - 1) + J_+J_- = J_z(J_z + 1) + J_-J_+. \tag{4.42}$$

Vale observar que estes operadores invariantes, por serem polinômios nos elementos da álgebra, não pertencem a ela. Uma álgebra (linear) contém apenas combinações lineares de seus elementos. Tecnicamente falando, estes invariantes moram num espaço polinomial que envolve a álgebra, conhecido por álgebra envelope. Todas as regras para se determinar todos os invariantes funcionalmente independentes de uma álgebra de lie semi-simples são conhecidas. Por exemplo, a presente álgebra so(3) é um caso particular da família so$(2r + 1)$, com $r = 1$. O inteiro $r$ é o posto da álgebra. O número de operadores invariantes, funcionalmente independentes, é sempre igual ao posto da álgebra. Isto significa que não adianta procurar por mais invariantes na álgebra $so(3)$, pois existe somente um.

### 4.3.5 Representações irredutíveis

Procedendo como nos capítulos anteriores, vamos procurar pelas matrizes irredutíveis (irreps) que satisfaçam as relações de comutação (4.34)–(4.35) (forma canônica). Sabendo que a álgebra so(3) é compacta, podemos impor também que estas irreps sejam hermitianas (na forma cartesiana) e finitas. Requerendo que os elementos $J_i$ da forma cartesiana (4.31) sejam representados por matrizes hermitianas, $J_i^\dagger = J_i$, então os geradores na forma canônica (4.33) deverão satisfazer

$$J_z^\dagger = J_z, \quad J_\pm^\dagger = J_\mp. \tag{4.43}$$

São estes geradores na forma canônica que iremos utilizar na construção das irreps da álgebra so(3).

Seguindo o procedimento padrão, devemos formar um conjunto completo de operadores comutantes (na forma canônica) para que os autovetores comuns destes operadores comutantes possam ser usados como vetores do espaço portador das irreps da álgebra so(3). Aqui, iremos usar $\{J_z, J^2\}$, sendo $J^2$ o operador invariante (4.42), para formarmos o espaço portador das irreps da álgebra so(3). Vamos denotar por $|j, m\rangle$ os vetores de base (ortonormal) neste espaço portador, com $j$ e $m$ ainda indeterminados. Assim, por definição,

$$J_z|j, m\rangle = m|j, m\rangle, \tag{4.44}$$

$$J^2|j, m\rangle = j(j + 1)|j, m\rangle. \tag{4.45}$$

onde $m$ é o autovalor do operador $J_z$ e $j$ está relacionado ao autovalor $j(j + 1)$ do operador $J^2$ (veremos logo adiante que é conveniente escrever o autovalor de $J^2$ como $j(j + 1)$). Como é a ação dos operadores $J_\pm$ nos vetores $|j, m\rangle$?

Usando a relação de comutação (4.34) podemos ver que os vetores $J_\pm|j,m\rangle$ também são autovetores de $J_z$ como autovalores $m \pm 1$. De fato, abrindo o produto de Lie no lado esquerdo de (4.34), podemos escrever $J_z J_\pm = J_\pm J_z \pm J_\pm$. Assim,

$$J_z J_\pm|j,m\rangle = (m \pm 1) J_\pm|j,m\rangle. \tag{4.46}$$

Portanto, o vetor $J_\pm|j,m\rangle$ também é autovetor de $J_z$ com autovalor $m \pm 1$. Porém, conforme (4.44), este vetor $J_\pm|j,m\rangle$ deve ser proporcional ao vetor $|j, m \pm 1\rangle$,

$$J_\pm|j,m\rangle = A_\pm(j,m)|j,m \pm 1\rangle. \tag{4.47}$$

Ate aqui, usando a relação de comutação (4.34), conseguimos descobrir como os operadores $J_\pm$ modificam os vetores $|j,m\rangle$. É importante observar que os operadores $J_\pm$ atuam como operadores de levantamento e abaixamento, conectando um vetor com seus vizinhos mais próximos (passo um). Isto significa que, se queremos uma irrep finita, a ação sucessiva dos operadores $J_\pm$ no vetor $|j,m\rangle$ deve terminar em algum momento. Para que isto aconteça, deve haver os limites superior e inferior para o possíveis valores de $m$. Digamos, depois de um número $N$ de passos, as $N$ ações sucessivas dos operadores $J_\pm$ no vetor $|j,m'\rangle$ atinja os vetores $A_\pm(j, M_\pm)|j, M_\pm\rangle$, com $M_\pm = m' \pm N$. Impondo que estes vetores limites tenham seus coeficientes nulos, $A_\pm(j, M_\pm) = 0$, a fim de garantir uma representação finita, então os coeficientes $A_\pm(j,m)$ devem ser proporcionais a $|M_+| - m$, quando $m$ máximo for maior que zero (pela ação sucessiva de $J_+$), e a $|M_-| + m$, quando $m$ mínimo for menor que zero (pela ação sucessiva de $J_-$),

$$A_\pm(j,m) \propto (|M_\pm| \mp m). \tag{4.48}$$

Naturalmente, os coeficientes $A_\pm(j,m)$ podem ser números complexos. Entretanto, estes coeficientes precisam ser proporcionais aos cortes $(M_\pm \mp m)$ para que a ação dos operadores termine depois de alguns passos quando $m$ atingir $M_\pm$.

Além dos cortes (4.48), os coeficientes $A_\pm(j,m)$ precisam ser diretamente proporcionais a outros fatores similares se levarmos em consideração a condição de hermiticidade (4.43) para os operadores $J_\pm$. De fato, devido a condição de hermiticidade $J_\pm^\dagger = J_\mp$, temos $\langle j,m|J_\pm^\dagger|j,m \pm 1\rangle = \langle j,m|J_\mp|j,m \pm 1\rangle$. Acontece que, usando (4.47), temos $\langle j,m|J_\mp|j,m \pm 1\rangle = A_\mp(j, m \pm 1)$. Por outro lado, aplicando uma transposição complexa em (4.47), temos $\langle j,m|J_\pm^\dagger|j,m \pm 1\rangle = A_\pm^*(j,m)$. Portanto, devemos ter

$$A_\pm(j,m) = A_\mp^*(j, m \pm 1). \tag{4.49}$$

Aplicando esta identidade em (4.48), tendo em mente que $m$ e $M_\pm$ são reais, devemos ter novos cortes

$$A_\pm(j,m) \propto (|M_\pm| \mp m)(|M_\mp| \pm m + 1). \tag{4.50}$$

Uma pequena pausa para falarmos um pouquinho de Física, mais precisamente, para falarmos sobre unidades. Vimos que os operadores $J_i$ representam as componentes do vetor momentum angular. Momentum angular tem as mesmas dimenões de energia vezes tempo. Mas isto não é o mais importante; importa que se os operadores $J_i$ tem dimensões (quaisquer que sejam), então seus autovalores e elementos de matriz devem possuir estas mesmas dimensões. Olhando para (4.50), vemos uma expressão quadrática nas dimensões dos autovalores dos operadores de momentum angular (note que $j$ aparece de forma quadrática em (4.45)). Assim, para balancear as dimensões, devemos ter

$$A_\pm(j,m) = \mathrm{e}^{i\phi_\pm(j,m)} \sqrt{(|M_\pm| \mp m)(|M_\mp| \pm m + 1)}, \tag{4.51}$$

onde as fases $\phi_\pm$ são reais. No entanto, levando (4.51) em (4.49), o qual é o um resultado mais amplo, concluímos que

$$\phi_\pm(j,m) = -\phi_\mp(j, m \pm 1). \tag{4.52}$$

Até aqui ainda não usamos o operador de Casimir. Usando o operador de Casimir $J^2$ nas formas $J_z(J_z \pm 1) + J_\mp J_\pm$, veja (4.42), e a equação de autovalor (4.45), temos

$$\begin{aligned}
\langle j,m|J^2|j,m\rangle &= j(j+1) \\
&= \langle j,m|J_z(J_z+1) + J_- J_+|j,m\rangle = m(m+1) + |A_+(m)|^2 \\
&= \langle j,m|J_z(J_z-1) + J_+ J_-|j,m\rangle = m(m-1) + |A_-(m)|^2,
\end{aligned} \tag{4.53}$$

onde fizemos uso de (4.49) para usarmos $A_\pm(m \mp 1)A_\mp(m) = |A_\mp(m)|^2$. Da igualdade dos dois resultados independentes em (4.53), temos uma conclusão importante: os elementos de matriz $A_\pm$ devem ser raízes dos autovalores $j$ e $m$, como previsto em (4.51), pois

$$|A_\pm(m)|^2 = j(j+1) - m(m \pm 1). \tag{4.54}$$

Note que, neste resultado, não sabemos ainda quem é $j$ e nem temos informações sobre as fases. Naturalmente, comparando (4.54) e (4.51), chegaremos a conclusão que $|M_+| = |M_-| = j$, pois

$$|A_\pm(m)|^2 = (|M_\pm| \mp m)(|M_\mp| \pm m + 1) = |M_\pm|(|M_\mp| + 1) \pm m(|M_\pm| - |M_\mp|) - m(m \pm 1), \tag{4.55}$$

resultado este que deve ser idêntico ao lado direito de (4.54). Esta igualdade nos permite concluir, após um pouco de análise, que $|M_+| = |M_-| = j$. No entanto, é instrutivo encontrar este mesmo resultado de uma forma ligeiramente diferente. Usando o resultado (4.55) na igualdade $m(m+1) + |A_+(m)|^2 = m(m-1) + |A_-(m)|^2$, proveniente de (4.53), temos $|M_+|(|M_-|+1) = |M_-|(|M_+|+1)$, a qual implica em $|M_+| = |M_-| = M$. Levando este resultado de volta em (4.55), e depois comparando-o com (4.54), encontraremos $j(j+1) = M(M+1)$, de onde podemos concluir que $j = M$, ou seja, que $\pm j$ são os limites superior e inferior para os possíveis valores do autovalor $m$. Como $|m| \leq j$, então para cada $j$ teremos uma irrep de dimenão $2j+1$. Como a dimenão $2j+1$ deve ser um inteiro positivo, $j$ deve ser inteiro ou semi-inteiro. Logo, $m$ é um inteiro ou semi-inteiro também.

Outra forma de deduzir que $j$ e $m$ são inteiros ou semi-inteiros: como a ação dos operadores $J_\pm$ modificam os autovalores $m$ por números inteiros, então $m$, bem como os limites $\pm j$, podem ser somente inteiros ou semi-inteiros (faça algumas experiências). Por exemplo, suponha $j = 2/3$. Então, podemos ter $m = j = 2/3$, $m = 2/3 - 1 = -1/3$, $m = -1/3 - 1 = -4/3$ e infinitos outros valores negativos, pois em momento algum passamos por $m = -j = -2/3$ para terminar esta série descendente. Este inconveniente não acontece com $j$ inteiro ou semi-inteiro. Por exemplo, para $j = 3/2$ temos $m = j = 3/2$, $m = 3/2 - 1 = 1/2$, $m = 1/2 - 1 = -1/2$ e $m = -1/2 - 1 = -3/2 = -j$ e apenas estes.

Portanto, para garantirmos irreps finitas e hermitianas, $j$ deve ser um inteiro ou um semi-inteiro positivo. Desta forma, a menos de uma fase arbitrária, determinamos os elementos de matriz dos operadores $J_\pm$. Sumariando:

$$J_z|j,m\rangle = m|j,m\rangle, \quad |m| \leq j, \quad j \in \mathcal{Z}^+ \text{ ou } j \in \mathcal{Z}^+/2 \tag{4.56}$$

$$J^2|j,m\rangle = j(j+1)|j,m\rangle, \tag{4.57}$$

$$J_\pm|j,m\rangle = \sqrt{(j \mp m)(j \pm m + 1)}\,|j, m \pm 1\rangle = \sqrt{j(j+1) - m(m \pm 1)}\,|j, m \pm 1\rangle. \tag{4.58}$$

onde escolhemos $\phi_\pm = 0$. Note que o elemento de matriz $\sqrt{(j \mp m)(j \pm m + 1)}$ tabém pode ser escrito como $\sqrt{j(j+1) - m(m \pm 1)}$.

Vimos no primeiro capítulo que os autovalores $m$ do operador $J_z$ tinham que ser inteiros (devido a condição global $R(2\pi) = R(0)$). Desta forma, as irreps da álgebra so(3) devem ser etiquetadas pelo inteiro positivo $j$. Cada irrep $j$ terá $2j+1$ vetores $|j,m\rangle$ ($|m| \leq j$). Por exemplo, para $j = 1$, temos (faça o Exercício 56)

$$J_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \; J_+ = \sqrt{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; J_- = \sqrt{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{4.59}$$

A irrep de dimensão mais baixa, $j = 1$ neste caso, é conhecida por representação fundamental. Neste caso, ela tem dimenão três, igual à dimenão da álgebra so(3). A irrep que tem a mesma dimensão da álgebra é conhecida por representação adjunta. Lembre-se de que podemos ter irreps aparentemente diferentes, como (4.37) e (4.59), todas adjuntas, mas relacionadas por uma transformação de similaridade, ou seja, são equivalentes. Nem sempre é uma tarefa fácil encontrar estas transformações de similaridade. Porém, há um teorema que garante a unicidade das irreps $j$ da álgebra so(3). Então as representações tri-dimensionais (4.37) e (4.59) devem ser equivalentes.

Podemos ter também $j$ semi-inteiros positivos. Por exemplo, para $j = 1/2$, temos (faça o Exercício 56)

$$J_3 = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix}, \; J_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \; J_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{4.60}$$

Quando voltamos para a forma cartesiana $J_i$, invertendo as relações (4.33), temos

$$J_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \; J_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \; J_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{4.61}$$

As matrizes bidimensionais $\sigma_i = 2J_i$ também são conhecidas por matrizes de Pauli. Elas desempenham um papel importante em mecânica quântica relativística. Veremos logo adiante, que as irreps que determinamos aqui, incluindo $j$ semi-inteiros, pertencem a uma outra álgebra, su(2). Uma álgebra que contém as irreps de outra é denominada de álgebra de cobertura. Veremos mais detalhes sobre o grupo SU(2) gerado pela álgebra su(2) logo adiante.

É oportuno lembrar que as irreps construídas aqui representam matricialmente os geradores de rotações espaciais ($j$ inteiro) que preservam o comprimento de vetores (irreps vetoriais) e representam também os geradores de transformações unitárias ($j$ semi-inteiro) que preservam o módulo de espinores (irreps espinoriais). Vale lembrar também que conhecemos apenas dois tipos de estatística em Física: Bose-Einstein (spin inteiro) e Fermi-Dirac (spin semi-inteiro). Spin é momentum angular e os operadores momentum angulares são proporcionais aos geradores da álgebra su(2). Isto mostra o quão adequada é esta linguagem matemática de simetrias para descrever fenômenos físicos.

## 4.4 Elementos de matriz para os grupos SO(3) e SU(2)

Vamos calcular nesta seção os elementos de matriz dos elementos do grupo SO(3) (e também para o grupo SU(2)). Para isto, iremos utilizar, em princípio, a prescrição geral em que todo grupo de Lie é gerado pela aplicação exponencial de sua álgebra, como estabelecido em (4.27),

$$R(\alpha) = \mathrm{e}^{-i\alpha_1 J_1 - i\alpha_2 J_2 - i\alpha_3 J_3}. \tag{4.62}$$

O cálculo explícito desta exponencial é uma tarefa muito difícil devido às relações de comutação (4.32). Se os geradores $J_i$ comutassem, tudo seria mais fácil, pois a exponencial (4.62) poderia ser re-escrita como o produto de exponenciais. Assim, para evitar cálculos pesados em (4.62), iremos mudar para a representação do grupo SO(3) em termos dos ângulos de Euler. Nesta parametrização, um elemento do grupo pode ser escrito na forma (4.20), a qual é um produto de exponenciais,

$$R(\phi,\theta,\psi) = R(\mathbf{e}_3,\phi)R(\mathbf{e}_2,\theta)R(\mathbf{e}_3,\psi) = \mathrm{e}^{-i\phi J_3}\,\mathrm{e}^{-i\theta J_2}\,\mathrm{e}^{-i\psi J_3}. \tag{4.63}$$

Não podemos esquecer que a forma matricial de $J_3$ nesta expressão depende da representação matricial que estamos lidando.

Tendo em vista as representações irredutíveis (4.56)–(4.58), onde $J_z = J_3$ é diagonal, podemos calcular as respectivas matrizes de rotação (na parametrização de Euler) usando (4.63),

$$R(\phi,\theta,\psi)|j,m\rangle = \sum_{m'=-j}^{j} R_{m'm}(\phi,\theta,\psi)|j,m'\rangle, \tag{4.64}$$

onde

$$R_{m'm}(\phi,\theta,\psi) = \mathrm{e}^{-i\phi m'}\,\mathrm{e}^{-i\psi m} d^j_{m'm}(\theta), \quad d^j_{m'm}(\theta) = \langle jm'|\,\mathrm{e}^{-i\theta J_2}|jm\rangle. \tag{4.65}$$

Todo o nosso trabalho aqui é o de calcular a única exponencial $d^j(\theta) = \mathrm{e}^{-i\theta J_2}$ envolvendo o gerador $J_2$. Note que, devido a condição de hermiticidade $J_2^\dagger = J_2$, temos $[d^j(\theta)]^{-1} = d^j(-\theta)$.

Consideremos como primeiro exemplo, $j = 1/2$ (a representação fundamental do grupo SU(2)). Usando a matriz representando $J_2$ em (4.61), temos (faça o Exercício 57)

$$d^{1/2}(\theta) = \mathrm{e}^{-i\theta J_2} = \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) & -\operatorname{sen}(\theta/2) \\ \operatorname{sen}(\theta/2) & \cos(\theta/2) \end{pmatrix}. \tag{4.66}$$

Assim,

$$R(\phi,\theta,\psi) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-\frac{i}{2}(\phi+\psi)}\cos(\theta/2) & -\,\mathrm{e}^{-\frac{i}{2}(\phi-\psi)}\operatorname{sen}(\theta/2) \\ \mathrm{e}^{+\frac{i}{2}(\phi-\psi)}\operatorname{sen}(\theta/2) & \mathrm{e}^{+\frac{i}{2}(\phi+\psi)}\cos(\theta/2) \end{pmatrix}. \tag{4.67}$$

Naturalmente, vamos deixar o caso $j = 1$ como exercício. No entanto, podemos observar (sem completar o exercício) que esta representação matricial para $j = 1$ será diferente daquela que podemos encontrar na maioria dos textos contendo a representação matricial de uma rotação espacial parametrizada pelos ângulos de Euler, pois estamos $J_z = J_3$ diagonal. Vejamos como podemos conciliar tudo isto. Primeiro, observe que os autovalores de $iL_3$, com $L_3$ sendo o gerador dado em (4.28), são

$$M(iL_3)M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = J_3, \quad M = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -i & 0 & i \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}. \tag{4.68}$$

Note que a transformação unitária $M(iL_3)M^{-1}$ reproduz exatamente a forma matricial diagonal de $J_3$ dada em (4.59). Entretanto, esta mesma tranformação aplicada a $J_\pm = iL_1 \mp L_2$ formece

$$M(iL_1 - L_2)M^{-1} = i\sqrt{2} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M(iL_1 + L_2)M^{-1} = -i\sqrt{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{4.69}$$

as quais têm elementos de matrizes (não-nulos) com fases distintas em relação às matrizes dadas em (4.59). A escolha de fase que fizemos em (4.57)–(4.58) reproduz exatamente apenas as matrizes de Pauli (4.61). Geralmente as matrizes (4.28) são usadas para representar os jeradores $J_i = iL_i$ na expressão (4.63) para se obter a forma matricial de uma rotação espacial parametrizada pelos ângulos de Euler,

$$\begin{aligned} R(\alpha\beta\gamma) &= \mathrm{e}^{-i\alpha J_3}\, \mathrm{e}^{-i\beta J_2}\, \mathrm{e}^{-i\gamma J_3} \\ &= \begin{pmatrix} \cos\alpha\cos\beta\cos\gamma - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\gamma & -\cos\alpha\cos\beta\operatorname{sen}\gamma - \operatorname{sen}\alpha\cos\gamma & \cos\alpha\operatorname{sen}\beta \\ \operatorname{sen}\alpha\cos\beta\cos\gamma + \cos\alpha\operatorname{sen}\gamma & -\operatorname{sen}\alpha\cos\beta\operatorname{sen}\gamma + \cos\alpha\cos\gamma & \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta \\ -\operatorname{sen}\beta\cos\gamma & \operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}\gamma & \cos\beta \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{4.70}$$

Vejamos algumas propriedades globais interessantes de uma “rotação” arbitrária com seus elementos de matrizes calculados a partir de (4.65). Primeiro, escolhendo $\mathbf{n} = S\,\hat{z}$ em (4.16), temos, para uma rotação $S$ arbitrária,

$$R(\mathbf{n}, 2\pi) = SR(\hat{z}, 2\pi)S^{-1}. \tag{4.71}$$

No entanto, na base $|jm\rangle$, a rotação $R(\hat{z}, 2\pi)$ é representada pela matriz

$$\langle jm'|R(\hat{z}, 2\pi)|jm\rangle = \langle jm'|\,\mathrm{e}^{-i2\pi J_z}|jm\rangle = \mathrm{e}^{-im2\pi}\delta_{mm'} = (-1)^{2m}\delta_{mm'} = (-1)^{2j}\delta_{mm'}, \tag{4.72}$$

onde usamos o fato que $2m$, assim como $2j$, é sempre um inteiro par ($j$ inteiro) ou ímpar ($j$ semi-inteiro). Levando este resultado de volta à Eq. (4.71), temos

$$R(\mathbf{n}, 2\pi) = (-1)^{2j} I \tag{4.73}$$

para uma rotação de $2\pi$ em torno de um eixo arbitrário. Isto significa que, para as representações com $j$ semi-inteiro ($2j$ ímpar), é necessário duas voltas ($4\pi$) para retornar-se ao ponto de partida, enquanto que, para as representações com $j$ inteiro ($2j$ par), é necessário apenas uma volta ($2\pi$) para retornar-se ao ponto de partida. Quando $j$ é um inteiro, a irrep é denominada de vetorial e são representações para as rotações espaciais. Quando $j$ é um semi-inteiro, a irrep é denominada de espinorial.

## 4.5 Relação entre os grupos SO(3) e SU(2)

Mencionamos anteriormente que as irreps com $j$ semi-inteiros não pertencem a álgebra so(3), a qual gera o grupo SO(3) das rotações espaciais num espaço euclidiano real. Não podemos esquecer que a principal característica de uma rotação espacial é preservar o comprimento de vetores tridimensionais usuais (com componentes reais), ou seja, rotações espaciais são transformações lineares ortogonais. As irreps com $j$ semi-inteiros pertencem a álgebra de cobertura su(2), a qual gera o grupo SU(2) das rotações bidimensionais num espaço euclidiano complexo. Similarmente à ação do grupo SO(3), as quantidades que são rodadas pela ação do grupo SU(2), de forma a preservar seus comprimentos, são denominadas de espinores. Além de possuirem a mesma álgebra, embora com irreps diferentes, existe uma outra relação muito interessante entre os grupos SO(3) e SU(2).

Consideremos um espaço vetorial complexo de dimensão dois formado pelos espinores $|\xi\rangle$. Vamos denotar por $\{\boldsymbol{\epsilon}_+, \boldsymbol{\epsilon}_-\}$ uma base ortonormal neste espaço. Seja

$$|\xi\rangle = \xi_+ \boldsymbol{\epsilon}_+ + \xi_- \boldsymbol{\epsilon}_- = \begin{pmatrix} \xi_+ \\ \xi_- \end{pmatrix}, \quad \xi_k \in C, \quad \langle\xi| = \xi_+^* \boldsymbol{\epsilon}_+ + \xi_-^* \boldsymbol{\epsilon}_- = \begin{pmatrix} \xi_+^* & \xi_-^* \end{pmatrix}, \tag{4.74}$$

um espinor arbitrário neste espaço. Naturalmente, por se tratar de um espaço complexo, o produto escalar dever ser efetuado da forma seguinte:

$$\langle\chi|\xi\rangle = \chi_+^* \xi_+ + \chi_-^* \xi_-. \tag{4.75}$$

Seja também $U(\alpha)$ uma transformação linear unitária,

$$U(\alpha) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_3 & \alpha_4 \end{pmatrix}, \quad \alpha_i \in C, \qquad U^{-1} = U^\dagger, \quad \det U = 1, \tag{4.76}$$

Naturalmente, escolhemos determinante positivo para que tais transformações lineares possam formar um grupo, denominado de SU(2), o qual preserva o comprimento dos espinores $|\xi\rangle$ (faça o Exercício 58). Portanto, apenas três parâmetros reais são independentes em (4.76).

Note que as condições de unitariedade implicam em

$$|\alpha_1|^2 + |\alpha_2|^2 = 1, \quad \alpha_3 = -\alpha_2^*, \ \alpha_4 = \alpha_1^* \text{ ou } \alpha_3 = \alpha_2^*, \ \alpha_4 = -\alpha_1^*. \tag{4.77}$$

A última possibilidade é interessante por fornecer matrizes unitárias de traço nulo (e hermitianas) caso $\alpha_1$ seja real. Por outro lado, podemos usar as matrizes de Pauli (4.61) como base para escrever qualquer matriz unitária $2 \times 2$ de traço nulo,

$$U(\alpha) = -\hat{r} \cdot \boldsymbol{\sigma} = -\frac{x}{r}\sigma_1 - \frac{y}{r}\sigma_2 - \frac{z}{r}\sigma_3 = -\frac{1}{r}\begin{pmatrix} z & x - iy \\ x + iy & -z \end{pmatrix}. \tag{4.78}$$

Desta forma, estamos identificando os três parâmetros reais em (4.76) com as coordenadas do vetor (espacial) $\mathbf{r}$ ($\alpha_1 = z$ e $\alpha_2 = x + iy$). Note que o comprimento do vetor $\mathbf{r}$ torna-se igual ao determinante desta matriz $U$. Em princípio, seguindo este procedimento, temos um vetor tridimensional diferente para cada elemento do grupo SU(2). Isto significa que ao mudarmos de elemento no grupo SU(2), estaremos transformando vetores tridimensionais, ou seja, o grupo SU(2) está induzindo transformações no espaço tridimensional. Porém, todos estes vetores tridimensionais, construídos via os parâmetros da transformação unitária $U$, possuem o mesmo comprimento. De fato, para mostrarmos isto, devemos fazer uso do fato de que qualquer elemento de um grupo pode ser obtido de um produto entre outros dois elementos: $U(\alpha') = U(\beta)U(\alpha)$. Esta transformação $U(\alpha) \to U(\alpha')$ ou, equivalentemente, $\alpha \to \alpha'$, induz a transformação $\mathbf{r} \to \mathbf{r}'$. Como os determinantes destas transformações são sempre iguais a unidade, então a transformação $\mathbf{r} \to \mathbf{r}'$ induzida no espaço real é ortogonal (preserva o comprimento do versor $\hat{r}$), portanto uma rotação. Esta é a conexão entre SU(2) e SO(3) que estávamos procurando. Esta relação entre estes dois grupos SU(2) e SO(3) está intimamente relacionada como o fato das representações irredutíveis da álgebra so(3) admitir também valores semi-inteiros para $j$. Os valores inteiros de $j$ correspondem às representações do grupo SO(3) bem como de SU(2), enquanto que os valores semi-inteiros correspondem a representações exclusivas do grupo SU(2). Por isso, o grupo SU(2) é denominado de grupo de cobertura do grupo SO(3). Em outras palavras os grupos SO(3) e SU(2) possuem a mesma álgebra. Neste caso, eles são ditos serem localmente isomórficos, so(3) $\simeq$ su(2).

## 4.6 Elementos de matriz para $d^{(j)}$

Sendo a matriz (4.66) uma matriz unitária $2 \times 2$, vamos usá-la para transformar as componentes de um espinor $\xi$ arbitrário,

$$\bar{\xi} = d^{1/2}(\theta)\,\xi \ \Rightarrow \ \bar{\xi}^+ = \xi_+ \cos(\theta/2) - \xi_- \,\mathrm{sen}\,(\theta/2), \ \bar{\xi}^- = \xi_+ \,\mathrm{sen}\,(\theta/2) + \xi_- \cos(\theta/2). \tag{4.79}$$

Podemos encontrar uma expressão analítica para os elementos de matriz $d^j_{mm'}(\theta)$ permitindo que a matriz atue no produto tensorial de ordem $n = 2j$

$$\xi_{(m)} = \frac{(\xi_+)^{j+m}(\xi_-)^{j-m}}{\sqrt{(j+m)!(j-m)!}}. \tag{4.80}$$

Os vetores $\xi_{(m)}$ comportam-se como vetores irredutíveis de uma representação $j$ do grupo SU(2). Assim,

$$\bar{\xi}^{(m)} = \sum_{m'=-j}^{j} d^j_{mm'}\xi_{(m')}. \tag{4.81}$$

Desenvolvendo o lado esquerdo desta expressão usando (4.79) e comparando com o lado direito, após algum esforço para reorganizar todas as somas do lado esquerdo, obteremos

$$d^j_{mm'}(\theta) = \sum_k (-1)^k \frac{\sqrt{(j+m)!(j-m)!(j+m')!(j-m')!}}{k!(j+m-k)!(j-m'-k)!(k-m+m')!} \times \\ (\cos\frac{\theta}{2})^{2j+m-m'-2k}(\operatorname{sen}\frac{\theta}{2})^{2k-m+m'}, \tag{4.82}$$

onde a soma deve ser efetuada para todos os valores de $k$ os quais sejam condizentes com todos os três fatoriais no denominador. Como exemplo, tomemos $j = 1/2$. Para $m = m' = 1/2$, o único valor possível é $k = 0$. Para $m = 1/2$ e $m' = -1/2$, temos $k = 1$ enquanto que para $m = -1/2$ e $m' = 1/2$ temos $k = 0$ e assim por adiante. Os elementos de matriz (4.82) possuem uma propriedade de simetria muito importante:

$$d^j_{-m,-m'} = (-1)^{m-m'} d^j_{mm'}. \tag{4.83}$$

Foi dito anteriormente que os estados (4.80) comportam-se como vetores irredutíveis de uma representação $j$ do grupo SU(2). É instrutivo verificarmos esta afirmação. Primeiro, definiremos uma ação dos elementos $J_3$ e $J_\pm$ da álgebra su(2) nos estados (4.80). Isto pode ser feito realizando a álgebra su(2) por operadores diferenciais agindo nas componentes espinoriais $\xi_\pm$. Para tal, iremos precisar de operadores de criação ($a_\pm$) e destruição ($a^\dagger_\pm$), definidos por

$$a_\pm = \xi_\pm, \quad a^\dagger_\pm = \frac{\partial}{\partial\xi_\pm}, \tag{4.84}$$

satisfazendo relações de comutação bosônicas (álgebra de Weyl):

$$[a^\dagger_\pm, a_\pm] = 1, \; [a^\dagger_\pm, a_\mp] = [a^\dagger_\pm, a^\dagger_\mp] = [a_\pm, a_\mp] = 0. \tag{4.85}$$

O método de Schwinger constitue um procedimento geral para realizar os elementos de uma determinada álgebra por operadores bosônicos: I) obtenha uma representação matricial fundamental para a álgebra em questão, por exemplo, as matrizes (4.60) para a álgebra su(2); II) realize os elementos da álgebra através da construção

$$J_3 = \begin{pmatrix} a_+ & a_- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^\dagger_+ \\ a^\dagger_- \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(a_+a^\dagger_+ - a_-a^\dagger_-), \tag{4.86}$$

$$J_+ = \begin{pmatrix} a_+ & a_- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^\dagger_+ \\ a^\dagger_- \end{pmatrix} = a_+a^\dagger_- = \xi_+\partial_{\xi_-}, \tag{4.87}$$

$$J_- = \begin{pmatrix} a_+ & a_- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^\dagger_+ \\ a^\dagger_- \end{pmatrix} = a_-a^\dagger_+ = \xi_-\partial_{\xi_+}. \tag{4.88}$$

Agora, podemos verificar que a ação destes operadores nos estados (4.80) é a mesma encontrada em (4.58). Isto significa que os vetores (4.80) transformam do mesmo modo que os vetores (4.80) perante a ação de qualquer elemento da álgebra su(2).

## 4.7 Polinômios de Jacobi

Vamos denotar por $g$ os elementos de um determinado grupo de Lie $G$ e por $R^\nu(g)$ as matriz de alguma representação irredutível de dimensão $n$ para $G$. Então

$$n\int d\tau_g R^{\mu\dagger}_{ik}(g)R^\nu_{rs}(g) = \delta_{\mu\nu}\delta_{is}\delta_{kr}, \tag{4.89}$$

onde $d\tau_g$ é um fator peso de integração conhecido por medida invariante normalizada, a qual depende da forma específica de cada parametrização. Para a parametrização dada pelos ângulos de Euler, temos

$$\tau_g = -sin\theta\, d\theta. \tag{4.90}$$

Além da condição de ortogonalidade (4.89), os elementos de matriz $R^\nu_{rs}(g)$ formam uma base completa. Estes resultados valem para um grupo de Lie qualquer e são conhecidos como o teorema de Peter-Weyl. Estaremos interessados aqui explicitamente no grupo das rotações. Neste caso, usando os elementos de matriz encontrados em (4.65) e (4.82), as relações de ortogonalidades (4.89) tornam-se em

$$-\frac{2j+1}{2}\int d\cos\theta\, d^{j\dagger}_{ik}(\theta)d^{j'}_{rs}(\theta) = \delta_{jj'}\delta_{is}\delta_{kr}. \tag{4.91}$$

Os passos seguintes nos permitirá identificar os elementos matriz (4.65) com os polinômios de Jacobi. Iniciemos calculando os deslocamentos infinitesimais nos três ângulos de Euler para a rotação (4.20):

$$i\frac{\partial}{\partial\phi}R(\theta,\phi,\psi) = J_3R = R\left[R^{-1}J_3R\right], \tag{4.92}$$

$$i\frac{\partial}{\partial\theta}R(\theta,\phi,\psi) = J_3R = R\left[\mathrm{e}^{i\psi J_3}J_2\,\mathrm{e}^{-i\psi J_3}\right], \tag{4.93}$$

$$i\frac{\partial}{\partial\psi}R(\theta,\phi,\psi) = RJ_3. \tag{4.94}$$

Expandindo as exponenciais relevantes em (4.21) e usando as relações de comutação (4.34)–(4.34) e a definição (4.33), podemos escrever os termos entre colchetes no lado direito das derivadas anteriores na forma

$$R^{-1}J_3R = -\frac{1}{2}\operatorname{sen}\theta\big(\mathrm{e}^{i\psi}J_+ + \mathrm{e}^{-i\psi}J_-\big) + \cos\theta J_3, \tag{4.95}$$

$$\mathrm{e}^{i\psi J_3}J_2\,\mathrm{e}^{-i\psi J_3} = -\frac{i}{2}\big(\mathrm{e}^{i\psi}J_+ - \mathrm{e}^{-i\psi}J_-\big). \tag{4.96}$$

Usando estes dois conjuntos de relações, podemos isolar os geradores $J_3$ e $J_\pm$:

$$RJ_\pm = \mp\,\mathrm{e}^{\mp i\psi}\left[\frac{i}{\operatorname{sen}\theta}\big(\frac{\partial}{\partial\phi} - \cos\theta\frac{\partial}{\partial\psi}\big) \pm \frac{\partial}{\partial\theta}\right]R, \tag{4.97}$$

$$RJ_3 = i\frac{\partial}{\partial\psi}R. \tag{4.98}$$

Calculando os elementos de matriz entre os estados $|jm\rangle$ e $|jm'\rangle$, estas três equações fornecem as seguintes relações de recorrência para $d^j_{mm'}(\theta)$:

$$\sqrt{j(j+1)-m'(m'\pm1)}\; d^j_{m,m'+1}(\theta) = \left[\mp\frac{\partial}{\partial\theta} - \frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\big(m - m'\cos\theta\big)\right]d^j_{mm'}(\theta). \tag{4.99}$$

Podemos obter uma equação diferencial para os elementos de matriz $R^j_{mm'}$ usando o operador de Casimir e calculando os elementos de matriz de $RJ^2$:

$$\begin{aligned} RJ^2 &= R(J_3^2 - J_3 + J_+J_-) \\ &= \Big\{\mathrm{e}^{-i\psi}\left[-\frac{\partial}{\partial\theta} - \frac{i}{\operatorname{sen}\theta}\big(\frac{\partial}{\partial\phi} - \cos\theta\frac{\partial}{\partial\psi}\big)\right] \\ &\quad\times\,\mathrm{e}^{i\psi}\left[\frac{\partial}{\partial\theta} - \frac{i}{\operatorname{sen}\theta}\big(\frac{\partial}{\partial\phi} - \cos\theta\frac{\partial}{\partial\psi}\big)\right] - \frac{\partial^2}{\partial\psi^2} - i\frac{\partial}{\partial\psi}\Big\}R. \end{aligned} \tag{4.100}$$

Os elementos de matriz deste operador são dados por

$$\left\{\frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\operatorname{sen}\theta\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{1}{\operatorname{sen}^2\theta}\left[\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}+\frac{\partial^2}{\partial\psi^2}-2\cos\theta\frac{\partial^2}{\partial\psi\partial\phi}\right]+j(j+1)\right\}R^j_{mm'}=0, \tag{4.101}$$

ou, usando (4.65),

$$\left[\frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\frac{d}{d\theta}\operatorname{sen}\theta\frac{d}{d\theta}-\frac{1}{\operatorname{sen}^2\theta}(m^2+m'^2-2mm'\cos\theta)+j(j+1)\right]d^j_{mm'}(\theta)=0. \tag{4.102}$$

Esta última equação pode ser transformada na equação de Jacobi,

$$\left\{(1-z^2)\frac{d^2}{dz^2}+[\beta-\alpha-2(2+\alpha+\beta)z]\frac{d}{dz}+l(l+\alpha+\beta+1)\right\}P_l^{\alpha,\beta}(z)=0, \tag{4.103}$$

após a identificação

$$d^j_{mm'}(\theta)=\sqrt{\frac{(j+m)!(j-m)!}{(j+m')!(j-m')!}}\left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^{m+m'}\left(\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\right)^{m'-m}P_{j-m}^{m-m',m+m'}(\cos\theta). \tag{4.104}$$

A equação (4.101) para $m'=0$ e $\psi=0$ e restringindo os valores de $j$ a inteiros $l$, torna-se em

$$\left\{\frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\operatorname{sen}\theta\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{1}{\operatorname{sen}^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}+j(j+1)\right\}R^j_{m,0}(\theta,\phi,0)=0. \tag{4.105}$$

Esta é a mesma equação diferencial satisfeita pelos harmônicos esféricos $Y_{lm}(\theta,\phi)$, após a identificação

$$Y_{lm}(\theta,\phi)=\sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}}\,[R^j_{m,0}(\theta,\phi,0)]^*. \tag{4.106}$$

## 4.8 Exercícios

**Exercício 41** *Faça um desenho bastante claro mostrando todas as quantidades (pontos, segmentos de retas, vetores, arcos e ângulos) envolvidas na determinação dos elementos de matriz $R_{ik}$.*

**Exercício 42** *Re-escreva a equação vetorial (4.6) em termos de suas componentes e mostre que os elementos de matriz da tranformação $R\mathbf{r}=\mathbf{r}'$ são aqueles dados em (4.7).*

**Exercício 43** *Mostre que a matriz de rotação $R(\alpha,\mathbf{n})$, com os elementos de matriz dados em (4.7), pode ser escrita também na forma*

$$R(\alpha,\mathbf{n})=e^{\alpha Z}=I+\operatorname{sen}(\alpha)\,Z+2\operatorname{sen}^2(\frac{1}{2}\alpha)\,Z^2,\quad Z=\begin{pmatrix}0&-n_3&n_2\\n_3&0&-n_1\\-n_2&n_1&0\end{pmatrix}. \tag{4.107}$$

*Note que $Z\mathbf{r}=\mathbf{n}\wedge\mathbf{r}$.*

**Exercício 44** *Substitua os elementos de matriz (4.7) na definição (4.9) para mostrar que* $\det R=1$.

**Exercício 45** *Efetue o produto $RR^T$ explicitamente, usando os elementos de matriz (4.7), para mostrar que $R^{-1}=R^T$. Mostre também que $R_{ik}(-\alpha,\mathbf{n})=R_{ki}(\alpha,\mathbf{n})$.*

**Exercício 46** *Use a construção de Euler-Rodrigues e mostre que i) o pólo $C$ permanece invariante perante a ação da rotação contida no pólo $B$ seguida da ação da rotação contida no pólo $A$; ii) ambas rotações $C$ e $AB$ (abuso de linguagem) levam o pólo $B$ para $B'$ (use a planilha "Euler-Rodrigues" para as devidas visualizações e operações.*

**Exercício 47** 1. *Mostre que lambda $=1$ e $\mathbf{\Lambda}=0$ representa a identidade.*

2. *Mostre que se* $R(\lambda_2, \mathbf{\Lambda}_2)$ *representa a inversa de* $R(\lambda_1, \mathbf{\Lambda}_1)$*, então* $\lambda_2 = \lambda_1$ *e* $\mathbf{\Lambda}_2 = -\mathbf{\Lambda}_1$*.*
3. *Discuta as condições para que duas rotações*

$$R(\lambda_{12}, \mathbf{\Lambda}_{12}) = R(\lambda_1, \mathbf{\Lambda}_1)R(\lambda_2, \mathbf{\Lambda}_2), \quad R(\lambda_{21}, \mathbf{\Lambda}_{21}) = R(\lambda_2, \mathbf{\Lambda}_2)R(\lambda_1, \mathbf{\Lambda}_1), \tag{4.108}$$

*comutem,* $R(\lambda_{12}, \mathbf{\Lambda}_{12}) = R(\lambda_{21}, \mathbf{\Lambda}_{21})$*. Em particular mostre que a composição de duas rotações de* $180°$ *em torno de eixos perpendiculares (rotações binárias) comutam. Mostre também que duas rotações axiais (mesmo eixo) comutam.*

**Exercício 48** *(a) Use a condição de ortogonalidade* $R^{-1} = R^T$ *para mostrar que o tensor* $\delta_{ij}$ *é invariante, isto é,*

$$\sum_{ij} \delta_{ij} R_{ir} R_{js} = \delta_{rs}. \tag{4.109}$$

*(b) Use o fato de que* $\det R = 1$ *e que* $6 = \sum_{lmn} \varepsilon_{lmn}\varepsilon_{lmn}$ *na definição (4.9) de um determinante* $3 \times 3$ *para mostrar que o tensor* $\varepsilon_{lmn}$ *é invariante,*

$$\sum_{ijk} \varepsilon_{ijk} R_{ir} R_{js} R_{kt} = \varepsilon_{rst}. \tag{4.110}$$

**Exercício 49** *Verifique que as derivadas em (4.26) estão corretas.*

**Exercício 50** *Verifique que as matrizes em (4.28) estão corretas.*

**Exercício 51** *Verifique que as matrizes (4.28) satiafzem as relações de comutação (4.30). Verifique também (sem usar as matrizes) que os geradores* $L_i$ *satisfazem a identidade de Jacobi (Carl Gustav Jacob Jacobi, 1804–1851),*

$$\big[A, [B, C]\big] + \big[C, [A, B]\big] + \big[B, [C, A]\big] = 0. \tag{4.111}$$

*Toda álgebra de Lie satisfaz a identidade de Jacobi.*

**Exercício 52** *Obtenha as matrizes da representação adjunta da álgebra so(3) na forma cartesiana com a base ordenada como* $\{L_1, L_2, L_3\}$ *e a definição (4.36). Verifique que estas matrizes são idênticas às matrizes (4.28).*

**Exercício 53** *Obtenha as matrizes (4.37) da representação adjunta da álgebra so(3) na forma canônica com a base ordenada como* $\{J_z, J_+, J_-\}$ *e a definição (4.36).*

**Exercício 54** *(a) use as matrizes (4.28) para calcular a forma de Killing (4.39). (b) Use esta forma de Killing para calcular o operador de Casimir (4.40) correspondente. Use cada elemento* $L_i$ *na sua forma abstrata, isto é, não represente os elementos* $L_i$ *pelas matrizes (4.28). (c) verifique que este operador de Casimir comuta com todos as elementos* $L_i$ *da álgebra so(3) (use apenas as relações de comutação (4.30)).*

**Exercício 55** *(a) use as matrizes (4.37) para calcular a forma de Killing (4.39). (b) Use esta forma de Killing para calcular o operador de Casimir (4.40) correspondente. No entanto, use cada elemento* $J_z$ *e* $J_\pm$ *na sua forma abstrata, isto é, não represente os elementos* $L_i$ *pelas matrizes (4.37), para verificar as formas dadas em (4.42). (c) verifique que este operador de Casimir comuta com todos as elementos* $J_z$ *e* $J_\pm$ *da álgebra so(3) (use apenas as relações de comutação (4.34)–(4.35)).*

**Exercício 56** *Use os elementos de matriz (4.57)–(4.58) para calcular as matrizes das representações* $j = 1/2$ *e* $j = 1$ *para os geradores na forma canônica. Obtenha também as respectivas matrizes para os geradores na forma cartesiana (hermitiana).*

**Exercício 57** *Calcule explicitamente a matriz* $\mathrm{d}^{1/2}(\theta) = \mathrm{e}^{-i\theta J_2}$*, com* $J_2$ *representado pela matriz dada em (4.61). Calcule também, seguindo a prescrição (4.65), a matriz de rotação* $R(\phi, \theta, \psi)$*.*

**Exercício 58** *Mostre o espinor* $|\xi'\rangle = U|\xi\rangle$*, modificado pela transformação unitária* $U$*, tem seu comprimento preservado, isto é,* $\langle\xi'|\xi'\rangle = \langle\xi|\xi\rangle$*.*

# Apêndice A

# Grupos de Transformações Lineares

## A.1 Introdução

Transformações lineares são muito importantes para várias áreas da Física. Esta importância é devida ao fato de transformações lineares formarem um grupo o qual é a linguagem matemática para o conceito de simetria em Física. Estaremos interessados aqui em três tipos especiais de transformações lineares: I) transformações ortogonais em espaços euclideanos, as quais formam o grupo das rotações espaciais; II) transformações ortogonais no espaço de Minkowski, as quais formam o grupo de Lorentz da Relatividade Especial; e III) transformações simplécticas no espaço de fase, as quais formam o grupo simpléctico da Mecânica Clássica. A importância de cada um desses grupos de simetria reside nos fatos seguintes: o grupo das rotações espaciais é de extrema importância para a teoria do momentum angular; o grupo de Lorentz é a base da Relatividade Especial de Einstein por conter as contrações de FitzGerald-Lorentz; e o grupo simpléctico contém as transformações canônicas, as quais são fundamentais para a dinâmica clássica.

Como transformações lineares atuam em algum espaço vetorial, precisaremos definir algumas quantidades básicas antes de definirmos transformações lineares. Inicialmente, faremos uso da noção abstrata de um espaço vetorial, sem nos preocupar com a realidade física desse espaço vetorial. Após a definição de uma transformação linear, daremos uma interpretação física ao espaço vetorial abstrato como sendo o espaço euclideano tridimensional, ou o espaço quadridimensional de Minkowski ou o espaço de fase do formalismo hamiltoniano.

Na Sec. A.2 introduziremos o conceito de transformações lineares e grupos como uma propriedade destas transformações. Aproveitaremos para introduzir também o conceito de métrica e de tensores. Na Sec. A.3 introduziremos o conceito de álgebras de Lie como propriedades de transformações infinitesimais e mostraremos a relação entre uma álgebra de Lie e um grupo de transformações lineares (denominado de grupo de Lie). Na Sec. A.4 apresentaremos três exemplos de transformações lineares importantes para a Física.

## A.2 Transformações lineares

Seja $V^n$ um espaço vetorial de dimensão $n$. Um exemplo típico é o conjunto dos números reais $\mathbb{R}$. Vamos denotar por $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ dois pontos (vetores) quaisquer de $V^n$. Uma aplicação em $V^n$ é uma regra que associa pontos de uma dada região de $V^n$ a pontos de uma outra região do mesmo espaço $V^n$ ou de um outro espaço. Por exemplo, uma função $F$ em $V^n$ é uma aplicação de $V^n$ no conjunto dos números reais:

$$F : V^n \to \mathbb{R}, \quad F(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}, \; \forall \mathbf{x} \in V^n. \tag{A.1}$$

Outro exemplo importante: uma curva real (forma paramétrica) $\gamma$ em $V^n$ é uma aplicação dos números reais $\mathbb{R}$ em $V^n$:

$$\gamma : \mathbb{R} \to V^n, \quad \gamma(t) \in V^n, \; \forall t \in \mathbb{R}. \tag{A.2}$$

De forma análoga, uma transformação linear $\mathcal{R}$ em $V^n$ é uma aplicação de $V^n$ em $V^n$,

$$\mathcal{R} : V^n \to V^n, \quad \mathcal{R}\mathbf{x} \in V^n, \; \forall \mathbf{x} \in V^n, \tag{A.3}$$

satisfazendo a seguinte regra (linearidade):

$$\mathcal{R}(\mathbf{x}+\lambda\mathbf{y}) = \mathcal{R}\mathbf{x}+\lambda\mathcal{R}\mathbf{y}, \quad \forall \mathbf{x},\mathbf{y}\in V^n, \quad \forall\lambda\in\mathbb{R}. \tag{A.4}$$

Em geral podemos representar uma transformação linear dada por matrizes. Estas matrizes são obtidas mediante à seguinte prescrição. Desde que qualquer vetor $\mathbf{x}$ em $V^n$ pode ser escrito como uma combinação linear dos vetores $\mathbf{e}_i$ de uma determinada base,

$$\mathbf{x} = (x^1,\cdots,x^n) = \sum_{i=1}^{n} x^i \mathbf{e}_i,\ x^i\in\mathbb{R}, \tag{A.5}$$

então podemos escrever a ação de uma transformação linear numa forma matricial. Para tal, precisamos conhecer a ação da transformação linear em cada vetor $\mathbf{e}_i$. A ação de uma transformação linear $\mathcal{R}$ em $\mathbf{e}_i$ será um outro vetor $\mathbf{e}'_i = \mathcal{R}\mathbf{e}_i$ em $V^n$,[1] cujas componentes vamos denotar por $R^i{}_j$:

$$\mathbf{e}'_i = \mathcal{R}\mathbf{e}_i = \sum_{j=1}^{n} R^j{}_i \mathbf{e}_j,\ R^j{}_i\in\mathbb{R}. \tag{A.6}$$

Assim, podemos representar a ação de uma transformação linear $\mathcal{R}$ por uma matriz $R$ cujos elementos de matriz são $R^i{}_j$, com $i$ denotando as posições das linhas e $j$ as posições das colunas. Note o posicionamento dos índices tanto na vertical (o índice $i$ está à esquerda de $j$) quanto na horizontal (o índice $i$ está acima de $j$). Veremos que está notação é muito mais conveniente que a notação usual. Portanto, em relação a algum sistema de coordenadas, a ação de uma transformação linear em um vetor arbitrário pode ser escrita como:

$$\mathbf{y} = \sum_{k=1}^{n} y^k\mathbf{e}_k = \mathcal{R}\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} x^i\mathcal{R}\mathbf{e}_i = \sum_{i,k} x^i R^k{}_i \mathbf{e}_k. \tag{A.7}$$

Conseqüentemente, as novas componentes de $\mathbf{x}$ transformam como:

$$y^k = \sum_{i=1}^{n} R^k{}_i x^i. \tag{A.8}$$

Note que as componentes $y^k$ e os vetores de base $\mathbf{e}_k$ transformam-se de formas distintas, pois a soma em (A.6) e (A.8) envolve as linhas e colunas, respectivamente, da matriz da transformação. Qualquer quantidade (vetor, tensor, etc.) cujas componentes transformam como os vetores de base, isto é, como em (A.6), elas são denominadas de covariantes. Quando tais componentes transformam como em (A.8), elas são denominadas de contravariantes.

### A.2.1 Grupos de Lie

Dada uma transformação linear $\mathcal{R}$, $\mathbf{y} = \mathcal{R}\mathbf{x}$, podemos definir uma outra transformação linear $\mathcal{R}^{-1}$ como sendo a transformação oposta a $\mathcal{R}$: $\mathbf{x} = \mathcal{R}^{-1}\mathbf{y}$. Esta transformação $\mathcal{R}^{-1}$ é denominada de inversa. Em termos matriciais, podemos ver de (A.8) que a condição $\det R \neq 0$ deve ser verificada para garantir a existência da transformação linear inversa. A sua matriz correspondente é a matriz inversa $R^{-1}$. Ao contrário da inversa que depende de uma condição envolvendo o determinante da matriz correspondente, a transformação linear identidade $\mathcal{I}$ sempre existe. A identidade é a aplicação trivial: $\mathcal{I}\mathbf{x} = \mathbf{x}$, $\forall\mathbf{x}\in V^n$. A sua matriz correspondente é a matriz identidade $I$. Seja $G = \{I, R, S, T, \ldots\}$ o conjunto das transformações lineares invertíveis contendo a identidade. Podemos usar a composição $\mathcal{R}\circ\mathcal{S}$ entre aplicações, ou o produto matricial usual $RS$, para definir um "produto" entre duas transformações com a finalidade de produzir uma terceira transformação. Então os elementos desse conjunto, munidos de um produto entre eles, satisfazem as seguintes propriedades:

$$\text{Fechamento:}\quad RS\in G,\ \forall R,S\in G; \tag{A.9}$$

$$\text{Identidade:}\quad IR = RI = R,\ \forall R\in G; \tag{A.10}$$

$$\text{Inversibilidade:}\quad R^{-1}R = RR^{-1} = I,\ \forall R\in G; \tag{A.11}$$

$$\text{Associatividade:}\quad (RS)T = R(ST),\ \forall R,S,T\in G. \tag{A.12}$$

[1] Estamos adotando o ponto de vista em que a base permanece inalterada e o os vetores são alterados.

Qualquer conjunto satisfazendo estas quatro condições, em relação a algum "produto" previamente definido, é denominado de grupo. O "produto" entre os elementos de um grupo é uma operação envolvendo dois elementos do grupo. Como resultado desta operação binária, um outro elemento do grupo é criado. Em muitos exemplos de grupos, o "produto" não é simplesmente o produto usual. É importante frisar que um grupo está definido apenas quando esta operação binária entre seus elementos estiver definida. Por exemplo, o conjunto dos números inteiros (positivos e negativos, incluindo o zero) forma um grupo em relação à operação binária definida pela adição, porém este mesmo conjunto não forma um grupo em relação à multiplicação com a presença do zero.

A teoria dos grupos é uma área da matemática muito bem desenvolvida. Isto significa que a teoria dos grupos estabelece muitas propriedades gerais e abstratas sobre os elementos de um grupo. Rotações espaciais e transformações de Lorentz são exemplos típicos de grupos como estruturas matemáticas de relevância para a Física. Em geral, transformações lineares de coordenadas tendem a modificar a forma de certas quantidades físicas. No entanto, algumas transformações particulares podem deixar certas operações ou quantidades inalteradas. Neste caso, dizemos que tais quantidades ou operações admitem um determinado grupo de simetria. Por exemplo, as transformações de Lorentz deixam a operação de contração (ou o módulo de um vetor) no espaço-tempo invariante.

Um grupo pode conter uma quantidade finita ou infinita de elementos. Por exemplo, todas as operações de simetria de um triângulo eqüilátero formam um grupo finito (também denominado de grupo discreto), isto é, um grupo com uma quantidade finita de elementos:

$$C_{3v} = \{I, C_3, C_3^2, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}. \tag{A.13}$$

A transformação identidade está representada por $I$. Há duas rotações em torno do eixo perpendicular ao plano do triângulo que passa pelo baricentro, uma de 120° ($C_3$) e outra de 240° ($C_3^2$). As três transformações restantes $\sigma_i$ são reflexões por espelhos perpendiculares ao plano do triângulo e contendo o baricentro e um dos três vértices. Este grupo $C_{3v}$ é o grupo de simetria de um triângulo eqüilátero. Grupos finitos são muito importantes em Física do Estado Sólido e Física Molecular.

Em geral, os elementos de um grupo finito são transformações por quantidades finitas e discretas. No entanto, podemos ter também grupos formados por transformações contínuas, denominados de grupos contínuos. Qualquer grupo contínuo possui infinitos elementos. Por exemplo, o conjunto infinito das rotações,

$$R(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\operatorname{sen}(\alpha) & 0 \\ \operatorname{sen}(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \det R(\alpha) = 1. \tag{A.14}$$

por um ângulo $0 \leq \alpha < 2\pi$ em torno do eixo $z$, perpendicular ao plano $x-y$, forma um grupo contínuo. Para cada valor do parâmetro $0 \leq \alpha < 2\pi$, há uma única rotação $R(\alpha)$ e a sua inversa $R^{-1}(\alpha) = R(-\alpha) = R^{\mathrm{T}}(\alpha)$. A identidade é obtida quando $\alpha = 0$ (ou em $\alpha = 2\pi$). A rotação inversa de $R(\alpha)$ pode ser escrita concisamente como a rotação $R(-\alpha)$, isto é, como uma rotação no sentido contrário da rotação $R(\alpha)$. Também pode ser verificado diretamente que o produto matricial entre duas rotações $R(\alpha)$ e $R(\beta)$ é outra rotação $R(\gamma)$, com $\gamma = \alpha + \beta$. Observe que o parâmetro novo $\gamma$ é uma função analítica dos parâmetros antigos $\alpha$ e $\beta$. Vejamos a ação deste grupo nos vetores espaciais $\mathbf{r} = (x, y, z)$:

$$\mathbf{r}' = R(\alpha)\,\mathbf{r} \Rightarrow \begin{aligned} x' &= x\cos(\alpha) - y\operatorname{sen}(\alpha), \\ y' &= x\operatorname{sen}(\alpha) + y\cos(\alpha), \\ z' &= z. \end{aligned} \tag{A.15}$$

Desta forma, podemos interpretar a ação da rotação $R(\alpha)$ no vetor $\mathbf{r}$ como o movimento do ponto $(x, y, z)$ sobre uma curva $C(\alpha)$, que é uma circunferência de raio $\sqrt{x^2 + y^2}$ centrada na origem a uma altura $z$ do plano $x - y$, descrita parametricamente pelas duas primeiras equações em (A.15). Portanto, a curva $C(\alpha)$ é o lugar geométrico da transformação $R(\alpha)$ agindo no vetor $\mathbf{r}$ e isto não altera o seu módulo. Assim, o módulo de um vetor espacial é uma quantidade invariante por rotações.

Estaremos interessados aqui nos grupos contínuos de transformações lineares. Em geral, os elementos de um grupo contínuo $G$ dependem de um certo número $r$ de parâmetros reais $\{a^1, \cdots, a^r\}$. Um grupo contínuo com uma dependência analítica em seus parâmetros é denominado de **grupo de Lie**.[2] Esta dependência analítica nos parâmetros $a^\alpha$, $\alpha = 1, \ldots, r$, deve ser entendida da seguinte forma. Dados dois elementos $R(a)$ e $R(b)$ de um grupo de Lie $G$, então o elemento $R(c) = R(a)R(b)$ depende analiticamente dos parâmetros $a$ e $b$, isto é, $c = f(a, b)$ é uma função analítica. Iremos aqui distinguir os grupos de Lie, relacionados com rotações espaciais no espaço euclideano, rotações no espaço-tempo e o grupo das transformações simplécticas no espaço de fase, identificando quantidades invariantes a estas transformações lineares.

### A.2.2 Tensores

Consideremos uma função real bilinear $\Phi$ em $V^n \times V^n$ (produto cartesiano) definida por

$$\Phi : V^n \times V^n \to \mathbb{R}, \quad \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}, \ \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V^n, \tag{A.16}$$

tal que

$$\begin{aligned} &\Phi(\mathbf{x} + a\mathbf{y}, \mathbf{z}) = \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + a\Phi(\mathbf{y}, \mathbf{z}), \\ &\Phi(\mathbf{z}, \mathbf{x} + a\mathbf{y}) = \Phi(\mathbf{z}, \mathbf{x}) + a\Phi(\mathbf{z}, \mathbf{y}), \ \forall \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in V^n, \ \forall a \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{A.17}$$

Esta função $\Phi$ é denominada também de **forma bilinear** em $V^n$. Vale observar que uma forma quadrática bilinear qualquer sempre pode ser escrita como a soma de uma forma simétrica $\Phi_+$,

$$\Phi_+(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{2}\big(\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})\big), \quad \Phi_+(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = \Phi_+(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \tag{A.18}$$

e outra anti-simétrica $\Phi_-$,

$$\Phi_-(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{2}\big(\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})\big), \quad \Phi_-(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = -\Phi_-(\mathbf{x}, \mathbf{y}). \tag{A.19}$$

De fato, das duas equações anteriores, temos

$$\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \Phi_+(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \Phi_-(\mathbf{x}, \mathbf{y}). \tag{A.20}$$

Veremos que a definição de uma forma bilinear coincide com a nossa noção intuitiva de produto escalar entre vetores no espaço euclideano tridimensional. Em termos de coordenadas, a definição (A.16) pode ser reescrita como:

$$\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i,k} x^i y^k \Phi(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_k) = \sum_{i,k} g_{ik} x^i y^k, \quad g_{ik} = \Phi(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_k). \tag{A.21}$$

Os números reais $\Phi(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_k)$ podem ser agrupados em uma matriz $(g_{ik})$, a qual é denominada de **métrica** em $V^n$. Quando a métrica $(g_{ik})$, associada com uma dada forma bilinear $\Phi$, possuir uma inversa, a inversa será denotada por $(g^{ik})$,

$$\sum_{k=1}^{n} g_{jk} g^{ki} = \sum_{k=1}^{n} g^{ik} g_{kj} = \delta^i_j. \tag{A.22}$$

A métrica contém informações sobre as orientações relativas entre os vetores de uma determinada base. Um espaço vetorial equipado com uma métrica é um **espaço métrico**. A métrica é a quantidade que caracteriza um espaço métrico de forma única. Quando falamos de um espaço euclideano, ou de um espaço de Minkowski, temos sempre em mente uma métrica específica para cada um desses espaços.

Uma métrica nos permite reescrever as componentes de vetores em $V^n$ numa forma alternativa. As componentes $x^k$ são denominadas de **contravariantes**. A outra possibilidade é:

$$x_k = \sum_{i=1}^{n} g_{ki} x^i = g_{ki} x^i \ (\text{soma implícita em } i), \quad x^k = g^{ki} x_i \ (\text{soma implícita em } i). \tag{A.23}$$

[2] Os grupos de Lie e suas álgebras associadas foram descobertos por Marius Sophus Lie (1842–1899) e, independentemente, por Wilhelm Karl Joseph Killing (1847–1923). Lie estava estudando técnicas para encontrar soluções de equações diferenciais por quadraturas via transformações lineares. Este trabalho foi inspirado nos trabalhos de Evariste Galois (1811–1832) quem inventou (ou descobriu) a noção de grupo.

As componentes $x_k$ são denominadas de covariantes. As componentes covariantes são de grande valia para o formalismo em si. Por exemplo, fazendo uso das componentes covariantes definidas em (A.23), podemos reescrever concisamente a forma bilinear em (A.21) como:

$$\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x^k y_k \text{ (soma implícita em } k). \tag{A.24}$$

Estamos usando, desde (A.23), a convenção de soma implícita. Nesta convenção, sempre omitiremos o símbolo de soma quando há uma soma envolvendo índices covariante e contravariante. Este tipo de soma envolvendo um índice contravariante e um índice covariante é também denominada de contração. Veremos que a contração (A.24) coincide com a nossa maneira usual de calcular o produto escalar entre os vetores $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ no espaço euclideano tridimensional.

Tendo definido em (A.21) um processo de medida pela métrica $g_{ik}$, podemos especificar os diferentes grupos de simetria formados por transformações lineares que deixam a forma bilinear (A.24) invariante. Seja $(R^k{}_i)$ a matriz de uma transformações linear $\mathcal{R}$. Então,

$$x^k = R^k{}_i u^i, \quad y^k = R^k{}_i v^i. \tag{A.25}$$

Usando (A.24), teremos:

$$\begin{aligned} \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= x^k y_k = g_{kl} x^k y^l = g_{kl} R^k{}_i R^l{}_j u^i v^j \\ \Phi(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= u^i v_i = g_{ij} u^i v^j. \end{aligned} \tag{A.26}$$

Requerendo que $\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \Phi(\mathbf{u}, \mathbf{v})$, podemos concluir que os elementos de matriz da transformação linear $\mathcal{R}$ devem satisfazer as seguintes relações quadráticas:

$$g_{kl} R^k{}_i R^l{}_j = g_{ij}. \tag{A.27}$$

Podemos ver que as componentes $g_{kl}$ da métrica transformam-se como os vetores de base em (A.6). Portanto, elas são componentes covariantes. A quantidade das relações (A.27) depende apenas das propriedades da métrica (simétrica, anti-simétrica, simpléctica, etc.). Calculando o determinante nos dois lados de (A.27), teremos:

$$(\det R)^2 = 1. \tag{A.28}$$

Vemos então que o determinante de qualquer transformação linear preservando a forma bilinear (A.24) tem de ter módulo unitário ($\pm 1$). Em geral, temos de escolher as transformações com $\det R = 1$, pois a identidade tem determinante igual a um e ela é necessária para a formação de um grupo. No entanto as demais transformações com determinante negativo também são importantes em Física por estarem associadas a inversões espaciais e temporais. As relações (A.27) podem também ser escritas em termos dos elementos de matriz $(R^{-1})^k{}_i$ da transformação inversa:

$$g_{kl} = (R^{-1})^i{}_k (R^{-1})^j{}_l g_{ij}. \tag{A.29}$$

De qualquer uma destas relações quadráticas, podemos calcular facilmente os elementos de matriz da transformação inversa:

$$(R^{-1})^i{}_j = g_{jk} R^k{}_l g^{li} = R_j{}^i. \tag{A.30}$$

Portanto, qualquer transformação linear que deixa a forma bilinear (A.24) invariante deve satisfazer as relações quadráticas (A.27) ou, equivalentemente, (A.29). Neste caso, a matriz da transformação inversa é calculada facilmente por (A.30), tendo a forma explícita da métrica.

Usando a definição (A.23), podemos ver de (A.8) que as componentes covariantes $x_k$ transformam-se com a matriz inversa:

$$y_k = (R^{-1})^i{}_k x_i. \tag{A.31}$$

Esta é a mesma forma de transformação dos vetores de base definida em (A.6). Portanto, quando as componentes contravariantes de um vetor são modificadas pela ação de uma dada transformação linear, as componentes covariantes do mesmo vetor são modificadas pela transformação linear inversa.

Há muitas quantidades matemáticas de interesse físico que precisam de mais de dois índices para serem especificadas completamente. Em geral, as componentes de tais quantidades são funções em $V^n$. Neste caso, uma transformação linear pode alterar a forma destas quantidades de maneira imprevisível. No entanto, existe uma classe formada por quantidades cujas componentes mudam da mesma forma que as componentes (contravariantes, (A.8), e covariantes, (A.31)) dos vetores em $V^n$. Estas quantidades especiais são denominadas de tensores. Note que a definição de tensores apresentada aqui depende da existência de um grupo de transformações lineares. Os tensores, por exibirem estas propriedades são candidatos naturais a serem utilizados em qualquer modelo físico. A quantidade de índices (ou entradas) disponíveis em um tensor é denominada de ordem do tensor. Assim, um escalar é um tensor de ordem zero, um vetor é um tensor de ordem um, uma matriz é um tensor de ordem dois, etc. Por exemplo, dado que a quantidade $T^i{}_k$ é um tensor de ordem dois, então sabemos exatamente como suas componentes modificam-se mediante uma transformação linear $R$:

$$T^i{}_k \to R^i{}_j (R^{-1})^l{}_k T^j{}_l. \tag{A.32}$$

Portanto, a Eq. (A.29) mostra que a métrica é um tensor covariante de ordem dois. A Eq. (A.29) também nos diz que a métrica é uma quantidade invariante, pois suas componentes são as mesmas, antes e depois da transformação. Naturalmente, isto é equivalente a dizer que a forma bilinear correspondente é invariante à transformação dada.

## A.3 Transformações infinitesimais

Sophus Lie mostrou que uma transformação finita (quando os parâmetros da transformação variam em um intervalo finito) pode ser "gerada" por sucessivas transformações infinitesimais (quando os parâmetros da transformação variam infinitesimalmente). Seja $R(a)$ um elemento de um grupo de Lie $G$. Podemos re-definir os parâmetros $a^\alpha$, $\alpha = 1, \dots, r$, de modo a obter o elemento identidade $I$ quando todos os parâmetros forem nulos,

$$I = R(a)\big|_{a=0}. \tag{A.33}$$

Vamos considerar aqui os elementos do grupo na vizinhança da identidade, $a \to 0$. Neste caso, podemos expandir o elemento $R(a)$ em série de Taylor em torno da identidade,

$$R(a) = I + \sum_{\alpha=1}^{r} a^\alpha L_\alpha + \mathcal{O}(a^2), \quad L_\alpha = \frac{\partial R}{\partial a^\alpha}\bigg|_{a=0}. \tag{A.34}$$

Na maioria dos casos, o raio de convergência desta expansão é suficiente para estudarmos a maioria das propriedades globais (isto é, longe da identidade, em contraste com as propriedades infinitesimais definidas em torno da identidade) de um dado grupo de Lie através da relação exponencial

$$R(a) = \exp\Big(\sum_{\alpha=1}^{r} a^\alpha L_\alpha\Big), \quad \mathrm{e}^{L_\alpha} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{L_\alpha^k}{k!}. \tag{A.35}$$

Note que esta relação exponencial tem a mesma expansão (A.34) em torno da identidade. As $r$ quantidades $L_\alpha$, linearmente independentes, são os geradores do grupo. Estes geradores formam uma base para uma álgebra [3] definida em relação ao produto de Lie:

$$[L_\alpha, L_\beta] = L_\alpha \cdot L_\beta - L_\beta \cdot L_\alpha = \sum_{\gamma=1}^{r} C^\gamma{}_{\alpha\beta} L_\gamma, \; C^\gamma{}_{\alpha\beta} \in \mathbb{R}. \tag{A.36}$$

Esta álgebra é denominada de álgebra de Lie associada ao grupo de Lie. Assim, conhecendo as propriedades de um conjunto finito de geradores, podemos conhecer quase todas as propriedades globais dos elementos do grupo associado (um grupo infinito). A dimensão da álgebra de Lie é igual ao número de parâmetros do grupo de Lie correspondente. As constantes $C^\gamma{}_{\alpha\beta}$ em (A.36) são as constantes de estrutura da álgebra. A menos de uma transformação linear constante, as constantes de estrutura são as "impressões digitais" de

[3] Uma álgebra é um espaço vetorial dotado de um "produto" entre seus elementos cujo resultado é outro elemento deste mesmo espaço vetorial. Fazendo uso da linguagem de aplicações introduzida anteriormente, este produto é uma aplicação $*$ tal que $* : V \times V \to V$. Quando o produto $*$ for bilinear, então a álgebra correspondente é denominada de álgebra linear.

uma álgebra de Lie. Duas álgebras serão isomórficas quando tiverem as mesmas constantes de estrutura (ou quando as constantes de estrutura de uma álgebra puderem ser transformadas nas constantes de estrutura da outra álgebra).

O produto de Lie definido em (A.36) possui três propriedades fundamentais: I) o produto de Lie é anti-simétrico,

$$[L_\alpha, L_\beta] = -[L_\beta, L_\alpha]; \tag{A.37}$$

II) ele é bilinear,

$$[L_\alpha, L_\beta + aL_\gamma] = [L_\alpha, L_\beta] + a[L_\alpha, L_\gamma]; \tag{A.38}$$

III) ele satisfaz a identidade de Jacobi,

$$\big[L_\alpha, [L_\beta, L_\gamma]\big] + \big[L_\gamma, [L_\alpha, L_\beta]\big] + \big[L_\beta, [L_\gamma, L_\alpha]\big] = 0. \tag{A.39}$$

Estas propriedades definem uma álgebra de Lie. Vimos que podemos representar transformações lineares por matrizes em um espaço de dimensão finita. Assim, da expansão de Taylor dos elementos de um grupo de Lie em torno da identidade, Eq. (A.34), e das relações quadráticas (A.27), podemos calcular as condições nos elementos de matriz dos geradores $(L_\alpha)^i{}_k$, impostas pela condição da métrica ser invariante:

$$g_{ij} = \left[\delta_i^k + \sum_{\alpha=1}^{r} a^\alpha (L_\alpha)^k{}_i\right]\left[\delta_j^l + \sum_{\alpha=1}^{r} a^\alpha (L_\alpha)^l{}_j\right] g_{kl} \;\Rightarrow\; (L_\alpha)^k{}_l g_{ik} + (L_\alpha)^k{}_i g_{kl} = 0. \tag{A.40}$$

Estas relações implicam que estas matrizes dos geradores possuem traço nulo:

$$(L_\alpha)^k{}_l g_{ik} + (L_\alpha)^k{}_i g_{kl} = 0 \;\Rightarrow\; (L_\alpha)^k{}_k = 0. \tag{A.41}$$

Isto está condizente com a relação exponencial (A.35), pois

$$\det R(a) = \exp\Big(\sum_{\alpha=1}^{r} a^\alpha \, \mathrm{tr} L_\alpha\Big) = 1, \quad \mathrm{tr} L_\alpha = (L_\alpha)^k{}_k = 0. \tag{A.42}$$

## A.4 Transformações especiais

### A.4.1 Transformações ortogonais

As transformações ortogonais são transformações lineares reais no espaço euclideano $V^n = R^n$, de dimensão $n$, que preservam a métrica euclideana, cujos elementos de matriz são[4]

$$g_{ik} = \delta_{ik}. \tag{A.43}$$

Esta métrica é simétrica. Para $n = 3$, temos o espaço tridimensional usual. Sendo o tensor métrico igual à identidade, a definição (A.21) de uma forma bilinear coincide com a definição usual de produto escalar:

$$\Phi(R\mathbf{x}, R\mathbf{x}) = \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = \mathbf{x}^2 = \sum_{k=1}^{n} x_k^2. \tag{A.44}$$

Em um espaço euclideano, as componentes covariantes identificam-se com as componentes contravariantes. Assim, não há necessidade de observarmos a posição de índices covariantes e contravariantes em qualquer quantidade tensorial.

A condição de invariabilidade da métrica euclideana, expressa nas relações quadráticas (A.27), fornece $n(n+1)/2$ relações de vínculos entre os elementos de matriz $R_{ik}$ de uma transformação ortogonal. Portanto, apenas $n(n-1)/2$ elementos de matriz $R_{ki}$ são independentes. Isto significa que o grupo ortogonal, formado pelas transformações ortogonais, possui $n(n-1)/2$ geradores $L_\alpha$, $\alpha = 1, \ldots, n(n-1)/2$. Os elementos de matriz destes geradores devem satisfazer a relação de anti-simetria,

$$(L_\alpha)_{ik} = -(L_\alpha)_{ki}, \tag{A.45}$$

[4] A métrica em um espaço euclideano pode sempre ser transformada numa métrica proporcional à identidade. Isto significa que qualquer base pode ser ortonormalizada.

proveniente de (A.40) e da simetria da métrica euclideana (A.43). Desta forma, a condição de ortogonalidade nos elementos do grupo corresponde à condição de anti-simetria nos elementos da álgebra correspondente. Os elementos de matriz da transformação ortogonal inversa podem ser calculados facilmente usando (A.30),

$$(R^{-1})_{ik} = R_{ki}. \tag{A.46}$$

Isto significa que a matriz inversa de uma transformação ortogonal é calculada simplesmente realizando uma operação de transposição real.

Na teoria dos grupos de Lie, o grupo ortogonal é denotado por SO($n$) e a álgebra correspondente por so($n$). A letra "S" significa que as matrizes que representam os elementos do grupo possuem determinante igual a um (traço nulo na álgebra). O grupo SO(3) é fundamental para a teoria do momentum angular em Física. Este grupo é o grupo formado pelas rotações espaciais, quando estas são vistas como transformações lineares no espaço tridimensional. Portanto, ele é também um subgrupo do grupo de Lorentz. A álgebra associada, so(3), é a álgebra formada pelas componentes do momentum angular. O grupo SO(3) também é muito importante em Métodos Matemáticos para a Física, pois os elementos de matriz são as funções especiais de Legendre e todas as propriedades destas funções podem ser vistas como conseqüência direta das propriedades dos grupos de Lie aplicadas ao grupo SO(3).

### A.4.2 Transformações de Lorentz

As transformações de Lorentz são transformações lineares reais no espaço-tempo $V^n = M^4$, de dimensão $n = 4$, que preservam a métrica (simétrica) de Minkowski, cujos elementos de matriz são

$$(g_{\mu\nu}) = (g^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mu, \nu = 0, 1, 2, 3. \tag{A.47}$$

A condição de invariabilidade da métrica de Minkowski, expressa nas relações quadráticas (A.27), fornece $4(4+1)/2 = 10$ relações de vínculos entre os elementos de matriz $\Lambda^\mu{}_\nu$ de uma transformação de Lorentz. Portanto, apenas seis elementos de matriz são independentes. Isto significa que o grupo de Lorentz, formado pelas transformações de Lorentz, possui seis geradores $L_k$, $k = 1, \ldots, 6$. Os elementos de matriz destes geradores devem satisfazer a relação de anti-simetria,

$$(L_k)_{\mu\nu} = -(L_k)_{\nu\mu}, \tag{A.48}$$

proveniente de (A.40) e da simetria da métrica de Minkowski (A.47). Os elementos de matriz da transformação de Lorentz inversa podem ser calculados facilmente usando (A.30),

$$(\Lambda^{-1})^\alpha{}_\beta = g^{\alpha\mu} g_{\beta\nu} \Lambda^\nu{}_\mu = \Lambda_\beta{}^\alpha. \tag{A.49}$$

Na teoria dos grupos de Lie, o grupo de Lorentz é denotado por SO(1,3) e a álgebra correspondente por so(1,3). A letra "S" significa que as matrizes que representam os elementos do grupo possuem determinante igual a um (traço nulo na álgebra). O grupo SO(1,3) é fundamental para a teoria da relatividade especial de Einstein.

### A.4.3 Transformações simplécticas

As transformações simplécticas são transformações lineares reais no espaço de fase $V^{2n}$, de dimensão $2n$, que preservam a métrica simpléctica, cujos elementos de matriz são

$$\zeta^{\mu\nu} = -\zeta^{\nu\mu} = \begin{cases} 1 & \text{se } \mu \le n \text{ e } \nu = n+\mu, \\ -1 & \text{se } \nu \le n \text{ e } \mu = n+\nu, \\ 0 & \text{todos os demais casos;} \end{cases} \qquad \zeta_{\mu\nu} = -\zeta_{\nu\mu} = \begin{cases} -1 & \text{se } \mu \le n \text{ e } \nu = n+\mu, \\ 1 & \text{se } \nu \le n \text{ e } \mu = n+\nu, \\ 0 & \text{todos os demais casos.} \end{cases} \tag{A.50}$$

Esta métrica é anti-simétrica. Como conseqüência desta anti-simetria, a forma bilinear (A.21) é sempre nula quando $\mathbf{x} = \mathbf{y}$,

$$\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 0, \ \forall\, \mathbf{x} \in V^{2n}. \tag{A.51}$$

A condição de invariabilidade da métrica simpléctica, expressa nas relações quadráticas (A.27), fornece $n(2n-1)$ relações de vínculos entre os elementos de matriz $R^{\mu}{}_{\nu}$ de uma transformação simpléctica. Portanto, apenas $n(2n+1)$ elementos de matriz $R^{\mu}{}_{\nu}$ são independentes. Isto significa que o grupo simpléctico possui $n(2n+1)$ geradores $L_k$, $k = 1, \ldots, n(2n+1)$. Os elementos de matriz destes geradores devem satisfazer a relação de simetria,

$$(L_k)_{\mu\nu} = (L_k)_{\nu\mu}, \tag{A.52}$$

proveniente de (A.40) e da anti-simetria da métrica simpléctica (A.50). Os elementos de matriz da transformação simpléctica inversa podem ser calculados facilmente usando (A.30),

$$(R^{-1})^{\mu}{}_{\nu} = \zeta^{\mu\beta}\zeta_{\alpha\nu}R^{\alpha}{}_{\beta} = -R_{\nu}{}^{\mu}. \tag{A.53}$$

Na teoria dos grupos de Lie, o grupo simpléctico é denotado por $\mathrm{Sp}(2n)$ e a álgebra correspondente por $\mathrm{sp}(2n)$. A letra "S" significa que as matrizes que representam os elementos do grupo possuem determinante igual a um (traço nulo na álgebra). O grupo $\mathrm{Sp}(2n)$ é fundamental para o formalismo hamiltoniano, pois as transformações canônicas no espaço de fase formam, naturalmente, um grupo.

# Bibliografia


[1] Simon L. Altmann. *Rotations, Quaternions, and Double Groups.* Dover, 2005.

[2] Wu-Ki Tung. *Group Theory in Physics.* World Scientific, 1985.

[3] H. Goldstein. *Classical Mechanics.* Addson-Wesley, 1980.

[4] Jin-Quan Chen Jialun Ping and Fan Wang *Group Representation Theory for Physicists.* World Scientific, 2002.

[5] M. Hamermesh. *Group Theory and its Application to Physical Problems.* Addison-Wesley, 1962.

[6] R. Enderlein and N. J. M. Horing. *Fundamentals of Semiconductor Physics and Devices.* World Scientific, 1997.

[7] L. A. B. San Martin. *Álgebras de Lie.* Ed. da Unicamp, 1999.

[8] F. Iachello. *Lie Algebras and Applications.* Springer, 2006.

[9] J. E. M. Hornos, Y. M. M. Hornos and M. Forger. *Symmetry and Symmetry Breaking: an Algebraic Approach to the Genetic Code.* Int. J. Mod. Phys. B, 13(23), 2795-2885 (1999).

[10] E. Bernardes. *Killing – An Algebraic Computational Package for Lie Algebras.* Comp. Phys. Commun. 130, 137-175 (2000).