ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

PME-3211 - Mecânica dos Sólidos II

5^a Lista de Exercícios

1) Em grande parte dos casos, o estado de tensão em um ponto de um elemento de máquina é tal que pelo menos uma das direções principais de tensão já é conhecida (lembre que se a superfície externa de um dado elemento de máquina estiver descarregada, ou seja, se não houver esforços distribuídos aplicados sobre a superfície, então a própria normal externa à superfície constitui, em cada ponto do sólido, uma das direções principais de tensão no ponto). Nestes casos, o estado de tensão no ponto analisado pode ser representado, por exemplo, através do seguinte elemento:

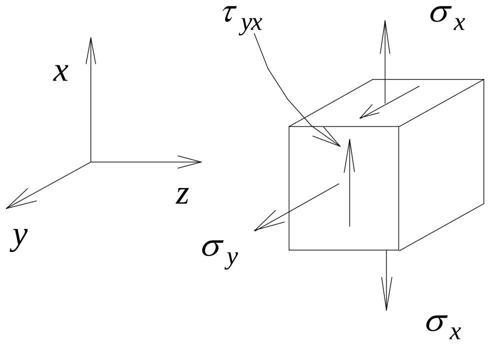


Figura 1

Deve-se notar que:

- todas as tensões indicadas no elemento estão atuando nos sentidos considerados positivos, segundo a convenção utilizada no curso;
- a direção dada pela normal $\vec{n} = (0{,}0{,}1) = \vec{e}_z$ já é uma direção principal de tensão (pois na face correspondente não atua nenhuma tensão cisalhante). A tensão principal correspondente à esta direção vale, neste caso, $\sigma\ = 0$;
- as outras duas tensões principais serão obtidas através de uma "rotação" do elemento indicado acima em torno da direção principal já encontrada, i.é., em torno do eixo z (estamos admitindo que as três tensões principais tenham valores distintos).

<u>Tarefa</u>: Determine o tensor das tensões para o estado de tensões dado acima (utilize a base $b = (\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ indicada) e mostre, através do cálculo dos auto-valores do tensor obtido, que as duas outras tensões principais são obtidas através das seguintes fórmulas largamente empregadas nos livros de resistência dos materiais e de elementos de construção de máquinas:

$$\begin{aligned} \sigma' &= \frac{(\sigma_x + \sigma_y)}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + (\tau_{xy})^2} \\ \sigma'' &= \frac{(\sigma_x + \sigma_y)}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + (\tau_{xy})^2} \end{aligned} \qquad (1)$$

Obs: Deve-se ressaltar que os <u>resultados acima são gerais</u> (isto é, valem para quaisquer valores de σ_x, σ_y e τ_{xy}, sejam eles positivos, negativos ou nulos). Os resultados também são válidos se a tensão principal correspondente à direção principal $\vec{e}_z$ for diferente de zero.

2) Seja o estado de tensões dado pelo elemento abaixo:

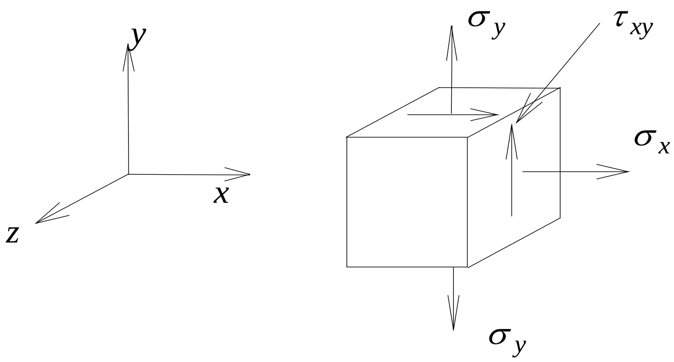


Figura 2

Tarefa: Mostre que se girarmos este elemento de um dado ângulo θ (digamos, no sentido anti-horário) em torno da direção principal de tensão $\vec{n} = (0,0,1) = \vec{e}_z$, as componentes de tensão que irão surgir no novo elemento (com faces paralelas aos novos eixos x' e y' , conforme ilustra a figura 3 abaixo) serão dadas por:

$$\sigma_{x'} = \left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right) + \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right).\cos(2\theta) + (\tau_{xy}).sin(2\theta)$$

$$\sigma_{y'} = \left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right) - \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right).\cos(2\theta) - (\tau_{xy}).sin(2\theta) \tag{2}$$

$$\tau_{x'y'} = -\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right).sin(2\theta) + (\tau_{xy}).\cos(2\theta)$$

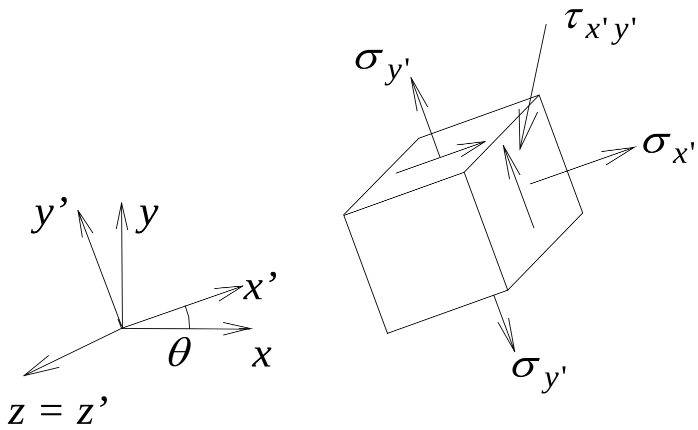


Figura 3

Sugestão: Escreva o tensor das tensões para o ponto em questão com relação à base antiga $b = (\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ e determine as componentes do vetor tensão ($\vec{\rho} = T[\vec{n}]$) para as faces cujas normais externas têm as direções dos novos versores $\vec{e}_{x'}$ e $\vec{e}_{y'}$ (não esqueça que estas normais $\vec{n}$ também precisam ser escritas com relação à mesma base antiga $b = (\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ usada para definir o tensor!!).

As equações (2) recebem o nome de equações de transformação de tensão e também são encontradas em quase todos os livros de resistência dos materiais e afins (note, porém, que elas só podem ser utilizadas <u>se a rotação for em torno de uma direção principal</u>, como indicado na figura 3).

Através das equações de transformação, pode-se facilmente mostrar que os pares ($\sigma_x, -\tau_{xy}$) e ($\sigma_{x'}, -\tau_{x'y'}$) pertencem a um mesmo círculo de Mohr, cujo centro e raio são dados por:

$$C = \left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \ , \ 0 \right) \qquad e \qquad R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \left(\tau_{xy} \right)^2}$$

Também podemos mostrar que para obtermos o par ($\sigma_{x'}, -\tau_{x'y'}$) no círculo de Mohr basta partirmos do par ($\sigma_x, -\tau_{xy}$) e "caminharmos" sobre o círculo de um ângulo de rotação igual a 2θ <u>no mesmo sentido de rotação imposto ao elemento</u> em torno do eixo *z* (note que o elemento sofreu uma rotação de um ângulo θ, e não 2θ). A figura 4 ilustra a operação:

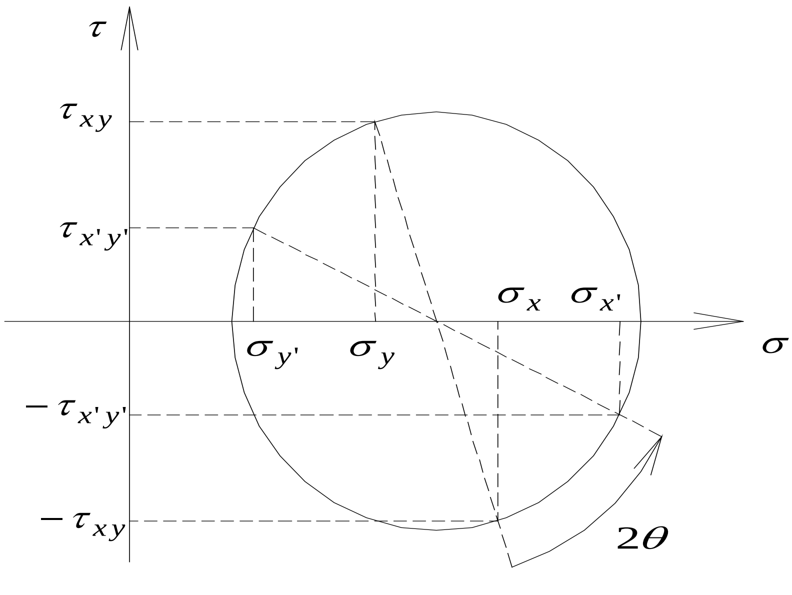


Figura 4

Deve-se ressaltar que cada ponto do círculo de Mohr está associado a um par (σ, τ) que corresponde às componentes do vetor tensão ($\vec{\rho} = \vec{\sigma} + \vec{\tau}$) em um dado plano que passa pelo ponto do sólido (componente de máquina) que está sendo analisado. O ponto ($\sigma_x, -\tau_{xy}$), por exemplo, corresponde às componentes de tensão que atuam na face de normal $\vec{n} = \vec{e}_x$; já o ponto (σ_y, τ_{xy}) corresponde às componentes de tensão que atuam na face de normal $\vec{n} = \vec{e}_y$. As duas faces mencionadas estão defasadas de 90^o no elemento e, no círculo, a defasagem é, portanto, de 180^o.

Com as equações de transformação de tensão pode-se ainda mostrar que as duas tensões principais restantes (que atuam nos planos principais paralelos ao eixo principal *z = z'*) são dadas pelas mesmas expressões fornecidas no exercício anterior. Para isto basta notarmos que os eixos *x'* e *y'* serão eixos principais de tensão se, e somente se, a tensão de cisalhamento correspondente for nula (i.é, $\tau_{x'y'} = 0$). Segue, portanto, da expressão de $\tau_{x'y'}$ que o ângulo de rotação θ_p que deve ser aplicado ao elemento da figura 2 para se obter os planos principais restantes é tal que:

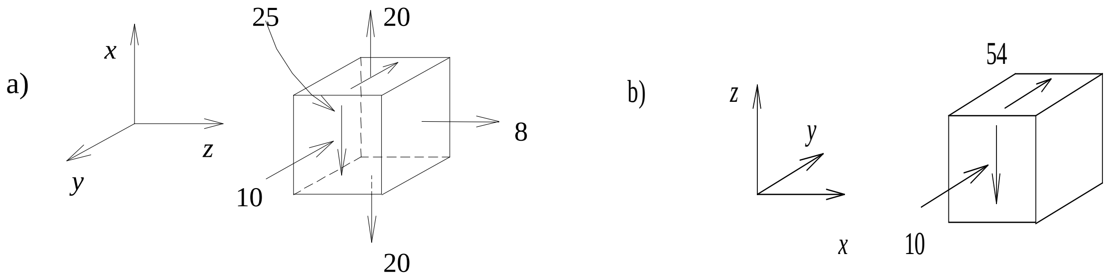
$$\tan(2\theta_p) = \frac{2.\tau_{xy}}{(\sigma_x - \sigma_y)}$$

onde o subscrito 'p' denota 'principal'.

3) Determine as tensões principais e direções principais de tensão para os estados de tensão representados pelos elementos indicados abaixo utilizando:

i) o cálculo analítico dos auto-valores e auto-vetores dos respectivos tensores de tensão escritos com relação à base $b = (\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ indicada (mostre as tensões principais e direções principais num elemento e indique, neste mesmo elemento o ângulo de rotação com relação aos eixos não principais indicados nas figuras);

ii) o método gráfico, traçando inicialmente os três círculos de Mohr associados aos estados de tensão dados e determinando, posteriormente, as tensões principais e direções principais de tensão, utilizando as fórmulas deduzidas nos exercícios anteriores (verifique que os resultados são exatamente os mesmos que os obtidos analiticamente).



Obs: todas as tensões estão dadas em MPa.

Obs: Deve-se ressaltar que o método gráfico só pode ser utilizado nos casos mais simples, nos quais pelo menos uma das direções principais de tensão já é conhecida. Para os casos mais complexos (onde nenhuma direção principal de tensão é conhecida), as tensões principais e direções principais de tensão só podem ser obtidas através do cálculo dos auto-valores e auto-vetores do tensor das tensões.