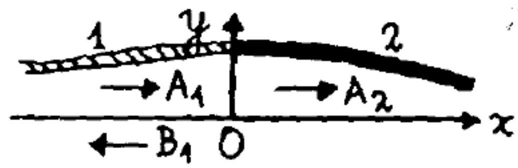
1. [HMN 5.11/5.12] Duas cordas muito longas, bem esticadas, de densidades lineares μ_1 e μ_2, estão ligadas uma à outra. Toma-se a posição de equilíbrio como eixo x e a origem O no ponto de junção, sendo y o deslocamento transversal da corda (figura).



Uma onda harmônica progressiva $y_i(x,t) = A_1 \cos(k_1 x - \omega t)$, viajando na corda 1 ($x < 0$), incide sobre o ponto de junção, fazendo-o oscilar com frequência angular ω. Isto produz na corda 2 ($x > 0$) uma onda progressiva de mesma frequência $y_t(x,t) = A_2 \cos(k_2 x - \omega t)$ (onda transmitida) e dá origem na corda 1 a uma onda que viaja em sentido contrário $y_r(x,t) = B_1 \cos(k_1 x + \omega t)$ (onda refletida). Dada a onda incidente y_i, de amplitude A_1, deseja-se obter a *amplitude de reflexão* $\rho \equiv B_1/A_1$ e a *amplitude de transmissão* $\tau \equiv A_2/A_1$.

(a) Dada a tensão T da corda, calcule as velocidades de propagação v_1 e v_2 nas cordas 1 e 2, bem como os respectivos números de onda k_1 e k_2.

O deslocamento total na corda 1 é $y_i + y_r$ e na corda 2 é y_t.

(b) Mostre que, no ponto de junção $x = 0$, deve-se ter $y_i(0,t) + y_r(0,t) = y_t(0,t)$.

(c) Aplicando a 3a lei de Newton ao ponto de junção $x = 0$, mostre que, nesse ponto, deve-se ter também

$$\frac{\partial}{\partial x}(y_i + y_r)\bigg|_{x=0} = \frac{\partial y_t}{\partial x}\bigg|_{x=0}$$

(d) A partir de (b) e (c), calcule as amplitudes de reflexão e transmissão ρ e τ em função das velocidades v_1 e v_2. Discuta o sinal de ρ.

A *refletividade* r da junção é definida como a razão entre a intensidade da onda refletida e a intensidade da onda incidente e a *transmissividade* t como a razão entre a intensidade da onda transmitida e a intensidade da onda incidente.

(e) Calcule r e t.

(f) Mostre que $r + t = 1$ e interprete esse resultado.

SOLUÇÃO COMENTADA

(a) A velocidade de propagação de uma onda numa corda tensa depende na tensão T na corda e da densidade linear de massa μ_1. Temos então:

$$v_1 = \sqrt{\frac{T}{\mu_1}} \quad \text{e} \quad v_2 = \sqrt{\frac{T}{\mu_2}}$$

Usando a relação entre a velocidade de propagação v, a frequência angular de oscilação da onda ω e o seu número de onda k, temos

$$k_1 = \frac{\omega}{v_1} = \omega\sqrt{\frac{\mu_1}{T}} \quad \text{e} \quad k_2 = \frac{\omega}{v_2} = \omega\sqrt{\frac{\mu_2}{T}}$$

onde usou-se o fato de que a frequência de oscilação nas duas cordas é a mesma. Perceba que os comprimentos de ondas nas duas cordas serão diferentes.

(b) Usando o princípio de superposição, a função de onda resultante na corda 1 ($x < 0$) é o resultado da interferência entre a onda incidente e a onda refletida $y_i(x,t) + y_r(x,t)$ enquanto na corda 2 ($x > 0$) a onda resultante é apenas a onda transmitida $y_t(x,t)$.

Por definição, a função $y(x,t)$ de uma onda transversal é interpretada como o deslocamento da corda ao longo de um eixo perpendicular à direção de propagação. Dessa forma, para garantir uma transição contínua de uma corda a outra, na junção devemos ter:

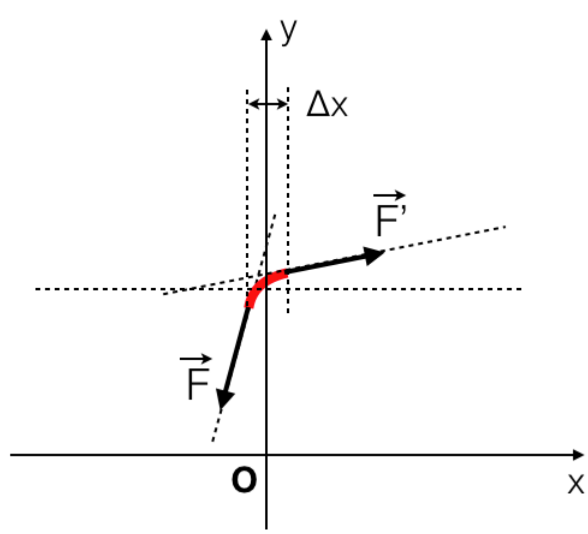
$$y_i(0,t) + y_r(0,t) = y_t(0,t) \tag{1}$$

(c) Num ponto imediatamente à esquerda da junção $-\Delta x/2$, onde a tangente à corda faz um ângulo θ com a horizontal, a força transversal F_y' gerada pela componente y da tensão na corda é

$$F_y(-\Delta x/2, t) = -T\,\sin\theta \simeq -T\,\tan\theta = -T\,\frac{\partial y}{\partial x}\bigg|_{-\Delta x/2} = -T\left[\frac{\partial y_i}{\partial x}\bigg|_{-\Delta x/2} + \frac{\partial y_r}{\partial x}\bigg|_{-\Delta x/2}\right]$$

Num ponto imediatamente à direita da junção $\Delta x/2$, onde a tangente à corda faz um ângulo θ' com a horizontal, a força transversal F_y gerada pela componente y da tensão na corda é

$$F_y'(\Delta x/2, t) \simeq T\,\tan\theta' = T\,\frac{\partial y}{\partial x}\bigg|_{\Delta x/2} = T\,\frac{\partial y_t}{\partial x}\bigg|_{\Delta x/2}$$



No limite $\Delta x \to 0$, os pontos de aplicação das forças acima se aproximam da própria junção e tais forças podem ser vistas como pares acão-reação nesse limite que, por sua vez, de acordo com a terceira lei de Newton, devem satisfazer

$$\lim_{\Delta x \to 0} F_y = -\lim_{\Delta x \to 0} F_y',$$

de modo que

$$\frac{\partial}{\partial x}(y_i + y_r)\bigg|_{x=0} = \frac{\partial y_t}{\partial x}\bigg|_{x=0} \tag{2}$$

(d) As equações (1) e (2) devem ser interpretadas como condições de contorno a serem satisfeitas pela funções de onda y_i, y_r, y_t e suas primeiras derivadas parciais com respeito à coordenada x na junção $x = 0$ em qualquer instante de tempo t.

> Este é o segundo tipo de condição vista neste curso a ser satisfeita pelas soluções de uma equação diferencial, nesse caso particular, uma equação diferencial a derivadas parciais. Nos blocos 1 e 2, vocês foram apresentados ao conceito de condição inicial, já que era válida para um instante de tempo particular, em geral, tomado como $t = 0$. Aqui, as condições ditas de contorno, ao invés de válidas para um instante de tempo particular, são tomadas num ponto particular do espaço, muitas vezes associado às fronteiras do sistema, como as extremidades de uma corda, mas também para um ponto qualquer do sistema, como representado aqui pela junção entre as cordas.

Usando as formas explícitas das funções de onda do enunciado, da equação (1), temos

$$A_1 \cos(-\omega t) + B_1 \cos(\omega t) = A_2 \cos(-\omega t)$$

logo

$$A_1 + B_1 = A_2 \tag{3}$$

onde usou-se o fato de cosseno é uma função par $(\cos\theta = \cos(-\theta))$. Da equação (2), temos

$$-k_1 A_1 \sin(-\omega t) - k_1 B_1 \sin(\omega t) = -k_2 A_2 \sin(-\omega t)$$

ou seja

$$k_1(A_1 - B_1) = k_2 A_2 \tag{4}$$

onde usou-se o fato de que seno é uma função ímpar $(\sin\theta = -\sin(-\theta))$.

Esse sistema de duas equações pode ser resolvido para as variáveis B_1 e A_2, vistas como funções da amplitude da onda incidente A_1 e dos números de onda k_1 e k_2. Vemos que

$$B_1 = \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} A_1 \quad \text{e} \quad A_2 = \frac{2k_1}{k_1 + k_2} A_1,$$

de modo que as correspondentes amplitudes de reflexão e transmissão são

$$\rho = \frac{B_1}{A_1} = \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} = \frac{\omega/v_1 - \omega/v_2}{\omega/v_1 + \omega/v_2} = \frac{v_2 - v_1}{v_1 + v_2}$$

e

$$\tau = \frac{A_2}{A_1} = \frac{2k_1}{k_1 + k_2} = \frac{2\omega/v_1}{\omega/v_1 + \omega/v_2} = \frac{2v_2}{v_1 + v_2}$$

> Perceba que a amplitude de reflexão, diferentemente da amplitude de transmissão, pode ser positiva ou negativa, dependendo da magnitude das velocidades de propagação em cada corda. Se $v_2 > v_1$, A_1 e B_1 têm mesmo sinal, de forma que não há inversão do pulso refletido. Mas se $v_2 < v_1$, o pulso refletido sofre inversão na sua forma. Faça a mesma análise de sinais em termos das densidades das cordas!

(e) Sabemos que a intensidade de uma onda harmônica de frequência angular ω, amplitude A se propagando numa corda de densidade linear μ e sob tensão T é dada por

$$I = \frac{1}{2}\mu v \omega^2 A^2$$

de forma que para as ondas incidente, refletida e transmitida temos

$$I_i = \frac{1}{2}\mu_1 v_1 \omega^2 A_1^2, \quad I_r = \frac{1}{2}\mu_1 v_1 \omega^2 B_1^2 \quad \text{e} \quad I_t = \frac{1}{2}\mu_2 v_2 \omega^2 A_2^2$$

A refletividade da junção é então

$$r = \frac{I_r}{I_i} = \frac{B_1^2}{A_1^2} = \rho^2 = \left(\frac{v_2 - v_1}{v_1 + v_2}\right)^2$$

enquanto a transmissividade é

$$t = \frac{I_t}{I_i} = \frac{\mu_2 v_2}{\mu_1 v_1}\tau^2 = \frac{4 v_1 v_2}{(v_1 + v_2)^2}$$

(f) Ve-se então que

$$r + t = \left(\frac{v_2 - v_1}{v_1 + v_2}\right)^2 + \frac{4 v_1 v_2}{(v_1 + v_2)^2} = \frac{v_2^2 + 2 v_1 v_2 + v_1^2}{(v_1 + v_2)^2} = 1$$

Isso é uma consequência direta da conservação de energia quando medida na junção, já que a intensidade para uma onda unidimensional é a potência média por ciclo sendo transmitida através da corda nesse caso

$$r + t = 1 \Longrightarrow \frac{I_r}{I_i} + \frac{I_t}{I_i} = 1 \Longrightarrow I_r + I_t = I_i$$