1. Uma corda de densidade linear de massa $\mu = 50$ g/cm é esticada sob uma tensão de $T = 500$ N. A corda tem $L = 20$ m de comprimento e, simultaneamente, a partir de cada uma das extremidades, introduzem-se oscilações harmônicas de frequências iguais $\nu = 5,25$ Hz, de mesma amplitude $A = 0,5$ cm e de fases opostas. Escreva a expressão para a função de onda resultante $y(x,t)$ após as ondas se encontrarem no ponto médio da corda.

SOLUÇÃO COMENTADA

Considere, por exemplo, que temos duas pessoas segurando cada uma das extremidades da corda, que correspondem as posições $x = 0$ e $x = L$.

No instante inicial, que tomamos como $t = 0$, as pessoas movimentam essas extremidades para cima e para baixo harmonicamente de forma a produzirem ondas harmônicas progressivas com sentidos de propagação opostos, de mesma amplitude $A = 0,5$ cm$= 0,005$ m e frequência de oscilação $\nu = 5,25$ Hz, mas em oposição de fase.

> Importante: duas ondas estão em oposição de fase se quando uma está em uma crista a outra está em um vale ou o contrário. É importante que perceba que as ondas não são geradas no mesmo ponto. Temos uma onda gerada na extremidade $x = 0$ que tem que estar em oposição de fase com a onda gerada na extremidade $x = L$.

Existem diferentes configurações das extremidades da corda no instante $t = 0$ para produzir ondas progressivas de mesma amplitude e frequência de oscilação mas em oposição de fase. Todas essas configurações satisfazem as mesmas condições de contorno. Vejamos como descrever isso matematicamente.

Se chamamos de $y_1(x,t)$ a função de onda da onda harmônica progressiva no sentido $+x$ (gerada na extremidade $x = 0$) e de $y_2(x,t)$ a função de onda da onda harmônica progressiva no sentido $-x$ (gerada na extremidade $x = L$), sabemos que as ondas têm a mesma amplitude A e mesma frequência ω (portanto, mesmo número de onda k). Assim, essas funções de onda são da forma:

$$y_1(x,t) = A\cos(kx - \omega t + \delta_1), \tag{1}$$

$$y_2(x,t) = A\cos(kx + \omega t + \delta_2). \tag{2}$$

O fato das ondas terem que estar em oposição de fase implica que δ_1 e δ_2 têm que satisfazer certas relações para que quando uma das ondas esteja em uma crista a outra esteja em um vale e vice-versa. A relação para δ_1 e δ_2 sai das condições de contorno que as extremidades satisfazem, que são:

$$y_1(0,0) = -y_2(L,0), \tag{3}$$

$$v_1(0,0) = -v_2(L,0), \tag{4}$$

onde, das Eqs. (1) e (2)

$$v_1(x,t) = \frac{\partial y_1}{\partial t} = \omega A\,\mathrm{sen}(kx - \omega t + \delta_1), \tag{5}$$

$$v_2(x,t) = \frac{\partial y_2}{\partial t} = -\omega A\,\mathrm{sen}(kx + \omega t + \delta_2). \tag{6}$$

Se você está pensando porque as condições de contorno são as dadas pelas Eq. (3) e (4), imagine como poderíamos gerar as ondas em oposição de fase da mesma amplitude e frequência. Mencionamos algumas possibilidades:

1. Em $t = 0$ a extremidade $x = 0$ está a uma distância vertical $+A$ da posição de equilíbrio e a extremidade $x = L$ está a uma distância vertical $-A$ da posição de equilíbrio. A partir dessa configuração inicial, a pessoa que segura a extremidade $x = 0$ a movimenta verticalmente para baixo e a pessoa que segura a extremidade $x = L$ a movimenta verticalmente para cima.

2. Também poderíamos ter considerado a situação contrária, onde em $t = 0$ a extremidade $x = 0$ está a uma distância vertical $-A$ da posição de equilíbrio e a extremidade $x = L$ está a uma distância vertical $+A$ da posição de equilíbrio. A partir dessa configuração inicial, a pessoa que segura a extremidade $x = 0$ a movimenta verticalmente para cima e a pessoa que segura a extremidade $x = L$ a movimenta verticalmente para baixo.

3. Em $t = 0$ ambas extremidades estão na posição de equilíbrio da corda. A partir dessa configuração inicial, a pessoa que segura a extremidade $x = 0$ a movimenta verticalmente para cima (até chegar a uma distância vertical $+A$ em relação à posição de equilíbrio) e a pessoa que segura a extremidade $x = L$ a movimenta verticalmente para baixo (até chegar a uma distância vertical $-A$ em relação à posição de equilíbrio).

4. Poderíamos também ter começado da mesma situação inicial do item 3, mas movimentar as extremidades em sentidos opostos (a extremidade em $x = 0$ para baixo e a extremidade em $x = L$ para cima).

Em todas essas situações, as pessoas movimentam as extremidades com velocidades transversais iguais em módulo (para gerar ondas da mesma frequência) mas sentidos opostos. Para gerar as ondas, as pessoas continuam movimentando as extremidades harmonicamente mantendo a amplitude e frequência de oscilação, produzindo assim ondas em oposição de fase (quando uma onda está em uma crista a outra está em um vale e vice-versa).

Perceba que todas essas possibilidades correspondem às mesmas condições de contorno, dadas nas Eqs. (3) e (4). De fato, para qualquer valor de $y_1(0,0)$ no intervalo $-A \leqslant y_1(0,0) \leqslant A$, sempre que as relações (3) e (4) sejam satisfeitas vamos a gerar ondas em oposição de fase. A forma harmônica das ondas (Eqs. (1) e (2)) já tem incorporado a inversão do movimento ao chegar aos deslocamentos verticais máximo, $+A$, e mínimo, $-A$.

Então, das condições de contorno e das equações (1), (2), (5) e (6),temos

$$y_1(0,0) = -y_2(L,0) \longrightarrow \cos(\delta_1) = -\cos(kL + \delta_2) \tag{7}$$

$$v_1(0,0) = -v_2(L,0) \longrightarrow \mathrm{sen}(\delta_1) = \mathrm{sen}(kL + \delta_2). \tag{8}$$

Agora precisamos saber o valor do número de onda k. Do texto do problema, temos que a tensão na corda é $T = 500$ N e $\mu = 50$ g/cm= 5 Kg/m, então a velocidade de propagação das ondas na corda é

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}} = 10 \text{ m/s}. \tag{9}$$

A frequência da oscilacão é $\nu = 5,25$ Hz= $5,25$ s^{-1}, então

$$\omega = 2\pi\nu = 10.5\pi \text{ rad/s} = \frac{21}{2}\pi \text{ rad}s. \tag{10}$$

Usando que a velocidade de propagação da onda está relacionada com ω e k através de $\omega = kv$ podemos obter k

$$k = \frac{\omega}{v} = \frac{21\pi}{20} \text{ rad/m}. \tag{11}$$

Do texto do problema sabemos que $L = 20$ m, então

$$kL = 21\pi. \tag{12}$$

Este resultado é muito importante porque estabelece que o produto kL é um múltiplo inteiro ímpar de π.

Substituindo a Eq. (12) nas equações (7) e (8) temos

$$\cos(\delta_1) = -\cos(kL + \delta_2) = -\cos(21\pi + \delta_2) = \cos(\delta_2) \tag{13}$$
$$\text{sen}(\delta_1) = \text{sen}(kL + \delta_2) = \text{sen}(21\pi + \delta_2) = -\text{sen}(\delta_2) \tag{14}$$

QUALQUER valor das constantes de fase δ_1 e δ_2 que verifique simultâneamente as equações (13) e (14) fará com que as ondas $y_1(x,t)$ e $y_2(x,t)$ das equações (1) e (2) estejam em oposição de fase. Diferentes valores de δ_1 e δ_2 correspondem a diferentes configurações iniciais para as extremidades.

Uma possível solução das Eqs. (13) e (14) é escolher $\delta_1 = n\pi$ com $n = 0, \pm1, \pm2, \cdots$ e δ_2 portanto há de verificar que

$$\delta_1 - \delta_2 = n\pi, \quad n = 0,\ \pm2,\ \pm4, \cdots \tag{15}$$

Então temos muitas combinações para δ_1 e δ_2 que geram ondas y_1 e y_2 em oposição de fase. Por exemplo, se escolhemos $\delta_1 = 0$, então da Eq. (15), $\delta_2 = 0, \mp2\pi, \mp4\pi, \cdots$, mas para todos os valores de δ_2, das Eqs. (1) e (2)

$$y_1(x,t) = A\cos(kx - \omega t + \delta_1) = A\cos(kx - \omega t) \tag{16}$$
$$y_2(x,t) = A\cos(kx + \omega t + \delta_2) = A\cos(kx + \omega t). \tag{17}$$

Você está pensando que as ondas nas Eqs. (16) e (17) não estão em oposição de fase? Faça uma teste simples: usando essas equações, $y_1(0,0) = A$ e $y_2(L,0) = A\cos(kL) = A\cos(21\pi) = -A$. Em $t = 0$, a onda y_1 está em uma crista e a onda y_2 em um vale. Estão em oposição de fase! Aprecie a importância das condições iniciais, que estão implementando o fato de que as ondas estão em oposição de fase, mas são geradas em extremidades diferentes.

Também poderíamos ter escolhido $\delta_1 = \pi$. Então, pela Eq. (15), $\delta_2 = (1-n)\pi$, onde $n = 0, \pm 2, \pm 4, \cdots$, o que é equivalente a $\delta_2 = n'\pi$ com $n' = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \cdots$. Assim, das Eqs. (1) e (2)

$$y_1(x,t) = A\cos(kx - \omega t + \pi) = -A\cos(kx - \omega t) \tag{18}$$

$$y_2(x,t) = A\cos(kx + \omega t + \delta_2) = -A\cos(kx + \omega t). \tag{19}$$

Faça o mesmo teste que antes! Neste caso, usando (18) e (19), temos que $y_1(0,0) = -A$ e $y_2(L,0) = -A\cos(kL) = -A\cos(21\pi) = +A$.

Tanto para a solução nas Eqs. (16) e (17) como para a solução nas Eqs. (18) e (19), se calculamos a velocidade em $t = 0$ de cada extremidade usando as Eqs. (5) e (6), temos que $v_1(0,0) = -v_2(L,0) = 0$. Isto é, as extremidades partem do repouso. Em um instante imediatamente posterior, vocês podem comprovar que $v_1(0,t) = -v_2(L,t)$. As escolhas realizadas aqui para δ_1 e δ_2 correspondem às situações 1 e 2 do comentário realizado na página 2.

Outra escolha para δ_1 e δ_2 que também satisfaz simultânemente as Eqs. (13) e (14) é considerar $\delta_1 = n\frac{\pi}{2}$, onde $n = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \cdots$, o que implica que

$$\delta_1 - \delta_2 = n''\pi, \quad n'' = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \cdots \tag{20}$$

Então, por exemplo, se consideramos $\delta_1 = \pi/2$, uma possibilidade para δ_2 é $\delta_2 = -\pi/2$. Neste caso

$$y_1(x,t) = A\cos(kx - \omega t + \pi/2) = -A\mathrm{sen}(kx - \omega t), \tag{21}$$

$$y_2(x,t) = A\cos(kx + \omega t - \pi/2) = A\mathrm{sen}(kx + \omega t). \tag{22}$$

Neste caso, $y_1(0,0) = 0$ e $y_2(L,0) = A\,\mathrm{sen}(21\pi) = 0$, portanto $y_1(0,0) = -y_2(L,0) = 0$. Também, $v_1(0,0) = -v_2(L,0) = \omega A$. Portanto, no instante $t = 0$ as extremidades já partem com uma velocidade inicial. A escolha realizada para δ_1 e δ_2 corresponde à situação 3 mencionada no comentário da página 2.

Após as ondas se encontrarem no ponto médio da corda, vamos ter uma superposição de ondas e a onda resultante é

$$y(x,t) = y_1(x,t) + y_2(x,t) \tag{23}$$

Para a escolha de δ_1 e δ_2 que produz a solução nas Eqs. (16) e (17)

$$y(x,t) = A\cos(kx - \omega t) + A\cos(kx + \omega t) = 2A\text{cos}(kx)\text{cos}(\omega t). \tag{24}$$

Se tivéssemos considerado a escolha de δ_1 e δ_2 que originou as soluções nas Eqs. (18) e (19),

$$y(x,t) = -A\cos(kx - \omega t) - A\cos(kx + \omega t) = -2A\text{cos}(kx)\text{cos}(\omega t). \tag{25}$$

Se tivéssemos considerado a escolha de δ_1 e δ_2 que gerou as soluções nas Eqs. (21) e (22),

$$y(x,t) = -A\,\text{sen}(kx - \omega t) + A\,\text{sen}(kx + \omega t) = 2A\text{cos}(kx)\text{sen}(\omega t). \tag{26}$$

Como a velocidade de propagação das duas ondas é $v = 10$ m/s (Eq. (9)) e a corda tem $L = 20$ m de comprimento, temos interferência de ondas quando as ondas chegam ao ponto médio da corda, que está a uma distância de $\frac{L}{2} = 10$ m em relação a cada extremidade. Assim, após um tempo $t = \frac{L/2}{v} = 1$ s temos interferência das ondas, gerando assim ondas estacionárias. Perceba que com a independência da escolha realizada para δ_1 e δ_2, as ondas estacionárias geradas têm todas a mesma dependência na variável x. Assim, o número de nós e anti-nós gerados entre as extremidades da corda não depende da escolha realizada para δ_1 e δ_2, sempre que as condições de contorno sejam verificadas. O que pode mudar para as diferentes escolhas de δ_1 e δ_2 (que verifiquem as condições de contorno) é a dependência com t. Entretanto, para todas as escolhas de δ_1 e δ_2, o deslocamento vertical $y(x,t)$, conforme o tempo t transcorrer, está contido no intervalo de $2A$ a $-2A$. Recomendamos fazer o desenho de $y(x, t = 1.1 \text{ s})$ como função de x para as ondas estacionárias nas Eq. (24) e (26). Utilizando o fato de que os nós da onda correspondem à situação onde $y(x,t) = 0$ com independência do valor de t, portanto, $\cos(kx) = 0$, podemos obter que há nós em $x_n = 10\,n/21$ m, com $n = 1, 3, 5, \cdots$, onde tomamos como origem a extremidade $x = 0$. A distância entre dois nós consecutivos é de $x_{n_2} - x_{n_1} = (n_2 - n_1)10/21 = 20/21$ m (pois para dois nós consecutivos, $n_2 - n_1 = 2$). Assim, o primeiro nó está a 10/21 m da extremidade $x = 0$ e o segundo nó a 30/21 m de $x = 0$ ou 20/21 m em relação ao primeiro nó. Isto indica que a extremidade em $x = 0$ é um anti-nó, pois a distância entre $x = 0$ e o primeiro nó é a metade da distância entre dois nós consecutivos. A mesma coisa acontece com a extremidade em $x = L$. Ela também é um anti-nó. A corda assim é dividida em 20 partes de 20/21 m, onde há 21 nós, e em 2 partes de 10/21 m, que correspondem à distância entre $x = 0$ (anti-nó) e o primeiro nó e a distância entre o último nó e a extremidade $x = L$ (anti-nó).