

Tratamento Estatístico de dados em Física Experimental

Prof. Zwinglio Guimarães

2º semestre de 2018

Tópico 6 - Testes estatísticos parte 1
(teste de Qui-quadrado)

O método dos mínimos quadrados (revisão)

- O método dos mínimos quadrados consiste em determinar os parâmetros como àqueles que minimizam a seguinte somatória:

$$Q(\vec{a}) = \sum_{i=1}^N \left(\frac{y_i - G(x_i, \vec{a})}{\sigma_i} \right)^2$$

onde a função modelo, $G(x_i, \vec{a})$, descreve a relação entre o valor esperado do i -ésimo dado experimental com os parâmetros a serem estimados. Por exemplo, no caso do ajuste de uma reta $G(x, \vec{a}) = a_1 + a_2x$.

Ajuste de funções lineares nos parâmetros pelo MMQ (revisão)

- Escrevendo a função modelo como:

$$G(x, \vec{a}) = a_1 g_1(x) + a_2 g_2(x) + \cdots + a_P g_P(x)$$

- O sistema linear de equações do MMQ pode ser escrito de forma matricial: $\bar{D} = \mathbf{M}\bar{A}$

$$D_l = \sum_{i=1}^N \frac{y_i g_l(x_i)}{\sigma_i^2}$$

$$M_{l,c} = \sum_{i=1}^N \frac{g_l(x_i) g_c(x_i)}{\sigma_i^2}$$

cuja solução é: $\bar{A} = \begin{bmatrix} \tilde{a}_1 \\ \tilde{a}_2 \\ \vdots \\ \tilde{a}_M \end{bmatrix} = (\mathbf{M}^{-1})\bar{D}$ com $V_{\tilde{A}} = \mathbf{M}^{-1}$

Exemplos de ajuste de funções lineares nos parâmetros pelo MMQ

$$G(x, \vec{a}) = a_1 g_1(x) + a_2 g_2(x) + \cdots + a_P g_P(x)$$

- Posição em função do tempo de um corpo em queda livre partindo do repouso:

$$G = a_1 + a_2 t^2,$$

o que implica $g_1 = 1$ e $g_2 = t^2$

- Tensão de um sinal senoidal de frequência conhecida medida em um osciloscópio (com nível DC):

$$G = a_1 \cos(2\pi ft) + a_2 \sin(2\pi ft) + a_3,$$

o que implica $g_1 = \cos(2\pi ft)$, $g_2 = \sin(2\pi ft)$ e $g_3 = 1$

O teste de χ^2

- O teste de χ^2 avalia se a dispersão dos pontos ao redor da função ajustada é consistente com as incertezas dos dados. No caso de **dados estatisticamente independentes**, o χ^2 é calculado pela expressão:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^N \left[\frac{y_i - G(x_i, \vec{a})}{\sigma_i} \right]^2$$

- O *valor esperado* (isto é, o *valor médio verdadeiro*) do χ^2 é $\langle \chi^2 \rangle = \nu$, onde $\nu = N - P$ é o número de graus de liberdade (onde é P o número de parâmetros ajustados).
- É usual calcular o $\chi_{Red}^2 = \frac{\chi^2}{\nu}$, cujo *valor esperado* é 1.

Teste de hipótese usando o χ^2

- Para **dados gaussianos, incertezas corretas e modelo adequado** a função densidade de probabilidade do χ^2 é:

$$f(\chi^2) = \frac{1}{2 \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \left(\frac{\chi^2}{2}\right)^{\left(\frac{\nu}{2}\right)-1} e^{-\frac{\chi^2}{2}}$$

onde $\Gamma(n)$ é a função gama: se n for inteiro, $\Gamma(n) = (n - 1)!$, mas se n for semi-inteiro, $\Gamma(n) = (n - 1)(n - 2) \dots \left(\frac{1}{2}\right)\sqrt{\pi}$.

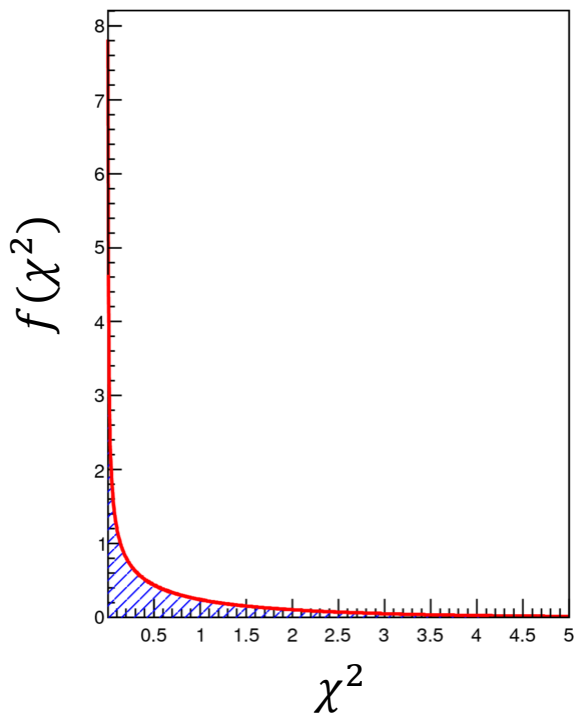
- Com a função densidade de probabilidade do χ^2 é possível avaliar a qualidade do ajuste (**envolve o modelo e as incertezas**).

- Porém, antes é preciso **verificar, no gráfico dos resíduos, $y_i - G(x_i, \vec{a})$, se o modelo é adequado e se não há erros grosseiros**.

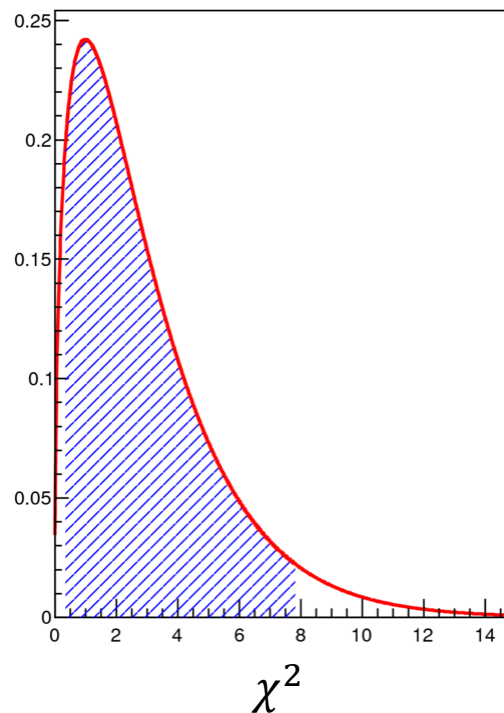
Teste de hipótese usando o χ^2 (parte II)

A função densidade de probabilidade de χ^2 tem uma assimetria positiva bastante pronunciada quando o número de graus de liberdade, $\nu = N - P$, é pequeno:

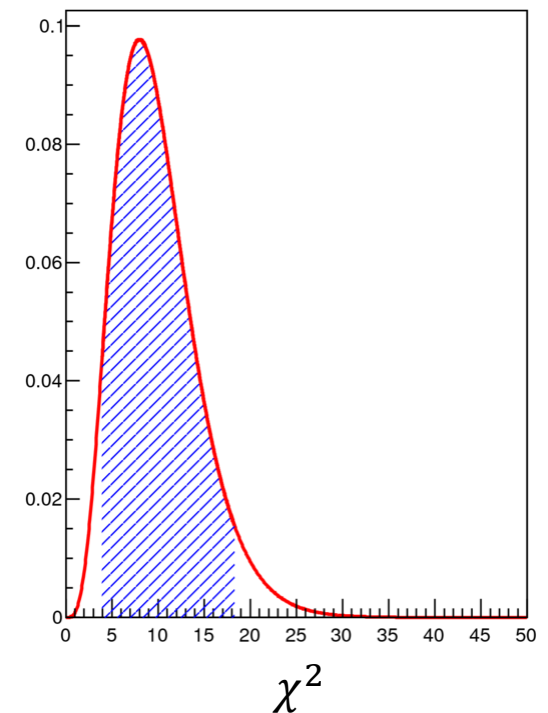
$\nu = 1$



$\nu = 3$



$\nu = 10$



χ^2 para estimar a incerteza dos dados

- Como o teste de χ^2 avalia se a dispersão dos pontos ao redor da função ajustada é consistente com as incertezas, no caso em que **o modelo é correto e as incertezas são iguais e desconhecidas**, o fato do valor esperado do χ^2 ser igual ao número de graus de Liberdade (isto é, $\langle \chi^2 \rangle = \nu$) pode ser usado para estimar a incerteza dos dados.
- No caso de **dados estatisticamente independentes** com incertezas iguais, a incerteza dos dados pode ser estimada por:

$$\tilde{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{\nu} \sum_{i=1}^N [y_i - G(x_i, \vec{a})]^2}$$