Tratamento Estatístico de Dados em Física Experimental

Prof. Zwinglio Guimarães

2º semestre de 2018

Tópico 5 – 1ª semana - Ajuste de parâmetros de funções pelo Método da Máxima Verossimilhança

Método da Máxima Verossimilhança

- Para estimar valores dos parâmetros das funções (densidade) de probabilidade que rege o experimento.
- Os valores dos parâmetros dessas funções (densidade) de probabilidade são estimados como sendo àqueles que maximizam a função (densidade) de probabilidade para o conjunto de dados obtidos no experimento, que recebe o nome de função verossimilhança, $\mathcal{L}$.
- O M.M.V. pode ser usado com qualquer função densidade de probabilidade ou função de probabilidade (no caso de dados discretos).

A função verossimilhança

A função verossimilhança, $\mathcal{L}(\{x_i\}|\vec{a})$ de que o conjunto de dados **independentes** $\{x_i\} = \{x_1, x_2, \dots, x_N\}$ seja obtido em experimentos regidos por funções (densidade) de probabilidade com parâmetros $\vec{a}$ (a serem estimados) é:

$$\mathcal{L}(\{x_i\}|\vec{a}) = \prod_{i=1}^{N} f(x_i|\vec{a}) = f(x_1|\vec{a}) \times \cdots \times f(x_N|\vec{a})$$

Onde $f(x_i|\vec{a})$ é a função (densidade) de probabilidade de se obter o valor x_i, sendo que o vetor $\vec{a}$ representa os parâmetros desconhecidos dessa função (por exemplo, no caso de dados gaussianos os parâmetros podem ser o valor verdadeiro, x_0, e o desvio-padrão verdadeiro, σ_0).

Aspectos práticos do Método da Máxima Verossimilhança

O uso do Método da Máxima Verossimilhança consiste em três etapas:

1. Escrever a função verossimilhança $\mathcal{L}(\{x_i\}|\vec{a})$.
2. Determinar os parâmetros $\tilde{\vec{a}}$ que maximizam $\mathcal{L}$ (na prática, se maximiza o $\ln(\mathcal{L})$, por simplificar manipular algebricamente as derivadas).
3. Estimar as incertezas dos parâmetros estimados $\tilde{\vec{a}}$ por propagação de incertezas.

Após isso, é conveniente avaliar se as expressões obtidas para os estimadores não são tendenciosas.

Exemplo do uso do método da máxima verossimilhança – I

Considere o caso de duas medições estatisticamente independentes $\{x_i\} = \{x_1, x_2\}$, da mesma grandeza, em experimentos com função densidade de probabilidade gaussianas de valor verdadeiro x_0 (desconhecido) e desvios padrões conhecidos, σ_1 e σ_2.

Nessas condições, a função verossimilhança (de se obter os dados $\{x_1, x_2\}$, dado que o valor verdadeiro da grandeza é x_0) é o produto das duas gaussianas:

$$\mathcal{L}(\{x_1, x_2\}/x_0) = \frac{1}{2\pi\ \sigma_1\ \sigma_2} e^{-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{x_1 - x_0}{\sigma_1}\right)^2 + \left(\frac{x_2 - x_0}{\sigma_2}\right)^2\right]}$$

Exemplo do uso do método da máxima verossimilhança – I (parte 2)

A função verossimilhança só depende do valor do parâmetro x_0 (desconhecido) que queremos estimar:

$$\mathcal{L}(\{x_1, x_2\}/x_0) = \frac{1}{2\pi\ \sigma_1\ \sigma_2} e^{-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{x_1 - x_0}{\sigma_1}\right)^2 + \left(\frac{x_2 - x_0}{\sigma_2}\right)^2\right]}$$

Assim, a estimativa $\tilde{x}$ de x_0 pode ser obtida impondo que $\left(\frac{\partial \ln(\mathcal{L})}{\partial x_0}\right)_{x_0 = \tilde{x}} = 0$, que leva à seguinte estimativa:

$$\tilde{x} = \frac{x_1\left(\frac{1}{\sigma_1}\right)^2 + x_2\left(\frac{1}{\sigma_2}\right)^2}{\left(\frac{1}{\sigma_1}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sigma_2}\right)^2}$$ cuja incerteza é $$\sigma_{\tilde{x}} = \sqrt{\frac{1}{\left(\frac{1}{\sigma_1}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sigma_2}\right)^2}}$$

A estimativa (tendenciosa) do desvio padrão por máxima verossimilhança

A função verossimilhança para medições que seguem a mesma gaussiana (medições repetitivas) pode ser escrita em termos do valor verdadeiro e do desvio padrão das medições (ambos desconhecidos). Nessas condições, as estimativas por máxima verossimilhança resultam em:

$$\tilde{x} = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{N} \qquad \text{e} \qquad \tilde{\sigma}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N} (x_i - \tilde{x})^2}{N}$$

No entanto, neste caso, <u>a estimativa da variância por máxima verossimilhança é tendenciosa</u>, pois:

$$\langle \tilde{\sigma}^2 \rangle = \frac{N-1}{N} \sigma_0^2 \neq \sigma_0^2 .$$