

Tratamento Estatístico de Dados em Física Experimental

Prof. Zwinglio Guimarães

2º semestre de 2018

Tópico 4 - Propagação de Incertezas; Covariâncias

Lei geral de propagação de incertezas

- A incerteza de uma grandeza w , calculada a partir de resultados experimentais x, y com valores verdadeiros x_0, y_0 e incertezas σ_x, σ_y pode ser determinada a partir da definição de σ_w , usando:

$$\sigma_w^2 = \langle (\varepsilon_w)^2 \rangle = \langle (w - w_0)^2 \rangle$$

onde $w = w(x, y)$ e $w_0 = w(x_0, y_0)$.

- A Lei geral de propagação de incertezas é obtida pela expansão, em série de Taylor até primeira ordem, de w na vizinhança de (x_0, y_0) :

$$w(x, y) \cong w(x_0, y_0) + \frac{\partial w}{\partial x} (x - x_0) + \frac{\partial w}{\partial y} (y - y_0)$$

Lei geral de propagação de incertezas

- Assim, para $w = w(x, y)$ obtêm-se:

$$\sigma_w^2 = \left\langle \left[\frac{\partial w}{\partial x} (x - x_0) + \frac{\partial w}{\partial y} (y - y_0) \right]^2 \right\rangle$$

que resulta em:

$$\sigma_w^2 = \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \sigma_x^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \sigma_y^2 + 2 \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) \text{cov}(x, y)$$

onde $\sigma_x^2 = \langle (x - x_0)^2 \rangle = \langle \varepsilon_x^2 \rangle$ é a variância de x (e o mesmo para y) e

$\text{cov}(x, y) = \langle (x - x_0)(y - y_0) \rangle = \langle \varepsilon_x \varepsilon_y \rangle$ é a covariância entre x e y .

Limitações da lei geral de propagação de incertezas

$$\sigma_w^2 = \left(\frac{\partial w}{\partial x} \sigma_x \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \sigma_y \right)^2 + \dots + 2 \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) cov(x, y) + \dots$$

A única hipótese considerada na dedução desta equação foi que a expansão de w até primeira ordem já é adequada para representar o efeito da variação de w com relação aos parâmetros x, y, \dots :

- Sempre verdade no caso de funções lineares em x, y, \dots
- No caso de funções não lineares, a aproximação precisa ser adequada no intervalo de algumas incertezas em torno dos valores medidos
 - **Quanto menores forem as incertezas, melhor será essa aproximação**
 - **A função precisa ser contínua nesse intervalo**

Um uso importante da lei geral de propagação de incertezas

$$\sigma_w^2 = \left(\frac{\partial w}{\partial x} \sigma_x \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \sigma_y \right)^2 + \dots + 2 \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) \text{cov}(x, y) + \dots$$

Se as grandezas x e y forem estatisticamente independentes (covariâncias nulas) a contribuição da incerteza de cada grandeza para a incerteza de w pode ser analisada separadamente:

- A contribuição da incerteza de x para w é dada por

$$\sigma_{w[x]} = \left| \frac{\partial w}{\partial x} \sigma_x \right|$$

- **Útil para planejamento de experimentos pois permite identificar quais as grandezas que mais contribuem para a incerteza de w .**

As covariâncias

- As covariâncias podem tanto aumentar quanto diminuir a incerteza de w
 - O efeito das covariâncias depende do sinal das derivadas parciais e da própria covariância
- Em ajustes e em resultados de medições de muitas grandezas é útil fornecer a matriz de covariâncias, $M_{i,j} = \langle \varepsilon_i \varepsilon_j \rangle$:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \sigma_x^2 & cov(x, y) \\ cov(x, y) & \sigma_y^2 \end{bmatrix}$$

As correlações

- Correlações são covariâncias normalizadas pelo produto dos desvios-padrões correspondentes, $\rho_{x,y} = \frac{cov(x,y)}{\sigma_x\sigma_y}$
 - As correlações são adimensionais e limitadas entre -1 e $+1$
 - Dados independentes tem correlação zero
 - Quanto mais o módulo da correlação se aproxima de 1, mais correlacionadas são as grandezas
- É usual fornecer a matriz de correlações, $C_{i,j} = \rho_{i,j}$:

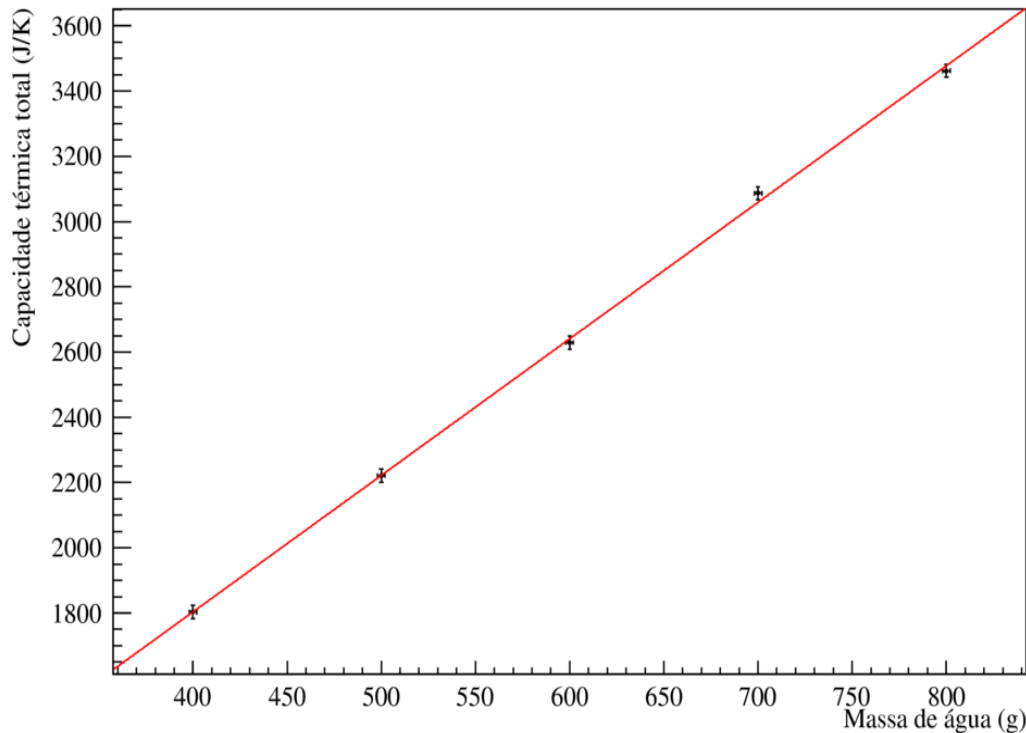
$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & \rho(x, y) \\ \rho(x, y) & 1 \end{bmatrix}$$

Um exemplo de covariâncias

Parâmetros de ajustes usualmente tem covariâncias importantes:
Ajuste da capacidade térmica total em função da massa de água em calorímetros.

Ajuste pelo WebRoot* de uma função $y = [0] + [1] * x$

Do artigo “Calorímetro Didático”, de J.H. Vuolo e C.H. Furukawa [Rev. Bras. de Ensino de Física v.17 (1995) p.140].



Resultados do ajuste

Número de parâmetros	2
Chi2	2.463
Número de graus de liberdade	3

parâmetro	Valor	Incerteza
0	129.753	42.262
1	4.18441	0.0685581

Matriz de covariância

1786.08	-2.82012
-2.82012	0.00470021

Matriz de correlação

1.00	-0.97
-0.97	1.00

*O WebRoot foi desenvolvido pelo prof. Alexandre Suaide do GRIPER-IFUSP (2011)