Tratamento Estatístico de Dados em Física Experimental

Prof. Zwinglio Guimarães

2º semestre de 2018

Tópico 3 - 2ª semana:

Função de probabilidade de Poisson

A função de probabilidade binomial (revisão)

- Distribuição do número de ocorrências em N medições independentes com probabilidade individual p

$$F_{N,p}(n) = \frac{N!}{n!\,(N-n)!}\,p^n(1-p)^{N-n}$$

- É chamada de binomial por causa da semelhança com o binômio de Newton

$$(a+b)^N = \sum_{n=0}^{N} \frac{N!}{n!\,(N-n)!}\,a^n b^{N-n}$$

Resultados importantes da binomial (revisão)

- A binomial é normalizada:

$$\sum_{n=0}^{N} \frac{N!}{n!\,(N-n)!} p^n (1-p)^{N-n} = [p + (1-p)]^N = 1$$

- A média do número de ocorrências é $n_0 = Np$:

$$\langle n \rangle = \sum_{n=0}^{N} n \, \frac{N!}{n!\,(N-n)!} \, p^n \, (1-p)^{N-n} = Np$$

- E o desvio-padrão do número de ocorrências é:

$$\sigma_n = \sqrt{Np(1-p)}$$

A função de probabilidade de Poisson

- Distribuição do número de ocorrências de eventos em que o número de tentativas, N, é muito grande, mas a probabilidade de sucesso em cada tentativa, p, é muito baixa, de tal modo que o produto $a = Np$ é um número finito

$$P_a(n) = \frac{a^n\, e^{-a}}{n!}$$

- Corresponde ao caso limite da Binomial com $N \to \infty$, mas com o produto $Np = a$ mantido constante

$$P_a(n) = \lim_{\substack{N\to\infty \\ Np=a}} \frac{N!}{n!\,(N-n)!} p^n (1-p)^{N-n}$$

A função de probabilidade de Poisson

- Distribuição do número de ocorrências de eventos em que o número de tentativas, N, é muito grande, mas a probabilidade de sucesso em cada tentativa, p, é muito baixa, de tal modo que o produto $a = Np$ é um número finito

$$P_a(n) = \frac{a^n\, e^{-a}}{n!}$$

- Corresponde ao caso limite da Binomial com $N \to \infty$, mas com o produto $Np = a$ mantido constante

$$P_a(n) = \lim_{\substack{N\to\infty \\ Np=a}} \frac{N!}{n!\,(N-n)!} p^n (1-p)^{N-n}$$

Relações matemáticas úteis para lidar com a distribuição de Poisson

$$e^x = \lim_{N \to \infty} \left(1 + \frac{x}{N}\right)^N$$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Resultados importantes da Poisson

- A Poisson é normalizada:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n\, e^{-a}}{n!} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!}\right) e^{-a} = (e^a) e^{-a} = 1$$

- A média do número de ocorrências é $n_0 = a$:

$$\langle n \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} n \frac{a^n\, e^{-a}}{n!} = \sum_{\boldsymbol{n=1}}^{\infty} \frac{a^n\, e^{-a}}{(n-1)!} = \sum_{\boldsymbol{m=0}}^{\infty} \frac{a^{m+1}\, e^{-a}}{m!} = a$$

- E o desvio-padrão do número de ocorrências é:

$$\sigma_n = \sqrt{a}$$