GUIA PARA A EXPRESSÃO DA INCERTEZA DE MEDIÇÃO

Terceira Edição Brasileira

Este Guia estabelece regras gerais, e aplicáveis, para a avaliação e expressão da incerteza em medições que se pretenda aplicar a um largo espectro de medições. A base deste Guia é a Recomendação 1 (CI-1981) do “Comitê Internacional de Pesos e Medidas (CIPM)”, aceitando a Recomendação INC-1 (1980) do “Grupo de Trabalho sobre a Declaração de Incertezas”, convocado pelo Bureau Internacional de Pesos e Medidas (BIPM), por solicitação do CIPM. A Recomendação do CIPM é a única recomendação concernente à expressão da incerteza em medição adotada por uma organização intergovernamental.

Este Guia foi preparado por um grupo de trabalho, consistindo de peritos nomeados pelo BIPM, Comissão Eletrotécnica Internacional (IEC), Organização Internacional de Normalização (ISO) e Organização Internacional de Metrologia Legal (OIML). As sete seguintes organizações apoiaram o desenvolvimento deste Guia, o qual é publicado em seus nomes:

BIPM	Bureau Internacional de Pesos e Medidas
IEC	Comissão Eletrotécnica Internacional
IFCC	Federação Internacional de Química Clínica
ISO	Organização Internacional de Normalização
IUPAC	União Internacional de Química Pura e Aplicada
IUPAP	União Internacional de Física Pura e Aplicada
OIML	Organização Internacional de Metrologia Legal

Os usuários deste Guia estão convidados a enviar seus comentários e pedidos de esclarecimento a quaisquer das sete organizações.

Guia Para a Expressão da Incerteza de Medição

Associação Brasileira de Normas Técnicas (ABNT)
Instituto Nacional de Metrologia, Normalização e Qualidade Industrial (INMETRO)

Autoria
BIPM, IEC, IFCC, ISO, IUPAC, IUPAP e OIML

Produção Editorial e Impressão
SERIFA Comunicação

Capa
Ana Cláudia David de Andrade (Designer do Inmetro)

CIP-Brasil. Catalogação na fonte.
Sindicato Nacional dos Editores de Livros, RJ

Guia para a Expressão da Incerteza de Medição
Terceira edição brasileira em língua portuguesa – Rio de Janeiro: ABNT, INMETRO, 2003
1211 p.: 2 il, (21x29,7)cm.
Inclui anexos e bibliografia

ISBN

1.Medição. 2.Incerteza de Medição. I.ABNT.II INMETRO.

2003

Diretoria de Metrologia Científica e Industrial (DIMCI)
do Instituto Nacional de Metrologia, Normalização e Qualidade Industrial (INMETRO)
Rua Santa Alexandrina, 416/5º andar, Rio Comprido
20261-232 Rio de Janeiro – RJ
Tel.: 21-2563-2905
Fax: 21-2293-6559
e-mail: dimci@inmetro.gov.br

GUIA PARA A EXPRESSÃO DA INCERTEZA DE MEDIÇÃO

Terceira Edição Brasileira

BIPM	Bureau International des Poids et Mesures Pavillon de Breteuil F-92312 Sèvres Cedex France
IEC	International Electrotechnical Commission 3, rue de Varembé Case postale 131 CH-1211 Genève 20 Switzerland
IFCC	International Organization for Clinical Chemistry Technical Secretariat Centre du Mèdicament Université de Nancy 30, rue Lionnois F-54000 Nancy France
ISO	International Organization for Standardization 1, rue de Varembé Case postale 56 CH-1211 Genève 20 Switzerland
IUPAC	International Union of Pure and Applied Chemistry Bank Court Chambers 2-3 Pound Way Templars Square, Cowley Oxford 0X4 3YF United Kingdom
IUPAP	International Union of Pure and Applied Physics Secretariat Vittens gata 11 S-421 65V. Flolunda Sweden
OIML	International Organization of Legal Metrology 11, rue Turgot F- 75009 Paris France

GUIA PARA A EXPRESSÃO DA INCERTEZA DE MEDIÇÃO

Terceira Edição Brasileira do

“Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement”

Concepção do Documento Original

Bureau International des Poids et Mesures (BIPM)
International Electrotechnical Comission (IEC)
International Federation of Clinical Chemistry (IFCC)
International Organization for Standardization (ISO)
International Union for Pure and Applied Chemistry (IUPAC)
International Union for Pure and Applied Physics (IUPAP)
International Organization of Legal Metrology (OIML)

Comissão de Revisão da Terceira Edição

Celso Pinto Saraiva, CPqD/Campinas
Clotilde Moreira de Pina, Inmetro
Giorgio Moscati, Inmetro
Gregory Amaral Kyriazis, Inmetro
Ibrahim de Cerqueira Abud, INT/RJ
José Eustáquio da Silva,/Cetec/MG
José Guilherme Pereira Peixoto, IRD/CNEN
José Henrique Vuolo, IF/USP
José Joaquim Vinge, Inmetro
Luís Gonzaga Mezzalira, Consultor Independente.
Marcelo Oliveira Gaspar de Carvalho, SENAI/RJ
Paulo Roberto Guimarães Couto, Inmetro
Renato Nunes Teixeira, Inmetro
Ricardo José de Carvalho, Observatório Nacional/RJ
Thomas Hans Müller, Inmetro
Valter Yoshihiko Aibe, Inmetro
Victor Manuel Loaysa Mendoza, Inmetro

Coordenação Geral: Diretoria de Metrologia Científica e Industrial / Inmetro

João Alziro Herz da Jornada
José Joaquim Vinge
Clotilde Moreira de Pina

Apoio Institucional

Instituto Nacional de Metrologia, Normalização e Qualidade Industrial (INMETRO)
Associação Brasileira de Normas Técnicas (ABNT)

Sumário

Prefácio xv

0 Introdução xvii

1 Finalidade 1

2 Definições 2

2.1 Termos metrológicos gerais..............................2

2.2 O termo “incerteza” 2

2.3 Termos específicos para este *Guia* 3

3 Conceitos básicos 4

3.1 Medição...4

3.2 Erros, efeitos e correções..................................5

3.3 Incerteza 5

3.4 Considerações práticas......................................7

4 Avaliando a incerteza padrão.......................................9

4.1 Modelando a medição.......................................9

4.2 Avaliação da incerteza padrão do Tipo A 10

4.3 Avaliação da incerteza padrão do Tipo B 11

4.4 Ilustração gráfica da avaliação da incerteza padrão...14

5 Determinando a incerteza padrão combinada............19

5.1 Grandezas de entrada não correlacionadas......19

5.2 Grandezas de entrada correlacionadas............21

6 Determinando a incerteza expandida.........................23

6.1 Introdução 23

6.2 Incerteza expandida 23

6.3 Escolhendo um fator de abrangência..............24

7 Relatando a incerteza...25

7.1 Orientação Geral 25

7.2 Orientação específica.......................................25

8 Resumo do procedimento para avaliação e expressão da incerteza 28

Anexos

A Recomendações do grupo de trabalho e da CIPM 29

A.1 Recomendação INC (1980) 29

A.2 Recomendação 1 (CI-1981)............................30

A.3 Recomendação 1 (CI-1986)............................30

B Termos metrológicos gerais 31

B.1 Fonte das definições 31

B.2 Definições 31

C Termos e conceitos estatísticos básicos 36

C.1 Fonte das definições 36

C.2 Definições 36

C.3 Elaboração de termos e conceitos...................39

D Valor “verdadeiro”, erro e incerteza 42

D.1 O mensurando 42

D.2 A grandeza realizada.......................................42

D.3 O valor “verdadeiro” e o valor corrigido 42

D.4 Erro...43

D.5 Incerteza 43

D.6 Representação gráfica 44

E Motivação e base para a Recomendação INC-1 (1980) 47

E.1 "Seguro", "aleatório" e "sistemático" 47

E.2 Justificativa para avaliações realistas da incerteza 47

E.3 Justificativa para tratar todos os componentes da incerteza identicamente..............................48

E.4 Desvios padrão como medidas de incertezas ..50

E.5 Uma comparação de duas abordagens da incerteza 51

F Guia prático para avaliação de componentes de incerteza..53

F.1 Componentes avaliados a partir de observações repetidas: avaliação do Tipo A da incerteza padrão 53

F.2 Componentes avaliados por outros meios: avaliação do Tipo B da incerteza padrão.........55

G Graus de liberdade e níveis da confiança 61

G.1 Introdução 61

G.2 Teorema Central do Limite 62

G.3 A distribuição-*t* e os graus de liberdade 63

G.4 Graus de liberdade efetivos 63

G.5 Outras considerações 65

G.6 Sumário e conclusões 66

H Exemplos..70

H.1 Calibração de bloco padrão 70

H.2 Medição simultânea de resistência e reatância74

H.3 Calibração de um termômetro 78

H.4 Medição de atividade......................................81

H.5 Análise de variância..85

H.6 Medições numa escala de referência: dureza ..90

J Glossário dos principais símbolos 93

K Bibliografia 96

Índice alfabético bilíngüe Inglês — Português 98

Índice alfabético bilíngüe Português — Inglês 109

Prefacio 1...

Prefácio 2

0 Introdução

0.1 Quando se relata o resultado de medição de uma grandeza física, é obrigatório que seja dada alguma indicação quantitativa da qualidade do resultado, de forma tal que aqueles que o utilizam possam avaliar sua confiabilidade. Sem essa indicação, resultados de medição não podem ser comparados, seja entre eles mesmos ou com valores de referência fornecidos numa especificação ou numa norma. É, portanto, necessário que haja um procedimento prontamente implementado, facilmente compreendido e de aceitação geral para caracterizar a qualidade de um resultado de uma medição, isto é, para avaliar e expressar sua *incerteza*.

0.2 O conceito de *incerteza* como um atributo quantificável é relativamente novo na história da medição, embora *erro* e *análise de erro* tenham sido, há muito, uma parte da prática da ciência da medição ou metrologia. É agora amplamente reconhecido que, quando todos os componentes de erro conhecidos ou suspeitos tenham sido avaliados e as correções adequadas tenham sido aplicadas, ainda permanece uma incerteza sobre quão correto é o resultado declarado, isto é, uma dúvida acerca de quão corretamente o resultado da medição representa o valor da grandeza que está sendo medida.

0.3 Da mesma forma como o uso quase universal do Sistema Internacional de Unidades (SI) trouxe coerência a todas as medições científicas e tecnológicas, um consenso mundial sobre a avaliação e expressão da incerteza de medição permitiria que o significado de um vasto espectro de resultados de medições na ciência, engenharia, comércio, indústria e regulamentação, fosse prontamente compreendido e apropriadamente interpretado. Nesta era de mercado global, é imperativo que o método para avaliar e expressar a incerteza seja uniforme em todo o mundo, de forma tal que as medições realizadas em diferentes países possam ser facilmente comparadas.

0.4 O método ideal para avaliar e expressar a incerteza do resultado de uma medição deve ser:

- *universal*: o método deve ser aplicável a todas as espécies de medição e a todos os tipos de dados de entrada usados nas medições.

A grandeza real usada para expressar a incerteza deve ser:

- *internamente consistente*: deve ser diretamente derivável dos componentes que para ela contribuem, assim como ser independente de como estes componentes estejam agrupados, ou da decomposição de componentes em subcomponentes.
- *transferível*: deve ser possível usar diretamente a incerteza avaliada para um resultado como um componente na avaliação da incerteza de outra medição na qual o primeiro resultado é utilizado.

Além disso, em muitas aplicações industriais e comerciais, assim como nas áreas da saúde e segurança, é freqüentemente necessário fornecer um intervalo em torno do resultado de medição com o qual se espera abranger uma grande fração da distribuição de valores, que poderiam razoavelmente ser atribuídos à grandeza sujeita à medição. Assim, o método ideal para avaliar e expressar incerteza de medição deve ser capaz de fornecer prontamente tal *intervalo*, em particular, com uma probabilidade da abrangência ou nível da confiança que corresponda, de uma forma realista, ao nível requerido.

0.5 O enfoque sobre o qual está baseado este documento de orientação é aquele esboçado na Recomendação INC-1 (1980) [2] do Grupo de Trabalho sobre a Declaração de Incertezas, que foi convocado pelo BIPM, sob solicitação do CIPM (ver o Prefácio). Essa abordagem, cuja justificativa é discutida no anexo E, satisfaz a todos os requisitos anteriormente enumerados. Este não é o caso da maioria dos outros métodos em uso corrente. A Recomendação INC-1 (1980) foi aprovada e ratificada pelo CIPM em suas próprias Recomendações 1 (CI-1981) [3] e 1 (CI-1986) [4]; as traduções destas Recomendações da CIPM estão reproduzidas no anexo A (ver A.2 e A.3, respectivamente). Uma vez que a Recomendação INC-1 (1980) é o fundamento sobre o qual este documento se baseia, a tradução para a língua portuguesa está reproduzida em 0.7 e o texto em françês, o qual é oficial, está reproduzido em A.1.

0.6 Um resumo sucinto do procedimento especificado neste documento, para a avaliação e expressão de incertezas de medição, é dado no capítulo 8, e alguns exemplos são apresentados em detalhes no anexo H. Outros anexos tratam de termos gerais em metrologia (anexo B); termos e conceitos básicos de estatística (anexo C); valor "verdadeiro", erro e incerteza (anexo D); sugestões práticas para avaliação dos componentes da incerteza (anexo F); graus de liberdade e níveis da confiança (anexo G); os principais símbolos matemáticos utilizados no documento (anexo J); e referências bibliográficas (anexo K). Um índice alfabético conclui o documento.

0.7 **Recomendação INC-1 (1980)**

Expressão de Incertezas Experimentais

1. A incerteza de um resultado de uma medição geralmente consiste de vários componentes que podem ser agrupados em duas categorias, de acordo com o método utilizado para estimar seu valor numérico:

   A. aqueles que são avaliados com o auxílio de métodos estatísticos;

   B. aqueles que são avaliados por outros meios.

Nem sempre há uma simples correspondência entre a classificação nas categorias A ou B e o caráter "aleatório" ou "sistemático" utilizado anteriormente para classificar as incertezas. A expressão "incerteza sistemática" é susceptível a induzir erros de interpretação e deve ser evitada.

Toda descrição detalhada da incerteza deve consistir de uma lista completa de seus componentes e indicar para cada uma o método utilizado para lhe atribuir um valor numérico.

2. Os componentes classificados na categoria A são caracterizados pelas variâncias estimadas, s_i^2, (ou os "desvios padrão" estimados s_i) e o número de graus de liberdade, ν_i. Nas situações em que for apropriado, as covariâncias devem ser fornecidas.

3. Os componentes classificados na categoria B devem ser caracterizados pelos termos u_j^2, que podem ser considerados como aproximações das variâncias correspondentes, cuja existência é suposta. Os termos u_j^2 podem ser tratados como variâncias e os termos u_j, como desvios padrão. Nas situações em que for apropriado, as covariâncias devem ser tratadas de modo similar.

4. A incerteza combinada deve ser caracterizada pelo valor obtido, aplicando-se o método usual para a combinação de variâncias. A incerteza combinada e seus componentes devem ser expressos na forma de "desvios padrão".

5. Se, para algumas aplicações, for necessário multiplicar a incerteza combinada por um fator para se obter uma incerteza global, o valor do fator multiplicador deve ser sempre declarado.

1 Finalidade

1.1 Este *Guia* estabelece regras gerais para avaliar e expressar a incerteza de medição que podem ser seguidas em vários níveis de exatidão e em muitos campos, desde o chão da fábrica até o da pesquisa fundamental. Os princípios deste *Guia*, portanto, são aplicáveis a um amplo espectro de medições, incluindo aquelas necessárias para:

- manter o controle da qualidade e a garantia da qualidade na produção;
- respeitar e fazer cumprir leis e regulamentos;
- conduzir pesquisa básica, pesquisa aplicada e desenvolvimento na ciência e na engenharia;
- calibrar padrões e instrumentos e executar ensaios, através de um sistema nacional de medição, de forma a obter a rastreabilidade até os padrões nacionais;
- desenvolver, manter e comparar padrões físicos de referência nacional e internacional, incluindo materiais de referência.

1.2 Este *Guia* está primariamente relacionado com a expressão da incerteza da medição de uma grandeza física bem definida, o mensurando, que pode ser caracterizado por um valor essencialmente único. Se o fenômeno de interesse pode ser representado somente como uma distribuição de valores ou é dependente de um ou mais parâmetros, tal como o tempo, então os mensurandos requeridos para sua descrição são o conjunto de grandezas que descrevem aquela distribuição ou aquela dependência.

1.3 Este *Guia* é também aplicável à avaliação e expressão da incerteza associada ao projeto conceitual e à análise teórica de experimentos, métodos de medição, componentes e sistemas complexos. Uma vez que o resultado de uma medição e sua incerteza podem ser conceituais e baseados inteiramente em dados hipotéticos, o termo "resultado de uma medição", tal como é usado neste *Guia*, deve ser interpretado neste sentido mais amplo.

1.4 Este *Guia* fornece regras gerais para avaliar e expressar a incerteza de medição ao invés de instruções detalhadas de tecnologia específica. Além disso, ele não discute como a incerteza de um determinado resultado de uma medição, uma vez avaliada, pode ser utilizada para diferentes finalidades, como, por exemplo, tirar conclusões sobre a compatibilidade daquele resultado com outros resultados similares, estabelecer limites de tolerância em um processo de fabricação, ou decidir se uma determinada linha de ação poderá ser adotada com segurança. Pode, portanto, tornar-se necessário desenvolver normas específicas, baseadas neste *Guia*, que tratem dos problemas peculiares aos campos específicos de medição ou às várias utilizações das expressões quantitativas da incerteza. Essas normas podem ser versões simplificadas deste *Guia* mas deveriam incluir os detalhes que são apropriados ao nível de exatidão e complexidade das medições e utilizações visadas.

NOTA - Pode haver situações nas quais se acredita que o conceito de incerteza de medição não seja plenamente aplicável, tal como quando a precisão de um método de ensaio é determinada (ver referência [5], por exemplo).

2 Definições

2.1 Termos metrológicos gerais

As definições de vários termos metrológicos gerais e relevantes para este *Guia*, tais como "grandeza mensurável", "mensurando" e "erro de medição", são dadas no anexo B. Essas definições são extraídas do "*Vocabulário Internacional de Termos Fundamentais e Gerais de Metrologia*" (abreviado para VIM)[6]. Adicionalmente, o anexo C dá as definições de vários termos estatísticos básicos extraídos, principalmente, da Norma Internacional ISO-3534-1 [7]. Quando um desses termos metrológicos ou estatísticos (ou um termo estreitamente relacionado) é usado no texto pela primeira vez, começando no capítulo 3, ele é impresso em negrito e o número do item no qual é definido é dado entre parênteses.

Por causa da sua importância para este *Guia*, a definição do termo metrológico geral "incerteza de medição" é dada tanto no anexo B, como em 2.2.3 . As definições dos mais importantes termos específicos deste *Guia* são dadas de 2.3.1 a 2.3.6 . Em todos esses itens e nos anexos B e C, o uso de parênteses, em certas palavras de alguns termos, significa que as mesmas podem ser omitidas, se tal omissão não causar equívoco.

2.2 O termo "incerteza"

O conceito de incerteza é discutido mais amplamente no capítulo 3 e no anexo D.

2.2.1 A palavra "incerteza" significa dúvida, e assim, no sentido mais amplo, "incerteza de medição" significa dúvida acerca da validade do resultado de uma medição. Por causa da falta de palavras diferentes para este *conceito geral* de incerteza e para as grandezas específicas que proporcionam *medidas quantitativas* do conceito, como, por exemplo, o desvio padrão, é necessário utilizar a palavra "incerteza" nestas duas acepções diferentes.

2.2.2 Neste *Guia*, a palavra "incerteza", sem adjetivos, refere-se tanto ao conceito geral de incerteza como a qualquer uma ou a todas as medidas quantitativas deste conceito. Quando uma medida específica é visada, são usados os adjetivos apropriados.

2.2.3 A definição formal do termo "incerteza de medição" desenvolvida para ser usada neste *Guia* e na edição do VIM [6](VIM definição 3.9) é a seguinte:

> **incerteza (de medição)**
> parâmetro, associado ao resultado de uma medição, que caracteriza a dispersão dos valores que podem ser razoavelmente atribuídos ao mensurando.
>
> NOTAS
>
> 1 O parâmetro pode ser, por exemplo, um desvio padrão (ou um múltiplo dele), ou a metade de um intervalo correspondente a um nível da confiança estabelecido.
>
> 2 A incerteza de medição compreende, em geral, muitos componentes. Alguns destes componentes podem ser estimados com base na distribuição estatística dos resultados de séries de medições e podem ser caracterizados por desvios padrão experimentais. Os outros componentes, que também podem ser caracterizados por desvios padrão, são avaliados por meio de distribuições de probabilidade supostas, baseadas na experiência ou em outras informações.
>
> 3 Entende-se que o resultado da medição é a melhor estimativa do valor do mensurado, e que todos os componentes da incerteza, incluindo aqueles resultantes dos efeitos sistemáticos, como os componentes associados com correções e padrões de referência, contribuem para a dispersão.

2.2.4 A definição de incerteza de medição dada em 2.2.3 é uma definição operacional e focaliza o resultado da medição e sua incerteza avaliada. Entretanto, ela não é inconsistente com outros conceitos de incerteza de medição, tais como:

- uma medida do possível erro no valor estimado do mensurando, tal como proporcionado pelo resultado de uma medição;
- uma estimativa caracterizando a faixa de valores na qual o valor verdadeiro de um mensurando se encontra (VIM, 1ª edição, 1984, definição 3.09).

Embora estes dois conceitos tradicionais sejam válidos como ideais, eles focalizam grandezas *desconhecidas*: o "erro" do resultado de uma medição e o "valor verdadeiro" do mensurando (em contraste com seu valor estimado), respectivamente. Não obstante, qualquer que seja o *conceito* de incerteza adotado, um componente de incerteza é sempre avaliado utilizando-se os mesmos dados e informações relacionados (ver também E.5).

2.3 Termos específicos para este *Guia*

Em geral, os termos que são específicos a este *Guia* são definidos no texto quando introduzidos pela primeira vez. Entretanto, as definições dos termos mais importantes são aqui fornecidas para fácil referência.

NOTAS - Maiores discussões relacionadas a estes termos podem ser encontradas como seguem: para 2.3.2 ver 3.3.3 e 4.2; para 2.3.3 ver 3.3.3 e 4.3; para 2.3.4 ver capítulo 5 e equações (10) e (13); e para 2.3.5 e 2.3.6 ver capítulo 6.

2.3.1 incerteza padrão

incerteza do resultado de uma medição expressa como um desvio padrão.

2.3.2 avaliação do Tipo A (da incerteza)

método de avaliação da incerteza pela análise estatística de séries de observações.

2.3.3 avaliação do Tipo B (da incerteza)

método de avaliação da incerteza por outros meios que não a análise estatística de séries de observações.

2.3.4 incerteza padrão combinada

incerteza padrão do resultado de uma medição, quando este resultado é obtido por meio dos valores de várias outras grandezas, sendo igual à raiz quadrada positiva de uma soma de termos, que constituem as variâncias ou covariâncias destas outras grandezas, ponderadas de acordo com quanto o resultado da medição varia com mudanças nestas grandezas.

2.3.5 incerteza expandida

grandeza que define um intervalo em torno do resultado de uma medição com o qual se espera abranger uma grande fração da distribuição dos valores que possam ser razoavelmente atribuídos ao mensurando

NOTAS

1 A fração pode ser vista como a probabilidade de abrangência ou nível da confiança do intervalo.

2 Para associar um nível da confiança específico ao intervalo definido pela incerteza expandida, são necessárias suposições explícitas ou implícitas com respeito à distribuição de probabilidade caracterizada pelo resultado da medição e sua incerteza padrão combinada. O nível da confiança que pode ser atribuído a este intervalo será somente conhecido na medida em que tais suposições possam ser justificadas.

3 Incerteza expandida é denominada *incerteza global* no parágrafo 5 da Recomendação INC-1 (1980).

2.3.6 fator de abrangência

fator numérico utilizado como um multiplicador da incerteza padrão combinada de modo a obter uma incerteza expandida

NOTA - um fator de abrangência, k, está tipicamente na faixa de 2 a 3.

3 Conceitos básicos

Discussões adicionais dos conceitos básicos podem ser encontradas no anexo D, que focaliza as idéias de valor "verdadeiro", erro e incerteza e inclui ilustrações gráficas destes conceitos, e no anexo E, que explora a motivação e a base estatística da Recomendação INC-1 (1980) sobre a qual se fundamenta este *Guia*. O anexo J é um glossário dos principais símbolos matemáticos usados neste *Guia*.

3.1 Medição

3.1.1 O objetivo de uma **medição** (B.2.5) é determinar o **valor** (B.2.2) do **mensurando** (B.2.9), isto é, o valor da **grandeza específica** (B.2.1, nota 1) a ser medida. Uma medição começa, portanto, com uma especificação apropriada do mensurando, do **método de medição** (B.2.7) e do **procedimento de medição** (B.2.8).

NOTA - O termo "valor verdadeiro" (ver anexo D) não é usado neste *Guia* pelas razões dadas em D.3.5. Os termos "valor de um mensurando"(ou de uma grandeza) e "valor verdadeiro de um mensurando" (ou de uma grandeza) são tidos como equivalentes.

3.1.2 Em geral, o **resultado de uma medição** (B.2.11) é somente uma aproximação ou **estimativa** (C.2.26) do valor do mensurando e, assim, só é completa quando acompanhada pela declaração da **incerteza** (ver B.2.18) dessa estimativa.

3.1.3 Na prática, o grau de especificação ou definição necessário para o mensurando é ditado pela **exatidão de medição requerida** (B.2.14). O mensurando deve ser definido com completeza suficiente relativa à exatidão requerida, de modo que, para todos os fins práticos associados com a medição, seu valor seja único. É nesse sentido que a expressão "valor do mensurando" é usada neste *Guia*.

EXEMPLO - Se o comprimento de uma barra de aço de um metro (nominal) deve ser determinado com exatidão micrométrica, sua especificação deverá incluir a temperatura e a pressão nas quais o comprimento é definido. Assim, o mensurando deve ser especificado como, por exemplo, o comprimento da barra a 25,00 ºC e 101 325 Pa (e mais quaisquer outros parâmetros definidos julgados necessários, tal como a maneira pela qual a barra será apoiada). Entretanto, se o comprimento tiver de ser determinado apenas com exatidão milimétrica, sua especificação não requererá uma definição de temperatura ou pressão ou de um valor para qualquer outro parâmetro de definição.

Nota - A definição incompleta do mensurando pode ser a causa de um componente de incerteza suficientemente grande que deva ser incluído na avaliação da incerteza do resultado da medição (ver D.1.1, D.3.4 e D.6.2).

3.1.4 Em muitos casos, o resultado de uma medição é determinado com base em séries de observações obtidas sob **condições de repetitividade** (B.2.15, nota 1)

3.1.5 Supõe-se que as variações em observações repetidas surjam porque as **grandezas de influência** (B.2.10) que possam afetar o resultado de medição não são mantidas completamente constantes.

3.1.6 O modelo matemático da medição que transforma o conjunto de observações repetidas no resultado de medição, é de importância crítica porque, em adição às observações, ele geralmente inclui várias grandezas de influência que não são extamente conhecidas. Essa falta de conhecimento contribui para a incerteza do resultado da medição, assim como contribuem as variações das observações repetidas e qualquer incerteza associada com o próprio modelo matemático.

3.1.7 Este *Guia* trata o mensurando como um escalar (uma grandeza única). A extensão a um conjunto de mensurandos relacionados, determinados simultaneamente na mesma medição, requer a substituição do mensurando escalar e de sua **variância** (C.2.11, C.2.20, C.3.2) por um mensurando vetorial e por uma **matriz de covariância**

(C.3.5). Tal substituição é considerada, neste *Guia*, apenas nos exemplos (ver H.2, H.3 e H.4).

3.2 Erros, efeitos e correções

3.2.1 Em geral, uma medição tem imperfeições que dão origem a um **erro** (B.2.19) no resultado da medição. Tradicionalmente, um erro é visto como tendo dois componentes, a saber, um componente **aleatório** (B.2.21) e um componente **sistemático** (B.2.22)

NOTA - Erro é um conceito idealizado e os erros não podem ser conhecidos exatamente.

3.2.2 O erro aleatório presumivelmente se origina de variações temporais ou espaciais, estocásticas ou imprevisíveis, de grandezas de influência. Os efeitos de tais variações, daqui para a frente denominados *efeitos aleatórios*, são a causa de variações em observações repetidas do mensurando. Embora não seja possível compensar o erro aleatório de um resultado de medição, ele pode geralmente ser reduzido aumentando-se o número de observações; sua **esperança** ou **valor esperado** (C.2.9, C.3.1) é zero.

NOTAS

1 O desvio padrão experimental da média aritmética ou média de uma série de observações (ver 4.2.3) *não* é o erro aleatório da média embora ele assim seja designado em algumas publicações. Ele é, em vez disso, uma medida da *incerteza* da média devida a efeitos aleatórios. O valor exato do erro na média, que se origina destes efeitos, não pode ser conhecido.

2 Neste *Guia* toma-se muito cuidado em distinguir entre os termos "erro" e "incerteza". Eles não são sinônimos, ao contrário representam conceitos completamente diferentes; eles não deveriam ser confundidos um com o outro, nem ser mal empregados.

3.2.3 O erro sistemático, como o erro aleatório, não pode ser eliminado porém ele também, freqüentemente, pode ser reduzido. Se um erro sistemático se origina de um efeito reconhecido de uma grandeza de influência em um resultado de medição, daqui para diante denominado como *efeito sistemático*, o efeito pode ser quantificado e, se for significativo com relação à exatidão requerida da medição, uma **correção** (B.2.23) ou **fator de correção** (B.2.24) pode ser aplicado para compensar o efeito. Supõe-se que, após esta correção, a esperança ou valor esperado do erro provocado por um efeito sistemático seja zero.

NOTA - A incerteza de uma correção aplicada a um resultado de medição, para compensar um efeito sistemático, *não* é o erro sistemático no resultado de medição. Este efeito sistemático é freqüentemente denominado tendência, e também, algumas vezes chamado efeito de tendência. É uma medida da *incerteza* do resultado devido ao conhecimento incompleto do valor requerido da correção. O erro originado da compensação imperfeita de um efeito sistemático não pode ser exatamente conhecido. Os termos "erro" e "incerteza" devem ser usados apropriadamente e deve-se tomar cuidado em distinguir um do outro.

3.2.4 Supõe-se que o resultado de uma medição tenha sido corrigido para todos os efeitos sistemáticos reconhecidos como significativos e que todo esforço tenha sido feito para identificar tais efeitos.

EXEMPLO - Uma correção devido à impedância finita de um voltímetro usado para determinar a diferença de potencial (o mensurando), através de um resistor de alta impedância, é aplicada para reduzir o efeito sistemático no resultado da medição proveniente do efeito de carga do voltímetro. Entretanto, os valores das impedâncias do voltímetro e do resistor, que são usados para estimar o valor da correção e são obtidos a partir de outras medidas, são, eles mesmos, incertos. Essas incertezas são usadas para avaliar a componente de incerteza da determinação de diferença de potencial originada da correção e, assim, do efeito sistemático devido à impedância finita do voltímetro.

NOTAS

1 Freqüentemente, os instrumentos e sistemas de medição são ajustados ou calibrados, utilizando-se padrões de medição e materiais de referência para eliminar os efeitos sistemáticos; entretanto, as incertezas associadas a esses padrões e materiais ainda devem ser levadas em conta.

2 O caso em que uma correção para um efeito sistemático significativo conhecido não é aplicada é discutido na nota do item 6.3.1 e em F.2.4.5.

3.3 Incerteza

3.3.1 A incerteza do resultado de uma medição reflete a falta de conhecimento exato do valor do mensurando (ver 2.2). O resultado de uma medição, após correção dos efeitos sistemáticos reconhecidos, é ainda, tão somente uma *estimativa* do valor do mensurando por causa da incerteza proveniente dos efeitos aleatórios e da correção imperfeita do resultado para efeitos sistemáticos.

NOTA - O resultado de uma medição (após correção) pode, sem que se perceba, estar muito próximo do valor do mensurando (e, assim, ter um erro desprezível), muito embora possa ter uma incerteza grande. Portanto, a incerteza do resultado de uma medição não deve ser confundida com o erro desconhecido remanescente.

3.3.2 Na prática, existem muitas fontes possíveis de incerteza em uma medição, incluindo:

a) definição incompleta do mensurando;

b) realização imperfeita da definição do mensurando;

c) amostragem não-representativa – a amostra medida pode não representar o mensurando definido;

d) conhecimento inadequado dos efeitos das condições ambientais sobre a medição ou medição imperfeita das condições ambientais;

e) erro de tendência pessoal na leitura de instrumentos analógicos;

f) resolução finita do instrumento ou limiar de mobilidade;

g) valores inexatos dos padrões de medição e materiais de referência;

h) valores inexatos de constantes e de outros parâmetros obtidos de fontes externas e usados no algoritmo de redução de dados;

i) aproximações e suposições incorporadas ao método e procedimento de medição;

j) variações nas observações repetidas do mensurando sob condições aparentemente idênticas.

Essas fontes não são necessariamente independentes e algumas das fontes de a) a i) podem contribuir para a fonte j). Naturalmente, um efeito sistemático não reconhecido não pode ser levado em consideração na avaliação da incerteza do resultado de uma medição, porém contribui para seu erro.

3.3.3 A Recomendação INC-1 (1980) do Grupo de Trabalho sobre a Declaração de Incertezas agrupa os componentes da incerteza em duas categorias baseadas no seu método de avaliação, “A” e “B” (ver 0.7, 2.3.2 e 2.3.3). Estas categorias se aplicam à *incerteza* e não são substitutas para os termos “aleatório” e “sistemático”. A incerteza de uma correção de um efeito sistemático conhecido pode, em alguns casos, ser obtida por uma avaliação do Tipo A, enquanto que, em outros casos, por uma avaliação do Tipo B, podendo-se obter do mesmo modo a incerteza que caracteriza um efeito aleatório.

NOTA - Em algumas publicações, os componentes da incerteza são categorizados como “aleatório” e “sistemático” e são associados com erros provenientes de efeitos aleatórios e de efeitos sistemáticos conhecidos, respectivamente. Tal categorização de componentes de incerteza pode se tornar ambígua quando aplicada genericamente. Por exemplo, um componente “aleatório” de incerteza em uma medição pode se tornar um componente “sistemático” da incerteza em outra medição na qual o resultado da primeira medição é usado como dado de entrada. Categorizando os *métodos* de avaliação dos componentes da incerteza, em vez de fazê-lo com os próprios *componentes*, evita-se tal ambiguidade. Ao mesmo tempo, isto não impede designar componentes individuais que tenham sido avaliados pelos dois diferentes métodos em grupos distintos, a serem usados para uma finalidade em particular (ver 3.4.3).

3.3.4 O propósito da classificação Tipo A e Tipo B é de indicar as duas maneiras diferentes de avaliar os componentes da incerteza e serve apenas para discussão; a classificação não se propõe a indicar que haja qualquer diferença na natureza dos componentes resultando dos dois tipos de avaliação. Ambos os tipos de avaliação são baseados em **distribuições de probabilidade** (C.2.3) e os componentes de incerteza resultantes de cada tipo são quantificados por variâncias ou desvios padrão.

3.3.5 A variância estimada u^2, caracterizando um componente de incerteza obtido de uma avaliação do Tipo A, é calculada a partir de uma série de observações repetidas, e é a conhecida variância s^2 estatisticamente estimada (ver 4.2). O **desvio padrão** estimado (C.2.12, C.2.21, C.3.3) u, a raiz quadrada positiva de u^2, é portanto $u = s$ e, por conveniência, é por vezes denominada *incerteza padrão do Tipo A*. Para um componente de incerteza obtido por uma avaliação do Tipo B, a variância estimada u^2 é avaliada, usando-se o conhecimento disponível (ver 4.3), e o desvio padrão estimado u é, por vezes, denominado *incerteza padrão do Tipo B*.

Assim, uma incerteza padrão do Tipo A é obtida a partir de uma **função densidade de probabilidade** (C.2.5) derivada da observação de uma **distribuição de freqüência** (C.2.18), enquanto que uma incerteza padrão Tipo B é obtida de uma suposta função densidade de probabilidade, baseada no grau de credibilidade de que um evento vá ocorrer [freqüentemente chamada **probabilidade** subjetiva (C.2.1)]. Ambos os enfoques empregam interpretações reconhecidas de probabilidade.

NOTA - Uma avaliação Tipo B de um componente de incerteza é usualmente baseada em um conjunto de informações comparativamente confiáveis (ver 4.3.1).

3.3.6 A incerteza padrão do resultado de uma medição, quando este resultado é obtido de valores de um número de outras grandezas, é denominada *incerteza padrão combinada* e designada por u_c. Ela é o desvio padrão estimado, associado com o resultado, e é igual à raiz quadrada positiva da variância combinada, obtida a partir de todos os componentes da variância e **covariância** (C.3.4), independente de como tenham sido avaliados, usando o que é denominado, neste *Guia*, de *lei de propagação de incerteza* (ver a capítulo 5).

3.3.7 Para satisfazer as necessidades de algumas aplicações industriais e comerciais, assim como a requisitos nas áreas da saúde e segurança, uma *incerteza expandida U* é obtida, multiplicando-se a incerteza padrão combinada u_c por um *fator de abrangência k*. A finalidade pretendida para U é fornecer um intervalo em torno do resultado de uma medição, com o qual se espera abranger uma grande fração da distribuição de valores que poderiam razoavelmente ser atribuídos ao mensurando. A escolha do fator k, o qual está geralmente na faixa de 2 a 3, é baseada na probabilidade de abrangência ou nível da confiança requerido do intervalo (ver capítulo 6).

NOTA - O fator de abrangência k deve sempre ser declarado de forma que a incerteza padrão da grandeza medida possa ser recuperada para uso no cálculo da incerteza padrão combinada de outros resultados de medição que possam depender dessa grandeza.

3.4 Considerações práticas

3.4.1 Se todas as grandezas das quais o resultado de uma medição depende forem variadas, sua incerteza poderá ser calculada por meios estatísticos. Entretanto, uma vez que isso, na prática, raramente é possível, devido a tempo e recursos limitados, a incerteza de um resultado de medição é, geralmente, avaliada utilizando-se um modelo matemático da medição e a lei de propagação da incerteza. Assim, neste *Guia*, está implícita a suposição de que uma medição pode ser modelada matematicamente até o grau imposto pela exatidão requerida na medição.

3.4.2 Uma vez que o modelo matemático pode ser incompleto, todas as grandezas relevantes devem ser variadas até a maior extensão prática possível, de modo que a avaliação da incerteza possa ser baseada, tanto quanto possível, nos dados observados. Sempre que factível, o uso de modelos empíricos da medição, fundamentados em dados quantitativos, colecionados ao longo do tempo, e o uso de padrões de verificação e gráficos de controle que possam indicar se uma medição está sob controle estatístico, devem ser parte do esforço de obtenção de avaliações confiáveis de incerteza. O modelo matemático deverá sempre ser revisado quando os dados observados, incluindo o resultado de determinações independentes do mesmo mensurando, demonstrarem que o modelo está incompleto. Um experimento bem projetado pode, muito, facilitar avaliações confiáveis da incerteza e é uma parte importante da arte de medição.

3.4.3 De forma a decidir se um sistema de medição está funcionando adequadamente, a variabilidade observada experimentalmente de seus valores de saída, conforme medida pelo seu desvio padrão observado, é freqüentemente comparada com o desvio padrão previsto, obtido pela combinação dos vários componentes da incerteza que caracterizam a medição. Em tais casos, somente aqueles componentes (obtidos de avaliações Tipo A ou Tipo B) que poderiam contribuir para a variabilidade experimentalmente observada destes valores de saída devem ser considerados.

NOTA - Tal análise pode ser facilitada, reunindo-se aqueles componentes que contribuem para a variabilidade e aqueles que não o fazem em dois grupos separados e adequadamente rotulados.

3.4.4 Em alguns casos, a incerteza de uma correção para um efeito sistemático não precisa ser incluída na avaliação da incerteza de um resultado de medição. Embora a incerteza tenha sido avaliada, ela pode ser ignorada se sua contribuição para a incerteza padrão combinada do resultado de medição é insignificante. Se o valor da própria correção for insignificante relativamente à incerteza padrão combinada, ele também pode ser ignorado.

3.4.5 Muitas vezes ocorre na prática, especialmente no domínio da metrologia legal, que um equipamento é ensaiado através de uma comparação com um padrão de medição e as incertezas associadas com o padrão e com o procedimento de comparação são desprezíveis relativamente à exatidão requerida do ensaio. Um exemplo é o uso de um conjunto de padrões de massa bem calibrados para verificar a exatidão de uma balança comercial. Em tais casos, porque os componentes da incerteza são pequenos o bastante para serem ignorados, a medição pode ser vista como determinação do erro do equipamento sob ensaio (ver também F.2.4.2).

3.4.6 A estimativa do valor de um mensurando, fornecido pelo resultado de uma medição, é algumas vezes expressa em termos de valor adotado de um padrão de medição, em vez de em termos da unidade apropriada do Sistema Internacional de Unidades (SI). Em tais casos, a magnitude da incerteza atribuível ao resultado de medição pode ser significativamente menor do que quando aquele resultado for expresso na unidade SI apropriada (na realidade, o mensurando foi redefinido para ser a razão entre o valor da grandeza a ser medida e o valor adotado do padrão).

EXEMPLO - Um padrão de tensão Zener de alta qualidade é calibrado por comparação com uma referência de tensão de efeito Josephson baseado no valor convencional da constante Josephson recomendada para uso internacional pelo CIPM. A incerteza padrão combinada relativa $u_c(V_S)/V_S$ (ver 5.1.6) da diferença de potencial calibrada V_S do padrão Zener é 2×10^{-8} quando V_S é relatado em termos do valor convencional, mas $u_c(V_S)/V_S$ é 4×10^{-7} quando V_S é relatado em termos da unidade SI da diferença de potencial, volt (V), por causa da incerteza adicional associada com o valor SI da constante Josephson.

3.4.7 Erros grosseiros no registro ou na análise dos dados podem introduzir um erro desconhecido significativo no resultado de uma medição. Grandes erros grosseiros podem ser, geralmente, identificados por uma revisão apropriada dos dados; os pequenos erros grosseiros podem ser mascarados por, variações aleatórias, ou até mesmo podem aparecer como tais. Medidas de incerteza não são projetadas para levar em conta tais erros.

3.4.8 Embora este *Guia* proporcione uma metodologia para avaliar incertezas, ele não pode substituir o raciocínio crítico, a honestidade intelectual e a habilidade profissional. A avaliação de incerteza não é uma tarefa de rotina nem uma tarefa puramente matemática; ela depende de conhecimento detalhado da natureza do mensurando e da medição. A qualidade e utilidade da incerteza indicada para o resultado de uma medição, dependem, portanto, e em última análise, da compreensão, análise crítica e integridade daqueles que contribuem para o estabelecimento de seu valor.

4 Avaliando a incerteza padrão

No anexo F pode-se encontrar orientação adicional, principalmente de natureza prática, sobre a avaliação dos componentes de incerteza.

4.1 Modelando a medição

4.1.1 Na maioria dos casos o mensurando Y não é medido diretamente, mas é determinado a partir de N outras grandezas $X_1, X_2, ..., X_N$ através de uma relação funcional f:

$$Y = f(X_1, X_2, ..., X_N) \quad (1)$$

NOTAS

1 Para economia de notação, neste *Guia* será usado o mesmo símbolo para a grandeza física (o mensurando) e para a variável aleatória (ver 4.2.1) que representa o possível resultado de uma observação dessa grandeza. Quando é declarado que X_i tem uma determinada distribuição de probabilidade, o símbolo é usado neste último sentido e supõe-se que a própria grandeza física possa ser caracterizada por um valor essencialmente único (ver 1.2 e 3.1.3).

2 Em uma série de observações, o k-ésimo valor observado X_i é designado como $X_{i,k}$; assim, se R representa a resistência de um resistor, o k-ésimo valor observado da resistência é representado como R_k.

3 A estimativa de X_i (estritamente falando de sua esperança) é designada por x_i.

EXEMPLO - Se uma diferença de potencial V é aplicada aos terminais de um resistor dependente da temperatura que tem uma resistência R_0, à uma temperatura definida t_0 e um coeficiente de temperatura linear da resistência α, a potência P (o mensurando) dissipada pelo resistor, à temperatura t, depende de $\boldsymbol{V}$, $\boldsymbol{R_0}$, α e $\boldsymbol{t}$, de acordo com:

$$P = f(V, R_0, \alpha, t) = V^2/R_0[1 + \alpha(t - t_0)]$$

NOTA - Outros métodos de medição de P seriam modelados por expressões matemáticas diferentes.

4.1.2 As *grandezas de entrada* $X_1, X_2, ..., X_N$, das quais a *grandeza de saída* Y depende, podem elas mesmas ser consideradas como mensurandos e depender de outras grandezas, incluindo correções e fatores de correção para efeitos sistemáticos, levando, por conseguinte, a uma complicada relação funcional f, que nunca poderá ser escrita de modo explícito. Além disso, f pode ser determinada experimentalmente (ver 5.1.4) ou existir somente como um algoritmo que terá de ser resolvido numericamente. A função f, tal como aparece neste *Guia*, deve ser interpretada neste conceito mais amplo, em particular como sendo a função que contém todas as grandezas, incluindo todas as correções e fatores de correção que possam contribuir com um componente significativo da incerteza para o resultado de medição.

Assim, se dados indicam que f não modela a medição no grau imposto pela exatidão requerida do resultado de medição, devem-se incluir grandezas de entrada adicionais em f para eliminar esta inadequação (ver 3.4.2). Isto pode requerer a introdução de uma grandeza de entrada que reflita o conhecimento incompleto de um fenômeno que afeta o mensurando. No exemplo de 4.1.1, podem ser necessárias grandezas de entrada adicionais para responder por uma distribuição de temperatura conhecida e não-uniforme ao longo do resistor, um coeficiente de temperatura da resistência possivelmente não-linear, ou uma possível dependência da resistência quanto à pressão barométrica.

NOTA - No entanto, a equação (1) pode ser tão elementar quanto $Y = X_1 - X_2$. Esta expressão modela, por exemplo, a comparação de duas determinações da mesma grandeza X.

4.1.3 O conjunto de grandezas de entrada $X_1, X_2, ..., X_N$ pode ser categorizado como:

- grandezas cujos valores e *incertezas* podem ser diretamente determinadas na medição em curso. Estes valores e incertezas podem ser obtidos, por exemplo, de uma única observação, de observações repetidas, ou de julgamento baseado na experiência, e podem envolver a determinação de correções a leituras de instrumentos e correções por conta de grandezas de influência, tais como temperatura ambiente, pressão barométrica e umidade;

- grandezas cujos valores e *incertezas* são incorporados à medição a partir de fontes externas, tais como grandezas associadas com padrões de medição calibrados, materiais de referência certificados e dados de referência obtidos de manuais técnicos.

4.1.4 Uma estimativa do mensurando Y, designada por y, é obtida da equação (1) usando *estimativas de entrada* $x_1, x_2,...,x_N$ para os valores das N grandezas $X_1, X_2, ..., X_N$. Assim, a *estimativa de saída* y, que é o resultado da medição, é dada por:

$$y = f(x_1, x_2, ..., x_N) \tag{2}$$

NOTA - Em alguns casos, a estimativa y pode ser obtida de:

$$y = \overline{Y} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} Y_k = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(X_{1,k}, X_{2,k}, \ldots, X_{N,k})$$

Isto é, y é tomado como sendo a média aritmética ou média (ver 4.2.1) de n determinações independentes Y_k de Y, tendo cada determinação a mesma incerteza e cada uma sendo baseada em um conjunto completo de valores observados das N grandezas de entrada X_i obtidos ao mesmo tempo. Esse modo de tirar a média, em vez de $y = f(\overline{X}_1, \overline{X}_2, ... \overline{X}_N)$, onde $\overline{X}_i = (\Sigma_{k=1}^{n} X_{i,k})/n$ é a média aritmética das observações individuais $X_{i,k}$, pode ser preferível quando f é uma função não linear das grandezas de entrada $X_1, X_2, ..., X_N$,. Entretanto, os dois procedimentos são idênticos, se f é uma função linear de X_i (ver H.2 e H.4).

4.1.5 O desvio padrão estimado, associado com a estimativa de saída ou resultado de medição y, chamado *incerteza padrão combinada* e designada por $u_c(y)$, é determinado pelo desvio padrão estimado, associado com cada estimativa de entrada x_i, denominada *incerteza padrão*, e designada por $u(x_i)$ (ver 3.3.3 até 3.3.6).

4.1.6 Cada estimativa de entrada x_i e sua incerteza padrão associada $u(x_i)$ são obtidas de uma distribuição de valores possíveis da grandeza de entrada X_i. Essa distribuição de probabilidade pode ser baseada na freqüência, isto é, em uma série de observações $X_{i,k}$ de X_i, ou pode ser uma distribuição *a priori*. Avaliações do Tipo A dos componentes da incerteza padrão são fundamentadas em distribuições de freqüência, enquanto que avaliações do Tipo B são fundamentadas em distribuições *a priori*. Deve-se reconhecer que em ambos os casos as distribuições são modelos utilizados para representar o estágio de nosso conhecimento.

4.2 Avaliação da incerteza padrão do Tipo A

4.2.1 Na maioria dos casos, a melhor estimativa disponível da esperança ou valor esperado μ_q de uma grandeza q que varia aleatoriamente [uma **variável aleatória** (C.2.2)] e para a qual n observações independentes q_k foram obtidas sob as mesmas condições de medição (ver B.2.15), é a **média aritmética** ou **média** $\overline{q}$ (C.2.19) das n observações:

$$\overline{q} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} q_k \tag{3}$$

Assim, para uma grandeza de entrada X_i estimada a partir de n observações repetidas independentes $X_{i,k}$, a média aritmética de $\overline{X}_i$ obtida pela equação (3) é usada como estimativa de entrada x_i na equação (2) para determinar o resultado da medição y; isto é, $x_i = \overline{X}_i$. As estimativas de entrada não avaliadas por observações repetidas devem ser obtidas por outros métodos, tais como os indicados na segunda categoria de 4.1.3.

4.2.2 As observações individuais q_k diferem em valor por causa de variações aleatórias nas grandezas de influência, ou dos efeitos aleatórios (ver 3.2.2). A variância experimental das observações, que estima a variância σ^2 da distribuição de probabilidade de q, é dada por:

$$s^2(q_k) = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}(q_k - \overline{q})^2 \tag{4}$$

Esta estimativa da variância e sua raiz quadrada positiva $s(q_k)$, denominada **desvio padrão experimental** (B. 2. 17), caracteriza a variabilidade dos valores q_k observados ou, mais especificamente, sua dispersão em torno de sua média $\overline{q}$.

4.2.3 A melhor estimativa de $\sigma^2(\overline{q}) = \sigma^2/n$, a variância da média, é dada por:

$$s^2(\overline{q}) = \frac{s^2(q_k)}{n} \tag{5}$$

A variância experimental da média $s^2(\overline{q})$ e o **desvio padrão experimental da média** $s(\overline{q})$ (B.2.17, nota 2), igual à raiz quadrada positiva de $s^2(\overline{q})$, quantificam quão bem

$\overline{q}$ estima a esperança μ_q de q, e qualquer um dentre eles pode ser usado como uma medida da incerteza de $\overline{q}$.

Assim, para uma grandeza de entrada X_i determinada por n observações repetidas e independentes $X_{i,k}$, a incerteza padrão $u(x_i)$ de sua estimativa $x_i = \overline{X}_i$ é $u(x_i) = s(\overline{X}_i)$, com $s^2(\overline{X}_i)$ calculada de acordo com a equação (5). Por conveniência, $u^2(x_i) = s^2(\overline{X}_i)$ e $u(x_i) = s(\overline{X}_i)$ são por vezes denominados uma *variância do Tipo A* e uma *incerteza padrão do Tipo A*, respectivamente.

NOTAS

1 O número de observações n deve ser suficientemente grande para assegurar que $\overline{q}$ forneça uma estimativa confiável da esperança μ_q da variável aleatória q e que $s^2(\overline{q})$ forneça uma estimativa confiável da variância $\sigma^2(\overline{q}) = \sigma^2/n$ (ver nota de 4.3.2). A diferença entre $s^2(\overline{q})$ e $\sigma^2(\overline{q})$ deve ser considerada quando se estabelecem intervalos de confiança (ver 6.2.2). Nesse caso, se a distribuição de probabilidade de q é uma distribuição normal (ver 4.3.4), a diferença é levada em consideração através da distribuição-t (ver G.3.2).

2 Embora a variância $s^2(\overline{q})$ seja a grandeza mais fundamental, o desvio padrão $s(\overline{q})$ é mais conveniente na prática porque tem as mesmas dimensões de q e um valor de mais fácil compreensão do que aquele da variância.

4.2.4 Para uma medição bem caracterizada sob controle estatístico, uma estimativa combinada ou agrupada da variância s_p^2 (ou um desvio padrão experimental agrupado s_p) que caracteriza a medição pode estar disponível. Nesse caso, quando o valor do mensurando q é determinado a partir de n observações independentes, a variância experimental da média aritmética $\overline{q}$ das observações é mais bem estimada por s_p^2/n do que por $s^2(\overline{q})/n$, e a incerteza padrão é $u = s_p/\sqrt{n}$ (ver também a nota para H.3.6).

4.2.5 Freqüentemente uma estimativa x_i de uma grandeza de entrada X_i é obtida de uma curva que foi ajustada a dados experimentais pelo método dos mínimos quadrados. As variâncias estimadas e as incertezas padrão resultantes dos parâmetros ajustados que caracterizam a curva de quaisquer dos pontos previstos, podem ser usualmente calculadas por procedimentos estatísticos bem conhecidos (ver H.3 e referência [8]).

4.2.6 Os **graus de liberdade** ν_i (C.2.31) de $u(x_i)$ (ver G.3), iguais a n-1 no caso simples em que $x_i = \overline{X}_i$ e $u(x_i) = s(\overline{X}_i)$ são calculados de n observações independentes, como em 4.2.1 e 4.2.3, sempre devem ser dados quando avaliações do Tipo A dos componentes de incerteza forem documentadas.

4.2.7 Se as variações aleatórias nas observações de uma grandeza de entrada são correlacionadas, por exemplo, na grandeza tempo, a média e o desvio padrão experimental da média, tais como dados em 4.2.1 e 4.2.3, podem ser **estimadores** (C.2.25) não apropriados da **estatística** (C.2.23) desejada. Em tais casos, as observações devem ser analisadas por métodos estatísticos especialmente criados para tratar uma série de medições correlacionadas que variam aleatoriamente.

NOTA - Tais métodos especializados são usados para tratar medições de padrões de freqüência. Entretanto, é possível que, à medida que se passa de medições de curto prazo para medições de longo prazo de outras grandezas metrológicas, a suposição de variações aleatórias não-correlacionadas pode não ser mais válida e métodos especializados poderiam também ser usados para tratar destas medições. (Ver a referência [9], por exemplo, para uma discussão detalhada da variância de Allan.)

4.2.8 A discussão sobre a avaliação do Tipo A da incerteza padrão, de 4.2.1 a 4.2.7, não se destina a ser exaustiva; há muitas situações, algumas bem complexas, que podem ser tratadas por métodos estatísticos. Um exemplo importante é o uso de arranjos de calibração, freqüentemente baseados no método dos mínimos quadrados, para analisar as incertezas oriundas tanto de variações aleatórias de curto prazo como de longo prazo nos resultados de comparações de artefatos materiais de valor desconhecido, tais como blocos padrão e padrões de massa, com padrões de referência de valor conhecido. Em tais situações de medição relativamente simples, os componentes da incerteza podem ser freqüentemente avaliados pela análise estatística de dados, obtidos a partir de arranjos consistindo de seqüências aninhadas de medições do mensurando, para um número de valores diferentes das grandezas das quais ela depende - uma assim chamada análise de variância (ver H.5).

NOTA - Em níveis mais baixos da cadeia de calibração, nas situações em que padrões de referência são freqüentemente supostos como sendo exatamente conhecidos, porque foram calibrados por um laboratório primário ou nacional, a incerteza de um resultado de calibração pode ser uma única incerteza padrão do Tipo A, calculada a partir do desvio padrão experimental agrupado que caracteriza a medição.

4.3 Avaliação da incerteza padrão do Tipo B

4.3.1 Para uma estimativa x_i de uma grandeza de entrada X_i que não tenha sido obtida através de observações repetidas, a variância estimada associada $u^2(x_i)$ ou a incerteza padrão $u(x_i)$ é avaliada por julgamento científico, baseando-se em todas as informações disponíveis sobre a possível variabilidade de X_i. O conjunto de informações pode incluir:

- dados de medições prévias;
- a experiência ou o conhecimento geral do comportamento e propriedades de materiais e instrumentos relevantes;
- especificações do fabricante;
- dados fornecidos em certificados de calibração e outros certificados;
- incertezas atribuídas a dados de referência extraídos de manuais.

Para maior conveniência, $u^2(x_i)$ e $u(x_i)$ estimados dessa maneira são, por vezes, referidos como, respectivamente, uma *variância do Tipo B* e uma *incerteza padrão do Tipo B*.

NOTA - Quando x_i é obtido a partir de uma distribuição *a priori*, a variância associada é apropriadamente escrita como $u^2(X_i)$, mas, para simplicidade, $u^2(x_i)$ e $u(x_i)$ são usados neste *Guia*.

4.3.2 O uso adequado do conjunto de informações disponíveis para uma avaliação do Tipo B da incerteza padrão exige o discernimento baseado na experiência e no conhecimento geral, sendo esta uma habilidade que pode ser aprendida com a prática. Deve-se reconhecer que uma avaliação do Tipo B da incerteza padrão pode ser tão confiável quanto uma avaliação do Tipo A, especialmente numa situação de medição onde uma avaliação do Tipo A é baseada em um número comparativamente pequeno de observações estatisticamente independentes.

NOTA - Se a distribuição da probabilidade de q, na nota 1 de 4.2.3, é normal, então $\sigma[s(\overline{q})]/\sigma(\overline{q})$, o desvio padrão de $s(\overline{q})$ relativo a $\sigma(\overline{q})$, é, aproximadamente, $[2(n - 1)]^{-1/2}$. Assim, tomando-se $\sigma[s(\overline{q})]$ como a incerteza de $s(\overline{q})$, para $n = 10$ observações, a incerteza relativa em $s(\overline{q})$ é de 24 por cento, enquanto que, para $n = 50$ observações, ela é de 10 por cento (valores adicionais são dados na Tabela E.1, no anexo E).

4.3.3 Se a estimativa x_i for obtida de uma especificação do fabricante, do certificado de calibração, do manual técnico ou de outra fonte, e sua incerteza citada for declarada ser um determinado múltiplo de um desvio padrão, a incerteza padrão $u(x_i)$ é simplesmente o valor mencionado dividido pelo multiplicador, e a variância estimada $u^2(x_i)$ é o quadrado do quociente.

EXEMPLO - Um certificado de calibração declara que a massa de um padrão de massa de aço inoxidável m_s, com valor nominal de um quilograma, é 1 000,000 325 g e que a "incerteza desse valor é de 240 μg no nível de três desvios padrão". A incerteza padrão do padrão de massa é, então, simplesmente, $u(m_s) = (240\ \mu g)/3 = 80\ \mu g$. Isso corresponde a uma incerteza padrão relativa $u(m_s)\ /\ m_s$ de 80×10^{-9} (ver 5.1.6). A variância estimada é $u^2(m_s) = (80\ \mu g)^2 = 6,4 \times 10^{-9}\ g^2$.

NOTA - Em muitos casos pouca ou nenhuma informação é dada a respeito dos componentes individuais dos quais foi obtida a incerteza mencionada. Isto geralmente não tem importância para expressar incerteza de acordo com as práticas deste *Guia*, uma vez que todas as incertezas padrão são tratadas exatamente da mesma maneira como quando se calcula a incerteza padrão combinada de um resultado de medição (ver o capítulo 5).

4.3.4 A incerteza citada de x_i não é, necessariamente, dada como um múltiplo de um desvio padrão, como em 4.3.3. Em vez disso, pode-se encontrar declarado que a incerteza citada define um intervalo tendo um nível da confiança de 90, 95 ou 99 por cento (ver 6.2.2). A não ser quando indicado de outro modo, pode-se supor que foi usada uma **distribuição normal** (C.2.14) para calcular a incerteza citada e recuperar a incerteza padrão de x_i, dividindo-se a incerteza citada pelo fator apropriado para a distribuição normal. Os fatores correspondentes aos três níveis da confiança acima são 1,64; 1,96 e 2,58 (ver também a tabela G.1, no anexo G).

NOTA - Não haveria necessidade de tal suposição, se a incerteza tivesse sido dada de acordo com as recomendações deste Guia com relação ao relato da incerteza, o que reforça que o fator de abrangência deve sempre ser fornecido (ver 7.2.3).

EXEMPLO - Um certificado de calibração estabelece que a resistência de um resistor padrão R_s de valor nominal de dez ohms é 10,000 742 Ω ± 129 μΩ a 23°C e que "a incerteza citada de 129 μΩ define um intervalo tendo um nível da confiança de 99 por cento". A incerteza padrão do valor da resistência pode ser tomada como $u(R_s) = (129\ \mu\Omega)/\ 2,58 = 50\ \mu\Omega$, o que corresponde a uma incerteza padrão relativa $u(R_s)/R_s$ de $5,0 \times 10^{-6}$ (ver 5.1.6). A variância estimada é $u^2\ (R_s) = (50\ \mu\Omega)^2 = 2,5 \times 10^{-9}\ \Omega^2$.

4.3.5 Considere o caso onde, com base nas informações disponíveis, pode se estabelecer que "há uma chance de cinqüenta para cinqüenta de que o valor da grandeza de entrada X_i resida no intervalo a_- até a_+" (em outras palavras, a probabilidade de que X_i esteja neste intervalo é de 0,5 ou 50 por cento). Se pode ser suposto que a distribuição dos valores possíveis de X_i é aproximadamente normal, então, a melhor estimativa x_i de X_i pode ser tomada no ponto médio do intervalo. Adicionalmente, se a meia-largura do intervalo é designada por $a = (a_+ - a_-)/2$, toma-se $u(x_i) = 1,48a$, uma vez que, para uma distribuição normal com esperança μ e desvio padrão σ, o intervalo $\mu \pm \sigma/1,48$ abrange, aproximadamente, 50 por cento da distribuição.

EXEMPLO - Um operador de máquinas, ao determinar as dimensões de uma peça, estima que seu comprimento esteja com uma probabilidade de

0,5 no intervalo de 10,07 mm a 10,15 mm, e relata que l = (10,11± 0,04) mm, significando que ± 0,04 mm define um intervalo, tendo um nível da confiança de 50 por cento. Então, a = 0,04 mm, e, supondo-se uma distribuição normal para os possíveis valores de l, a incerteza padrão do comprimento é $u(l) = 1{,}48 \times 0{,}04$ mm $\approx 0{,}06$ mm e a variância estimada é $u^2(l) = (1{,}48 \times 0{,}04 \text{ mm})^2 = 3{,}5 \times 10^{-3}$ mm^2.

4.3.6 Considere um caso similar ao do item 4.3.5 onde, com base na informação disponível, pode-se estabelecer que "há cerca de duas em três chances de que o valor de X_i esteja no intervalo a_- até a_+" (em outras palavras, a probabilidade de que X_i esteja neste intervalo é de cerca de 0,67). Então, pode-se razoavelmente tomar $u(x_i) = a$, porque, para uma distribuição normal com esperança μ e desvio padrão σ, o intervalo $\mu \pm \sigma$ abrange 68,3 por cento da distribuição.

NOTA - Dar-se-ia ao valor $u(x_i)$ significância consideravelmente maior do que lhe é obviamente garantido, se fosse utilizado o desvio normal real 0,967 42 correspondente à probabilidade $p = 2/3$, isto é, se fosse escrito $u(x_i) = a/0{,}967\,42 = 1{,}033a$.

4.3.7 Em outros casos, pode ser possível estimar somente fronteiras (limites superior e inferior) para X_i, em particular, para afirmar que "a probabilidade de que o valor X_i esteja dentro do intervalo a_- até a_+, para todos os fins práticos, é igual a um, e a probabilidade de que X_i esteja fora deste intervalo é, essencialmente, zero". Se *não há conhecimento específico* sobre os valores possíveis de X_i dentro do intervalo, pode-se apenas supor que é igualmente provável que X_i esteja em qualquer lugar dentro dele (uma distribuição uniforme ou retangular de valores possíveis - ver 4.4.5 e a figura 2a). Então x_i, a esperança ou valor esperado de X_i, é o ponto médio no intervalo $x_i = (a_- + a_+)/2$, com a variância associada:

$$u^2(x_i) = (a_+ - a_-)^2/12 \qquad (6)$$

Se a diferença entre os limites, $a_+ - a_-$, é designada por $2a$, então a equação (6) torna-se:

$$u^2(x_i) = a^2/3 \qquad (7)$$

NOTA - Quando um componente de incerteza, determinado deste modo, contribui significativamente para a incerteza de um resultado de medição, é prudente que se obtenha dados adicionais para sua avaliação mais completa.

EXEMPLOS

1 Um manual dá o valor do coeficiente de expansão térmica linear de cobre puro a 20 ºC, α_{20} (Cu), como $16{,}52 \times 10^{-6}$ ºC^{-1} e simplesmente estabelece que "o erro neste valor não deve exceder $0{,}40 \times 10^{-6}$ ºC^{-1}". Baseado nessas informações limitadas, não é absurdo supor que o valor de α_{20} (Cu) estará com a mesma probabilidade no intervalo de $16{,}12 \times 10^{-6}$ ºC^{-1} a $16{,}92 \times 10^{-6}$ ºC^{-1} e que é muito pouco provável que α_{20} (Cu) esteja fora dele. A variância dessa distribuição retangular simétrica de valores possíveis de α_{20} (Cu) de meia-largura $a = 0{,}40 \times 10^{-6}$ ºC^{-1} é, então, a partir da equação (7), $u^2(\alpha_{20}) = (0{,}40 \times 10^{-6}\ ºC^{-1})^2/3 = 53{,}3 \times 10^{-15}\ ºC^{-2}$, e a incerteza padrão é $u(\alpha_{20}) = (0{,}40 \times 10^{-6}\ ºC^{-1})/\sqrt{3} = 0{,}23 \times 10^{-6}\ ºC^{-1}$.

2 As especificações do fabricante para um voltímetro digital estabelecem que "entre um e dois anos depois que o instrumento é calibrado, sua exatidão na faixa de 1 V é 14×10^{-6} vezes a leitura mais 2×10^{-6} vezes a faixa". Considere-se que o instrumento é usado 20 meses após a calibração para medir em sua faixa de 1 V uma diferença de potencial V, e que a média aritmética de um número de observações repetidas independentes de V é encontrada como sendo $\overline{V} = 0{,}928\,571$ V, com uma incerteza padrão do Tipo A de $u(\overline{V}) = 12\ \mu$V. Pode-se obter a incerteza padrão associada com as especificações do fabricante a partir de uma avaliação do Tipo B, supondo que a exatidão declarada fornece fronteiras simétricas para uma correção aditiva a $\overline{V}$, $\Delta\overline{V}$, de esperança igual a zero e com igual probabilidade de estar em qualquer parte dentro das fronteiras. A meia-largura a da distribuição retangular simétrica de valores possíveis de $\Delta\overline{V}$ é, então, $a = (14 \times 10^{-6}) \times (0{,}928\,571 \text{ V}) + (2 \times 10^{-6}) \times (1\text{V}) = 15\ \mu$V e, pela equação (7), $u^2(\Delta\overline{V}) = 75\ \mu V^2$ e $u(\Delta\overline{V}) = 8{,}7\ \mu$V. A estimativa do valor do mensurando V, para fins de maior simplicidade denotada pelo mesmo símbolo V, é dada por $V = \overline{V} + \Delta\overline{V} = 0{,}928\,571$ V. Pode-se obter a incerteza padrão combinada dessa estimativa, combinando-se a incerteza padrão do Tipo A de 12 μV de $\overline{V}$ com a incerteza padrão do Tipo B de 8,7 μV de $\Delta\overline{V}$. O método geral para combinar componentes de incerteza padrão é dado na capítulo 5, com este exemplo particular sendo tratado no item 5.1.5.

4.3.8 Em 4.3.7, os limites superior e inferior a_+ e a_- para a grandeza de entrada X_i podem não ser simétricos com relação à melhor estimativa x_i; mais especificamente, se o limite inferior é escrito como $a_- = x_i - b_-$ e o limite superior, como $a_+ = x_i + b_+$, então $b_- \neq b_+$. Uma vez que, neste caso, x_i (suposto ser a esperança de X_i) não está no centro do intervalo de a_- até a_+, a distribuição da probabilidade de X_i não pode ser uniforme em todo o intervalo. Entretanto, pode não haver suficiente informação disponível para escolher uma distribuição apropriada; modelos diferentes levarão a diferentes expressões para a variância. Na ausência de tal informação, a aproximação mais simples é:

$$u^2(x_i) = \frac{(b_+ + b_-)^2}{12} = \frac{(a_+ - a_-)^2}{12} \qquad (8)$$

que é a variância de uma distribuição retangular com largura total $b_+ + b_-$. (As distribuições assimétricas também serão discutidas em F.2.4.4 e G.5.3)

EXEMPLO - Se no exemplo 1 de 4.3.7 o valor do coeficiente é dado no manual como α_{20} (Cu) = $16{,}52 \times 10^{-6}$ ºC^{-1} e é dito que "o menor valor possível é $16{,}40 \times 10^{-6}$ ºC^{-1} e que o maior valor possível é $16{,}92 \times 10^{-6}$ ºC^{-1}", então $b_- = 0{,}12 \times 10^{-6}$ ºC^{-1}, $b_+ = 0{,}40 \times 10^{-6}$ ºC^{-1} e, da equação (8), $u(\alpha_{20}) = 0{,}15 \times 10^{-6}$ ºC^{-1}.

NOTAS

1 Em muitas situações práticas de medição em que as fronteiras são assimétricas, pode ser apropriado aplicar uma correção à estimativa x_i de magnitude $(b_+ - b_-)/2$, de modo que a nova estimativa x_i' de X_i esteja no ponto médio entre os limites: $x'_i = (a_- + a_+)/2$. Isto reduz a situação ao caso de 4.3.7, com novos valores $b'_+ = b'_- = (b_+ + b_-) / 2 = (a_+ - a_-) / 2 = a$.

2 Baseado no princípio da entropia máxima, a função densidade da probabilidade no caso assimétrico, pode ser demonstrada como sendo igual a $p(X_i) = A \exp[-\lambda (X_i - x_i)]$, com $A = [b_- \exp(\lambda b_-) + b_+ \exp(-\lambda b_+)]^{-1}$ e $\lambda = \{\exp[\lambda (b_- + b_+)] - 1\}/\{b_- \exp[\lambda (b_- + b_+)] + b_+\}$. Isto leva à variância $u^2(x_i) = b_+ b_- - (b_+ - b_-)/\lambda$; para $b_+ > b_-$, $\lambda > 0$ e para $b_+ < b_-$, $\lambda < 0$.

4.3.9 Em 4.3.7, como não havia conhecimento específico sobre os possíveis valores de X_i dentro de seus limites estimados a_- e a_+ , poder-se-ia somente supor que seria igualmente provável, para X_i, tomar qualquer valor entre esses limites, com probabilidade zero de estar fora deles. Tais descontinuidades de função degrau em uma distribuição de probabilidade não são muitas vezes físicas. Em muitos casos, é mais realista esperar que valores perto dos limites sejam menos prováveis do que os que estejam perto do ponto médio. É, então, razoável substituir a distribuição retangular simétrica, por uma distribuição trapezoidal simétrica, tendo lados inclinados iguais (um trapezóide isósceles), uma base de largura $a_+ - a_- = 2a$ e um topo de largura $2a\beta$, onde $0 \le \beta \le 1$. Na medida em que $\beta \to 1$, esta distribuição trapezoidal se aproxima da distribuição retangular de 4.3.7, enquanto que, para $\beta = 0$, torna-se uma distribuição triangular (ver 4.4.6 e a figura 2b). Supondo tal distribuição trapezoidal para X_i , encontra-se que a esperança de X_i é $x_i = (a_- + a_+)/2$ e sua variância associada é:

$$u^2(x_i) = a^2 (1 + \beta^2)/6 \qquad (9a)$$

que se torna para a distribuição triangular, $\beta = 0$:

$$u^2(x_i) = a^2/6 \qquad (9b)$$

NOTAS

1 Para uma distribuição normal, com esperança μ e desvio padrão σ, o intervalo $\mu \pm 3\sigma$ abrange, aproximadamente, 99,73 por cento da distribuição. Então, se os limites superior e inferior a_+ e a_- definem limites de 99,73 por cento em vez de limites de 100 por cento, pode-se supor que X_i tenha distribuição aproximadamente normal ao invés de não existir conhecimento específico acerca de X_i entre os limites, como em 4.3.7, então $u^2(x_i) = a^2/9$. Por comparação, a variância de uma distribuição retangular simétrica de meia-largura a é $a^2/3$[equação (7)], e a de uma distribuição triangular simétrica com meia-largura a é $a^2/6$ [equação (9b)]. As magnitudes das variâncias dessas três distribuições são surpreendentemente similares, em vista da grande diferença na quantidade de informações requeridas para justificá-las.

2 A distribuição trapezoidal é equivalente à convolução de duas distribuições retangulares [10], uma com meia-largura a_1 igual à meia-largura média do trapezóide, $a_1 = a\,(1+\beta)/2$, a outra com uma meia largura a_2, igual à largura média de uma das porções triangulares do trapezóide, $a_2 = a\,(1 - \beta)/2$. A variância da distribuição é $u^2 = a_1^2/3 + a_2^2/3$. A distribuição da convolução pode ser interpretada como uma distribuição retangular cuja largura $2a_1$ tem, ela mesma, uma incerteza representada por uma distribuição retangular de largura $2a_2$, e modela o fato de que as fronteiras de uma grandeza de entrada não são exatamente conhecidos. Porém mesmo que a_2 seja tão grande quanto 30 por cento de a_1, u excede $a_1/\sqrt{3}$ por menos de 5 por cento.

4.3.10 É importante não "contar duplamente" os componentes da incerteza. Se um componente da incerteza, surgindo de um determinado efeito, é obtido a partir de uma avaliação do Tipo B, deve ser incluído como um componente independente da incerteza no cálculo da incerteza padrão combinada do resultado de medição, somente na medida em que o efeito não contribua para a variabilidade observada das observações. Isto porque a incerteza devido àquela parte do efeito que contribui para a variabilidade observada já está incluída no componente da incerteza obtido a partir da análise estatística das observações.

4.3.11 A discusssão de avaliação da incerteza padrão do Tipo B, de 4.3.3 a 4.3.9, foi feita somente com fins indicativos. Além disso, a avaliação da incerteza deve ser baseada em dados quantitativos na maior extensão possível, como enfatizada em 3.4.1 e 3.4.2.

4.4 Ilustração gráfica da avaliação da incerteza padrão

4.4.1 A figura (1) representa a estimativa do valor de uma grandeza de entrada X_i e a avaliação da incerteza dessa estimativa, decorrente da distribuição desconhecida de possíveis valores medidos de X_i , ou distribuição de probabilidade de X_i , que é amostrada por meio de observações repetidas.

4.4.2 Na figura (1a), supõe-se que a grandeza de entrada X_i seja uma temperatura t e que sua distribuição desconhecida é uma distribuição normal, com esperança $\mu_t = 100$ ºC e desvio padrão $\sigma = 1{,}5$ ºC. Sua função densidade de probabilidade é, então (ver C.2.14):

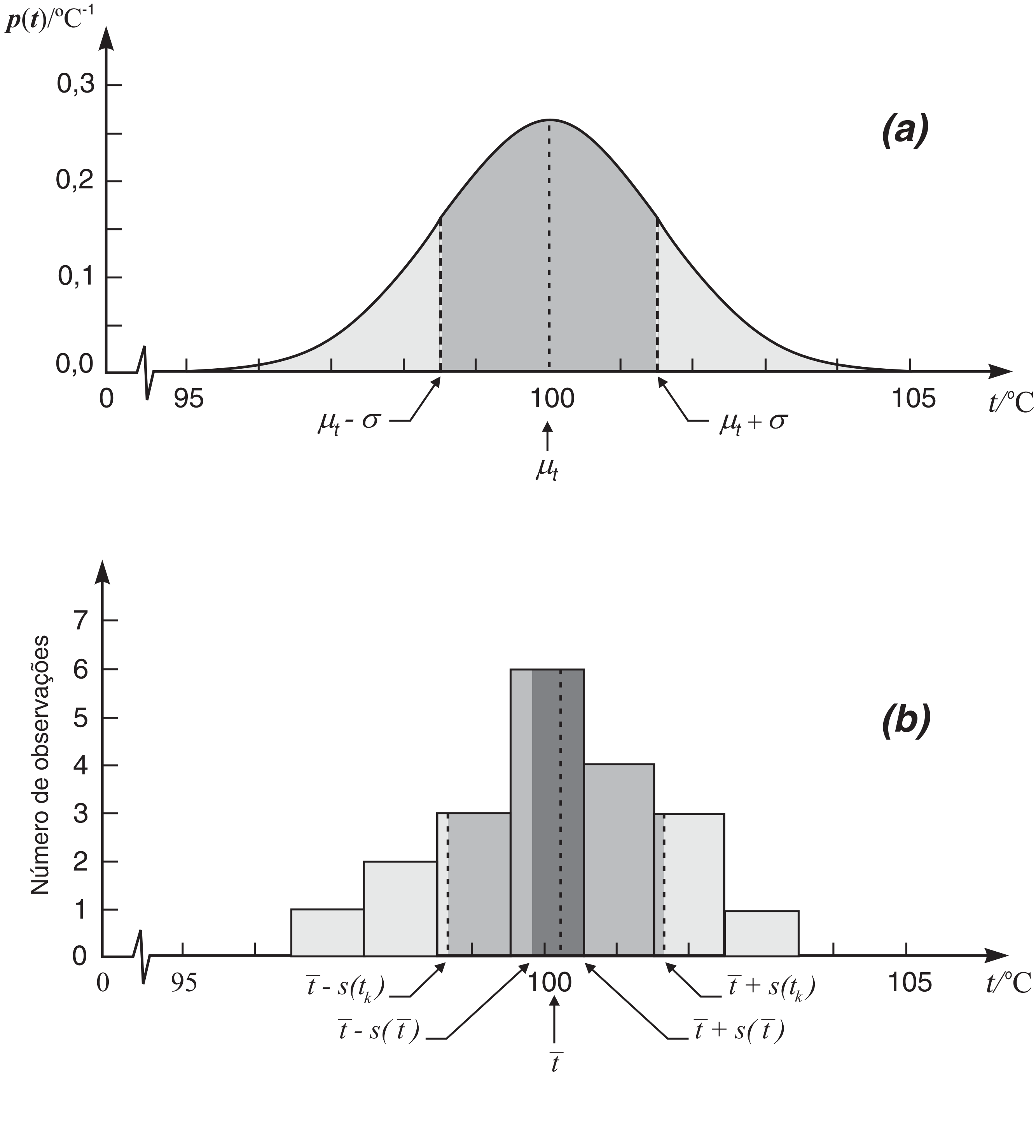


Figura 1. Ilustração gráfica da avaliação da incerteza padrão de uma grandeza de entrada a partir de observações repetidas

$$p(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-(t-\mu_t)^2/2\sigma^2\right]$$

NOTA - A definição de função densidade de probabilidade $p(z)$ requer que a relação $\int p(z)dz = 1$ seja satisfeita.

4.4.3 A figura (1b) mostra um histograma de n=20 observações repetidas t_k da temperatura t, supostas como tendo sido tomadas aleatoriamente a partir da distribuição da figura (1a). Para obter o histograma, as 20 observações ou amostras, cujos valores são dados na tabela 1, são agrupadas em intervalos de 1 ºC de largura. (A preparação do histograma é, naturalmente, desnecessária para a análise estatística dos dados). A média aritmética ou média $\bar{t}$ das n=20 observações, calculada de acordo com a equação (3), é $\bar{t}$= 100,145 ºC ≈ 100,14 ºC e é aceita como sendo a melhor estimativa da esperança μ_t de t, baseada nos dados disponíveis. O desvio padrão experimental da amostragem $s(t_k)$, calculado pela equação (4), é $s(t_k)$ = 1,489 ºC ≈ 1,49 ºC, e o desvio padrão experimental da média $s(\bar{t})$, calculado pela equação (5), que é a incerteza padrão $u(\bar{t})$ da média $\bar{t}$, é $u(\bar{t}) = s(\bar{t}) = s(t_k)/\sqrt{20}$ = 0,333 ºC ≈ 0,33 ºC. (Para prosseguir nos cálculos, é preferível que todos os dígitos sejam conservados).

NOTA - Embora os dados na Tabela 1 não sejam improváveis, considerando-se o largo uso de termômetros eletrônicos digitais de alta resolução, eles têm fins ilustrativos e não devem ser necessariamente interpretados como descrevendo uma medição real.

4.4.4 A Figura (2) representa a estimativa do valor de uma grandeza de entrada X_i e a avaliação da incerteza dessa estimativa, a partir de uma distribuição *a priori* dos valores possíveis de X_i, ou distribuição de probabilidade de X_i, baseada em todas as informações disponíveis. Para ambos os casos mostrados, a grandeza de entrada é suposta, mais uma vez, como sendo a temperatura t.

4.4.5 Para o caso ilustrado na figura (2a), supõe-se que haja pouca informação disponível sobre a grandeza de entrada t e que tudo que se pode fazer é supor que t seja descrito por uma distribuição de probabilidade *a priori* retangular e simétrica de limite inferior a_- = 96 ºC, limite superior a_+ = 104 ºC e, portanto, uma meia-largura: $a = (a_+ - a_-)/2$ = 4 ºC (ver 4.3.7). A função densidade de probabilidade de t é, então:

$$p(t) = 1/2a, \quad \text{para} \quad a_- \le t \le a_+$$

$$p(t) = 0, \quad \text{para outros valores de } t.$$

Como indicado em 4.3.7, a melhor estimativa de t é sua esperança $\mu_t = (a_+ + a_-)/2$ = 100 ºC, que decorre de C.3.1. A incerteza padrão desta estimativa é $u(\mu_t) = a/\sqrt{3} \approx$ 2,3 ºC, que decorre de C.3.2 [ver a equação (7)].

4.4.6 Para o caso ilustrado na Figura (2b), supõe-se que a informação disponível relativa a t *seja menos limitada e que* t possa ser descrito por uma distribuição de probabilidade *a priori* triangular e simétrica de mesmo limite inferior a_- = 96 ºC, mesmo limite superior a_+ = 104 ºC, e, assim, mesma meia-largura $a = (a_+ - a_-)/2$ = 4 ºC, como em 4.4.5 (ver 4.3.9). A função densidade de probabilidade de t é, então:

$$p(t) = (t - a_-)/a^2, \quad \text{para} \quad a_- \le t \le (a_+ + a_-)/2$$

$$p(t) = (a_+ - t)/a^2, \quad \text{para} \quad (a_+ + a_-)/2 \le t \le a_+$$

$$p(t) = 0, \quad \text{para outros valores de } t.$$

Tabela 1 - Vinte observações repetidas da temperatura t agrupadas em intervalos de 1 ºC

Intervalo $t_1 \le t < t_2$		Temperatura
t_1 / ºC	t_2 / ºC	t / ºC
94,5	95,5	—
95,5	96,5	—
96,5	97,5	96,90
97,5	98,5	98,18; 98,25
98,5	99,5	98,61; 99,30; 99,49
99,5	100,5	99,56; 99,74; 99,89; 100,07; 100,33; 100,42
100,5	101,5	100,68; 100,95; 101,11; 101,20
101,5	102,5	101,57; 101,48; 102,36
102,5	103,5	102,72
103,5	104,5	—
104,5	105,5	—

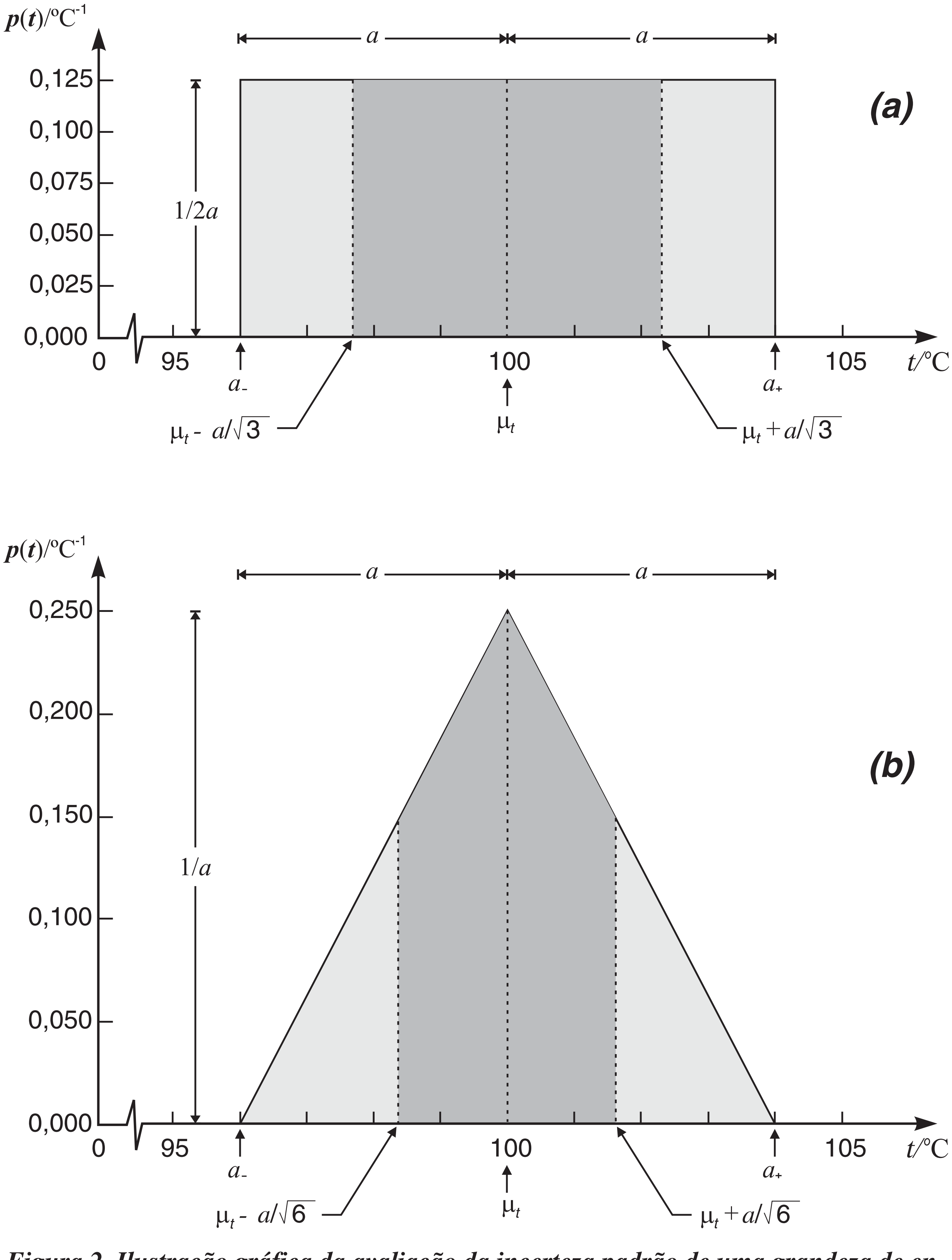


Figura 2. Ilustração gráfica da avaliação da incerteza padrão de uma grandeza de entrada a partir de uma distribuição a priori

Como indicado em 4.3.9, a esperança de t é $\mu_t = (a_+ + a_-)/2 = 100$ ºC, que decorre de C.3.1. A incerteza padrão dessa estimativa é $u(\mu_t) = a/\sqrt{6} \approx 1{,}6$ ºC que decorre de C.3.2 [ver a equação (9b)].

Este último valor, $u(\mu_t) = 1{,}6$ ºC, pode ser comparado com $u(\mu_t) = 2{,}3$ ºC, obtido em 4.4.5, a partir de uma distribuição retangular de mesma largura de 8 ºC, com $\sigma = 1{,}5$ ºC da distribuição normal da figura (1a) cuja largura de $-2{,}58\sigma$ a $+2{,}58\sigma$, que abrange 99 por cento da distribuição, é quase 8 ºC; com uma dispersão de $u(\bar{t}) = 0{,}33$ ºC obtida em 4.4.3, a partir de vinte observações supostamente tomadas aleatoriamente a partir da mesma distribuição normal.

5 Determinando a incerteza padrão combinada

5.1 Grandezas de entrada não correlacionadas

Este item trata do caso em que todas as grandezas de entrada são **independentes** (C.3.7). O caso em que duas ou mais grandezas de entrada são relacionadas, isto é, são interdependentes ou **correlacionadas**, (C.2.8) é discutido em 5.2.

5.1.1 A incerteza padrão de y, onde y é a estimativa do mensurando Y, e desta maneira, o resultado da medição, é obtida pela combinação apropriada de incertezas padrão das estimativas de entrada $x_1,x_2,...,x_N$ (ver 4.1). Esta *incerteza padrão combinada* da estimativa y é representada por $u_c(y)$.

NOTA - Por razões similares àquelas dadas na nota 4.3.1, os símbolos $u_c(y)$ e $u_c^2(y)$ são usados em todos os casos.

5.1.2 A incerteza padrão combinada $u_c(y)$ é a raiz quadrada positiva da variância combinada $u_c^2(y)$, que é dada por:

$$u_c^2(y) = \sum_{i=1}^{N} \left[\frac{\partial f}{\partial x_i}\right]^2 u^2(x_i) \qquad (10)$$

onde f é a função dada na equação(1). Cada $u(x_i)$ é uma incerteza padrão avaliada como descrito em 4.2 (avaliação Tipo A) ou em 4.3 (avaliação Tipo B). A incerteza padrão combinada $u_c(y)$ é um desvio padrão estimado e caracteriza a dispersão dos valores que poderiam, razoavelmente, ser atribuídos ao mensurando Y (ver 2.2.3).

A equação (10) e sua correspondente para grandezas de entrada correlacionadas, equação (13), ambas baseadas numa aproximação de primeira ordem da série de Taylor de $Y = f(X_1, X_2, ..., X_N)$, expressam o que é denominado, neste *Guia*, como a *lei de propagação da incerteza* (ver E.3.1 e E.3.2).

NOTA - Quando a não-linearidade de f é significativa, termos de ordem superior devem ser incluídos na expansão da série de Taylor para a expressão de $u_c^2(y)$, equação (10). Quando a distribuição de cada X_i é simétrica em relação à sua média, os termos mais importantes, de ordem imediatamente superior, para serem adicionados aos termos da equação (10) são:

$$\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\left[\frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\,\partial x_j}\right]^2 + \frac{\partial f}{\partial x_i}\,\frac{\partial^3 f}{\partial x_i\,\partial x_j^2}\right] u^2(x_i)\,u^2(x_j)$$

Veja H.1 para um exemplo de uma situação na qual é necessário considerar a contribuição de termos de ordem superior para u_c^2(y).

5.1.3 As derivadas parciais $\partial f / \partial x_i$ são iguais a $\partial f / \partial X_i$ avaliadas para $X_i = x_i$ [ver a nota 1 a seguir]. Estas derivadas, freqüentemente denominadas coeficientes de sensibilidade, descrevem como a estimativa de saída y varia com alterações nos valores das estimativas de entrada $x_1, x_2, ...,x_N$. Em particular, a alteração em y, produzida por uma pequena variação Δx_i na estimativa de entrada x_i , é dada por $(\Delta y)_i = (\partial f / \partial x_i)(\Delta x_i)$. Se esta alteração é gerada pela incerteza padrão da estimativa x_i, a variação correspondente em y é $(\partial f / \partial x_i)\,u(x_i)$. A variância combinada $u_c^2(y)$ pode, desse modo, ser vista como a soma de termos, onde cada um deles representa a variância estimada associada com a estimativa de saída y gerada pela variância estimada, associada com cada estimativa de entrada x_i. Isso sugere que se escreva a equação (10) como:

$$u_c^2(y) = \sum_{i=1}^{N} \left[c_i\, u(x_i)\right]^2 \equiv \sum_{i=1}^{N} u_i^2(y) \qquad (11a)$$

onde:

$$c_i \equiv \partial f / \partial x_i\ , \qquad u_i(y) \equiv |c_i|\, u(x_i) \qquad (11b)$$

NOTAS

1 Estritamente falando, as derivadas parciais são $\partial f / \partial x_i = \partial f / \partial X_i$ avaliadas para as esperanças de X_i. Contudo, na prática, as derivadas parciais são estimadas por:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial X_i}\bigg|_{x_1, x_2, \ldots, x_N}$$

2 A incerteza padrão combinada $u_c(y)$ pode ser calculada numericamente, substituindo-se $c_i u(x_i)$, na equação (11a), com:

$$Z_i = \frac{1}{2}\,[f(x_1,\ldots,x_i + u(x_i),\ldots,x_N)$$

$$- f(x_1,\ldots,x_i - u(x_i),\ldots,x_N)]$$

Isto é, $u_i(y)$ é avaliada numericamente, calculando-se a variação em y devido a uma variação em x_i de $+u(x_i)$ e de $-u(x_i)$. O valor de $u_i(y)$ pode, então, ser tomado como $|Z_i|$, e o valor do coeficiente de sensibilidade correspondente c_i, como $Z_i/u(x_i)$.

Exemplo - Para o exemplo de 4.1.1, usando o mesmo símbolo tanto para a grandeza como para sua estimativa, para maior simplicidade de notação:

$$c_1 \equiv \partial P / \partial V = 2V/R_0\,[1 + \alpha\,(t - t_0)] = 2P/V$$

$$c_2 \equiv \partial P/\partial R_0 = - V^2/R_0^2[1 + \alpha\,(t - t_0)] = -P/R_0$$

$$c_3 \equiv \partial P / \partial \alpha = -V^2(t - t_0)/R_0\,[1 + \alpha\,(t - t_0)]^2$$

$$= -P(t - t_0) / [1 + \alpha\,(t - t_0)]$$

$$c_4 \equiv \partial P / \partial t = -V^2\alpha/R_0[1 + \alpha\,(t - t_0)]^2$$

$$= -P\alpha/[1 + \alpha\,(t - t_0)]$$

e:

$$u^2(P) = \left[\frac{\partial P}{\partial V}\right]^2 u^2(V) + \left[\frac{\partial P}{\partial R_0}\right]^2 u^2(R_0)$$

$$+ \left[\frac{\partial P}{\partial \alpha}\right]^2 u^2(\alpha) + \left[\frac{\partial P}{\partial t}\right]^2 u^2(t)$$

$$= [c_1 u(V)]^2 + [c_2 u(R_0)]^2 + [c_3 u(\alpha)]^2 + [c_4 u(t)]^2$$

$$= u_1^2(P) + u_2^2(P) + u_3^2(P) + u_4^2(P)$$

5.1.4 Em vez de serem calculados pela função f, os coeficientes de sensibilidade $\partial f / \partial x_i$ são, por vezes, determinados experimentalmente: mede-se a variação em Y causada por uma variação em um dado X_i, enquanto se mantêm constantes as grandezas de entrada restantes. Neste caso, o conhecimento da função f (ou de uma parte desta função, quando alguns coeficientes de sensibilidade são assim determinados) é, de forma correspondente, reduzido a uma expansão empírica de primeira ordem da série de Taylor, baseada nos coeficientes de sensibilidade medidos.

5.1.5 Se a equação (1) para o mensurando Y é expandida, em torno dos valores nominais $X_{i,0}$ das grandezas de entrada X_i , então, até a primeira ordem (o que é, geralmente, uma aproximação adequada), $Y = Y_0 + c_1\delta_1 + c_2\delta_2 + \ldots + c_N\,\delta_N$, onde $Y_0 = f(X_{1,0}, X_{2,0}, \ldots X_{N,0})$, $c_i = (\partial f / \partial X_i)$ avaliado em $X_i = X_{i,0}$ e $\delta_i = X_i = X_{i,0}$. Assim, para fins de uma análise de incerteza, um mensurando é, usualmente, aproximado por uma função linear de suas variáveis, transformando-se suas grandezas de entrada de X_i para δ_1 (ver E.3.1).

EXEMPLO - No exemplo 2 de 4.3.7, a estimativa do valor do mensurando V é $V = \overline{V} + \Delta\overline{V}$, onde $\overline{V} = 0{,}928\ 571$ V, $u(\overline{V}) = 12\ \mu$V, a correção aditiva $\Delta\overline{V} = 0$, e $u(\Delta\overline{V}) = 8{,}7\ \mu$V. Uma vez que $\partial V / \partial\overline{V} = 1$ e $\partial V / \partial(\Delta\overline{V}) = 1$, a variância combinada associada com V é dada por:

$$u_c^2(V) = u^2(\overline{V}) + u^2(\Delta\overline{V}) = (12\mu\text{V})^2 + (8{,}7\ \mu\text{V})^2 =$$

$$= 219 \times 10^{-12}\,\text{V}^2$$

e a incerteza padrão combinada é $u_c(V) = 15\ \mu V$, que corresponde a uma incerteza padrão combinada relativa $u_c(V)/V$ de 16×10^{-6} (ver 5.1.6). Este é um exemplo do caso em que o mensurando já é uma função linear das grandezas das quais depende, com coeficientes $c_i = +1$. Segue da equação (10) que, se $Y = c_1X_1 + c_2X_2 + \ldots + c_NX_N$ e se as constantes $c_i = +1$ ou -1, então $u_c^2(y) = \Sigma_{i=1}^N\, u^2(x_i)$.

5.1.6 Se Y é da forma $Y = c\,X_1^{p_1}\ X_2^{p_2} \ldots X_N^{p_N}$ e os expoente p_i são números positivos ou negativos conhecidos, tendo incertezas desprezíveis, a variância combinada, equação (10), pode ser expressa por:

$$[u_c(y)/y]^2 = \sum_{i=1}^{N}\ [p_i u(x_i)/x_i\,]^2 \qquad (12)$$

Esta equação é da mesma forma que (11a), mas com a variância combinada $u_c^2(y)$, expressa como uma *variância combinada relativa* $[u_c(y)/y]^2$, e a variância estimada $u^2(x_i)$, associada com cada estimativa de entrada expressa como uma *variância relativa estimada* $[u(x_i)/x_i]^2$ [*A incerteza padrão combinada relativa* é $u_c(y)/|y|$, e a *incerteza padrão relativa* de cada estimativa de entrada é $u(x_i)/|x_i|$, $|y| \neq 0$ e $|x_i| \neq 0$].

NOTAS

1 Quando Y tem esta forma, sua transformação em uma função linear de variáveis (ver 5.1.5) é prontamente obtida, fazendo-se

$X_i = X_{i,0}(1 + \delta_i)$, pois resulta a seguinte relação aproximada: $(Y - Y_0) / Y_0 = \Sigma_{i=1}^{N} p_i \delta_i$. Por outro lado, a transformação logarítmica Z = ln Y e W_i = ln X_i leva a uma linearização exata em termos das novas variáveis: $Z = \ln c + \Sigma_{i=1}^{N} p_i W_i$.

2 Se cada p_i é igual a -1 ou +1, a equação (12) torna-se $[u_c(y)/y]^2 = \Sigma_{i=1}^{N} [u(x_i) / x_i]^2$, o que mostra que, para este caso especial, a variância combinada relativa, associada à estimativa y, é simplesmente igual à soma das variâncias relativas estimadas, associadas com as estimativas de entrada x_i.

5.2 Grandezas de entrada correlacionadas

5.2.1 A equação (10) e as equações dela decorrentes, tais como as equações (11) e (12), são válidas somente se as grandezas de entrada X_i são independentes ou não-correlacionadas (as variáveis aleatórias, não as grandezas físicas que são supostas como sendo invariantes - ver 4.1.1, nota 1). Se algum dos X_i são significativamente correlacionados, as correlações devem ser levadas em consideração.

5.2.2 Quando as grandezas de entrada são correlacionadas, a expressão apropriada para a variância combinada u_c^2 (y), associada com o resultado de uma medição é:

$$u_c^2(y) = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} u(x_i, x_j)$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \left[\frac{\partial f}{\partial x_i}\right]^2 u^2(x_i) \qquad (13)$$

$$+ 2 \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^{N} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} u(x_i, x_j)$$

onde x_i e x_j são as estimativas de X_i e X_j e $u(x_i, x_j) = u(x_j, x_i)$ é a covariância estimada, associada com x_i e x_j. O grau de correlação entre x_i e x_j é caracterizado pelo **coeficiente de correlação** estimado (C.3.6):

$$r(x_i, x_j) = \frac{u(x_i, x_j)}{u(x_i)\, u(x_j)} \qquad (14)$$

onde $r(x_i, x_j) = r(x_j, x_i)$ e $-1 \le r(x_i, x_j) \le +1$. Se as estimativas x_i, x_j são independentes, $r(x_i, x_j) = 0$ e a variação numa delas não implica em uma variação esperada na outra (ver C.2.8, C.3.6 e C.3.7 para discussão adicional).

Em termos de coeficientes de correlação, que são mais prontamente interpretados do que covariâncias, o termo de covariância da equação (13) pode ser escrito como:

$$2 \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^{N} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} u(x_i)\, u(x_j)\, r(x_i, x_j) \qquad (15)$$

Assim, a equação (13) torna-se, com o auxílio da equação (11b):

$$u_c^2(y) = \sum_{i=1}^{N} c_i^2\, u^2(x_i) + 2 \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^{N} c_i c_j u(x_i)\, u(x_j)\, r(x_i, x_j) \qquad (16)$$

NOTAS

1 Para o caso muito especial em que *todas* as estimativas de entrada são correlacionadas, com coeficientes de correlação $r(x_i,x_j) = +1$, a equação (16) se reduz a:

$$u_c^2(y) = \left[\sum_{i=1}^{N} c_i u(x_i)\right]^2 = \left[\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial f}{\partial x_i} u(x_i)\right]^2$$

A incerteza padrão combinada $u_c(y)$ é, então, simplesmente *uma soma linear* dos termos, representando a variação da estimativa de saída y, gerada pela incerteza padrão de cada estimativa de entrada x_i (ver 5.1.3). [Esta soma linear não deve ser confundida com a lei geral de propagação de erros, embora tenha uma forma similar; as incertezas padrão não são erros (ver E.3.2)].

EXEMPLO - Dez resistores, cada um com uma resistência nominal de R_i= 1000 Ω , são calibrados com uma incerteza de comparação desprezível, em termos de um mesmo resistor padrão R_S de 1000 Ω, caracterizado por uma incerteza padrão $u(R_S)$ = 100 mΩ, tal como apresentado em seu certificado de calibração. Os resistores são conectados em série com fios de resistência desprezível, de forma a se obter uma resistência de referência R_{ref} de valor nominal de 10 kΩ . Assim, $R_{\text{ref}} = f(R_i) = \Sigma_{i=1}^{10} R_i$. Já que $r(x_i,x_j) = r(R_i, R_j) = +1$ para cada par de resistores (veja F.1.2.3, exemplo 2), a equação desta nota se aplica. Como para cada resistor $\partial f / \partial x_i = \partial R_{ref} / \partial R_i = 1$ e $u(x_i) = u(R_i) = u(R_S)$ (ver F.1.2.3, exemplo 2), esta equação produz a incerteza padrão combinada de R_{ref}, $u_c(R_{\text{ref}}) = \Sigma_{i=1}^{10} u(R_S)$ = 10 x (100 mΩ) = 1 Ω . O resultado $u_c(R_{\text{ref}}) = [\Sigma_{i=1}^{10} u^2(R_S)]^{1/2}$ = 0,32 Ω obtido da equação (10) é incorreto, pois não leva em conta que todos os valores calibrados dos dez resistores são correlacionados.

2 As variâncias estimadas $u^2(x_i)$ e as covariâncias estimadas $u(x_i,x_j)$ podem ser consideradas como os elementos de uma matriz de covariância com elementos u_{ij}. Os elementos da diagonal u_{ii} da matriz são as variâncias $u^2(x_i)$, enquanto que os elementos fora da diagonal u_{ij} ($i \neq j$) são as covariâncias $u(x_i,x_j) = u(x_j,x_i)$. Se duas estimativas de entrada não são correlacionadas, a sua covariância associada e os elementos correspondentes u_{ij} e u_{ji} da matriz de covariância são 0 (zero). Se as estimativas de entrada são todas não correlacionadas, todos os elementos fora da diagonal são zero e a matriz de covariância é diagonal (ver também C.3.5).

3 Para fins de avaliação numérica, a equação (16) pode ser escrita como:

$$u_c^2(y) = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} Z_i \, Z_j \, r(x_i, x_j)$$

onde Z_i é dado em 5.1.3, nota 2.

4 Se os X_i da forma especial considerada em 5.1.6 são correlacionados, então os termos:

$$2 \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^{N} [p_i u(x_i)/x_i][p_j u(x_j)/x_j] r(x_i, x_j)$$

devem ser adicionados ao membro da direita da equação (12).

5.2.3 Considere duas médias aritméticas $\overline{q}$ e $\overline{r}$ que estimam as esperanças μ_q e μ_r de duas grandezas q e r, variando aleatoriamente, e calcule $\overline{q}$ e $\overline{r}$ a partir de n pares independentes de observações simultâneas de q e r, feitas sob as mesmas condições de medição (ver B.2.15). Então a covariância de $\overline{q}$ e $\overline{r}$ é estimada por (ver C.3.4):

$$s(\overline{q}, \overline{r}) = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{k=1}^{n} (q_k - \overline{q})(r_k - \overline{r}) \qquad (17)$$

onde q_k e r_k são as observações individuais das grandezas q e r, e $\overline{q}$ e $\overline{r}$ são calculados a partir das observações, de acordo com a equação (3). Se, de fato, as observações não são correlacionadas, espera-se que a covariância calculada fique próxima de 0.

Assim, a covariância estimada de duas grandezas de entrada correlacionadas X_i e X_j, que são estimadas pelas médias $\overline{X}_i$ e $\overline{X}_j$, determinadas por pares independentes de observações simultâneas repetidas, é dada por $u(x_i, x_j) = s(\overline{X}_i, \overline{X}_j)$, com $s(\overline{X}_i, \overline{X}_j)$ calculado de acordo com a equação (17). Esta aplicação da equação (17) é uma avaliação do Tipo A da covariância. O coeficiente de correlação estimado de $\overline{X}_i$ e $\overline{X}_j$ é obtido da equação (14): $r(x_i, x_j) = r(\overline{X}_i, \overline{X}_j) = s(\overline{X}_i, \overline{X}_j)/s(\overline{X}_i)s(\overline{X}_j)$.

NOTA - Exemplos de situações em que é necessário usar covariâncias, tais como calculadas pela equação (17), são dados em H.2 e H.4.

5.2.4 Pode existir correlação significativa entre duas grandezas de entrada, se os mesmos instrumentos de medição, padrão de medição físico, ou dados de referência, tendo uma incerteza padrão significativa, são usados na sua determinação. Por exemplo, se um certo termômetro é usado para determinar uma correção de temperatura requerida na estimativa do valor de uma grandeza de entrada X_i, e o mesmo termômetro é usado para determinar uma correção similar de temperatura requerida na estimativa da grandeza de entrada X_j, as duas grandezas de entrada poderiam estar significativamente correlacionadas. Contudo, se X_i e X_j, neste exemplo, são redefinidos para serem grandezas não-corrigidas, e as grandezas que definem a curva de calibração para o termômetro estão incluídas como grandezas de entrada adicionais, com incertezas padrão independentes, a correlação entre X_i e X_j é eliminada (veja F.1.2.3 e F.1.2.4 para discussão adicional).

5.2.5 Correlações entre grandezas de entrada não podem ser ignoradas, se estão presentes e são significativas. As covariâncias associadas devem ser avaliadas experimentalmente, se possível, variando-se as grandezas de entrada correlacionadas (ver C.3.6, nota 3) ou usando-se o conjunto de informações disponíveis sobre a variabilidade correlacionada das grandezas em questão (avaliação do Tipo B da covariância). A intuição, baseada em experiência anterior e no conhecimento geral (ver 4.3.1 e 4.3.2), é especialmente requerida quando se estima o grau de correlação entre grandezas de entrada decorrentes do efeito de influências comuns, tais como temperatura ambiente, pressão barométrica e umidade. Felizmente, em muitos casos, os efeitos de tais influências têm interdependência desprezível, e as grandezas de entrada afetadas podem ser supostas como não-correlacionadas. Entretanto, se elas não podem ser supostas como não-correlacionadas, suas próprias correlações podem ser evitadas, se influências comuns são introduzidas como grandezas de entrada independentes adicionais, como indicado em 5.2.4.

6 Determinando a incerteza expandida

6.1 Introdução

6.1.1 A Recomendação INC-1 (1980) do Grupo de Trabalho sobre a Declaração de Incertezas, na qual este *Guia* está baseado (veja a Introdução), e as Recomendações 1 (CI-1981) e 1 (CI-1986) do CIPM, aprovando e ratificando a INC-1 (1980) (ver A.2 e A.3), advogam o uso da incerteza padrão combinada $u_c(y)$ como o parâmetro para expressar quantitativamente a incerteza do resultado de uma medição. De fato, na segunda de suas recomendações, o CIPM solicitou que o que agora é designado de incerteza padrão combinada $u_c(y)$ fosse usado "por todos os participantes no fornecimento de resultados de todas as comparações internacionais ou outros trabalhos feitos sob os auspícios do CIPM e dos seus Comitês Consultivos".

6.1.2 Embora $u_c(y)$ possa ser universalmente usada para expressar a incerteza de um resultado de medição, em algumas aplicações comerciais, industriais e regulamentadoras, e quando a saúde e a segurança estão em questão, é muitas vezes necessário dar uma medida de incerteza, que defina um intervalo em torno do resultado da medição com o qual se espera abranger uma extensa fração da distribuição de valores que poderiam ser razoavelmente atribuídos ao mensurando. A existência desse requisito foi reconhecida pelo Grupo de Trabalho e levou ao parágrafo 5 da Recomendação INC-1 (1980). Ela está também refletida na Recomendação 1 (CI-1986) do CIPM.

6.2 Incerteza expandida

6.2.1 A medida adicional de incerteza que satisfaz o requisito de fornecer um intervalo do tipo indicado em 6.1.2 é denominada *incerteza expandida* e é representada por U. A incerteza expandida U é obtida, multiplicando-se a incerteza padrão combinada $u_c(y)$ por um *fator de abrangência k*:

$$U = ku_c(y) \tag{18}$$

O resultado de uma medição é, então, convenientemente expresso como $Y = y \pm U$, que é interpretado de forma a significar que a melhor estimativa do valor atribuível ao mensurando Y é y, e que $y - U$ a $y + U$ é um intervalo com o qual se espera abranger uma extensa fração da distribuição de valores que podem ser razoavelmente atribuídos a Y. Tal intervalo é também expresso como $y - U \leq Y \leq y + U$.

6.2.2 Os termos **intervalo de confiança** (C.2.27, C.2.28) e **nível de confiança** (C.2.29) têm definições específicas em estatística e são somente aplicáveis a intervalos definidos por U, quando certas condições são atendidas, incluindo a de que todos os componentes de incerteza que contribuem para $u_c(y)$ sejam obtidos de avaliações do Tipo A. Portanto, neste *Guia*, o termo "confiança" não é utilizado para modificar o termo "intervalo" quando se refere ao intervalo definido por U. Pela mesma razão o termo "nível de confiança" (confidence level) não é usado em conexão com aquele intervalo, mas sim o termo "nível da confiança" (level of confidence). Mais especificamente, U é interpretado como definindo um intervalo em torno do resultado de medição que abrange uma extensa fração p da distribuição de probabilidade, caracterizada por aquele resultado e sua incerteza padrão combinada, e p é a *probabilidade de abrangência* ou *nível da confiança* do intervalo.

6.2.3 Sempre que praticável, o nível da confiança p, associado com o intervalo definido por U, deve ser estimado e declarado. Deve ser reconhecido que, multiplicando-se $u_c(y)$ por uma constante, não há acréscimo de informação nova, mas a informação, previamente disponível, é apresentada de forma diferente. Entretanto, também deve ser reconhecido que, na maioria dos casos, o nível da confiança p (especialmente para valores de p próximos de 1) é um tanto incerto, não somente por causa do conhecimento limitado da distribuição de probabilidade caracterizada, por y e $u_c(y)$ (especialmente nas extremidades), mas também por causa da incerteza da própria $u_c(y)$ (veja nota 2 de 2.3.5, 6.3.2 e o anexo G, especialmente G.6.6).

NOTA - Ver 7.2.2 e 7.2.4, respectivamente, para o modo preferível de se declarar o resultado de uma medição, quando a medida da incerteza é $u_c(y)$ ou U.

6.3 Escolhendo um fator de abrangência

6.3.1 O valor do fator de abrangência k é escolhido com base no nível da confiança requerido para o intervalo $y-U$ a $y+U$. Em geral, k estará entre 2 e 3. Entretanto, para aplicações especiais, k pode estar fora desta faixa. Uma extensa experiência e o conhecimento pleno da utilização que se fará de um resultado de medição poderão facilitar a escolha de um valor apropriado de k.

NOTA - Ocasionalmente, pode-se achar que uma correção conhecida b, para um efeito sistemático, não tenha sido aplicada ao resultado relatado de uma medição, mas, em vez disso, foi realizada uma tentativa de se levar em conta o efeito, aumentando a "incerteza" associada ao resultado. Isto deve ser evitado; somente em circunstâncias muito especiais, correções para efeitos sistemáticos significativos conhecidos não devem ser aplicadas ao resultado de uma medição (ver F.2.4.5 para um caso específico e o modo de tratá-lo). A avaliação da incerteza de um resultado de medição não deve ser confundida com o estabelecimento de um limite de segurança associado a uma determinada grandeza.

6.3.2 Em tese, pode-se querer estar apto a escolher um valor específico do fator de abrangência k que proporcionaria um intervalo $Y = y \pm U = y \pm ku_c(y)$ correspondente a um dado nível da confiança p, tal como 95 ou 99 por cento; da mesma forma, para um dado valor de k, seria interessante estabelecer, inequivocamente, um nível da confiança associado com aquele intervalo. Entretanto, isso não é fácil de se fazer na prática, porque requer um extenso conhecimento da distribuição de probabilidade caracterizada pelos resultados de medição y e sua incerteza padrão combinada $u_c(y)$. Embora esses parâmetros sejam de importância crítica, eles são, por si próprios, insuficientes para o propósito de estabelecer intervalos tendo níveis da confiança exatamente conhecidos.

6.3.3 A Recomendação INC-1 (1980) não especifica como a relação entre k e p deve ser estabelecida. Esse problema é discutido no Anexo G, e um método preferível para sua solução aproximada é apresentado em G.4 e resumido em G.6.4. Entretanto, uma aproximação mais simples, discutida em G.6.6, é freqüentemente adequada para situações de medição onde a distribuição de probabilidade, caracterizada por y e $u_c(y)$, é aproximadamente normal e os graus de liberdade efetivos de $u_c(y)$ são de tamanho significativo. Quando este for o caso, o que ocorre freqüentemente na prática, pode-se supor que, tomando k=2, é produzido um intervalo tendo um nível da confiança de aproximadamente 95 por cento, e que, tomando k=3, é produzido um intervalo tendo um nível da confiança de aproximadamente 99 por cento.

NOTA - Um método para estimar os graus de liberdade efetivos de $u_c(y)$ é dado em G.4. A tabela G.2 do anexo G pode, então, ser usada para auxiliar a decidir se esta solução é apropriada para uma medição em particular (ver G.6.6).

7 Relatando a incerteza

7.1 Orientação Geral

7.1.1 Em geral, quando se sobe na hierarquia da medição, mais detalhes são requeridos sobre como um resultado de medição e sua incerteza foram obtidos. Entretanto, em qualquer nível desta hierarquia, incluindo atividades comerciais e reguladoras no mercado, trabalhos de engenharia na indústria, instalações de calibração de escalão inferior, pesquisa e desenvolvimento industrial, pesquisa acadêmica, laboratórios de calibração e de padrões primários industriais, laboratórios nacionais de metrologia e o BIPM, todas as informações necessárias para a reavaliação da medição devem estar disponíveis para terceiros, que possam delas precisar. A diferença primária é que nos níveis inferiores da cadeia hierárquica, mais informações necessárias podem estar disponíveis sob a forma de relatórios publicados de sistemas de ensaio e de calibração, especificações de ensaios, certificados de ensaios e de calibração, manuais de instruções, normas internacionais, normas nacionais e regulamentações locais.

7.1.2 Quando os detalhes de uma medição, incluindo o modo como a incerteza do resultado foi avaliada, são fornecidos por meio de referências a documentos publicados, como é freqüentemente o caso quando os resultados de calibração são relatados em um certificado, é imperativo que essas publicações sejam mantidas atualizadas, de forma que sejam consistentes com o procedimento de medição realmente em uso.

7.1.3 Numerosas medições são feitas a cada dia na indústria e no comércio sem nenhum registro explícito da incerteza. Entretanto, muitas são executadas com instrumentos sujeitos a calibrações periódicas ou a inspeção legal. Se é de conhecimento que os instrumentos estão em conformidade com as suas especificações ou com os documentos normativos existentes e aplicáveis, as incertezas de suas indicações podem ser inferidas, a partir destas especificações ou daqueles documentos normativos.

7.1.4 Embora na prática o montante de informações necessárias para documentar um resultado de medição dependa da sua utilização pretendida, o princípio básico sobre o que é requerido permanece inalterado: quando se registra o resultado de uma medição e a sua incerteza, é preferível errar, por excesso, no fornecimento de informações a fornecê-las com escassez. Por exemplo, deve-se:

a) descrever claramente os métodos utilizados para calcular o resultado da medição e sua incerteza, a partir de observações experimentais e dados de entrada;

b) listar todos os componentes da incerteza e documentar amplamente como foram avaliados;

c) apresentar a análise dos dados, de tal forma que cada um dos passos importantes possa ser prontamente seguido e que os cálculos do resultado relatado possam ser independentemente repetidos, se necessário;

d) fornecer todas as correções e constantes utilizadas na análise e suas fontes.

Um modo de se verificar a lista acima é perguntar-se a si próprio: “Terei eu fornecido suficiente informação de maneira suficientemente clara, de modo tal que meu resultado possa ser atualizado no futuro, se novas informações ou dados se tornarem disponíveis?”

7.2 Orientação específica

7.2.1 Quando se relata o resultado de uma medição e a medida da incerteza é a incerteza padrão combinada $u_c(y)$, deve-se:

a) fornecer uma descrição completa de como o mensurando Y é definido;

b) fornecer a estimativa y do mensurando Y e sua incerteza padrão combinada $u_c(y)$; as unidades de y e de $u_c(y)$ devem ser sempre fornecidas;

c) incluir a incerteza padrão combinada relativa $u_c(y) / |y|, |y| \neq 0$, quando apropriado;

d) fornecer a informação descrita em 7.2.7 ou fazer referência a documentos publicados que a contenha.

Se for julgado útil aos pretensos usuários do resultado da medição, por exemplo, para ajudá-los em futuros cálculos de fatores de abrangência, ou para auxiliá-los a compreender a medição, pode-se indicar:

- os graus de liberdade efetivos estimados ν_{eff} (ver G.4);
- as incertezas padrão combinadas Tipo A e Tipo B, $u_{cA}(y)$ e $u_{cB}(y)$, e os seus graus de liberdade efetivos estimados ν_{effA} e ν_{effB} (ver G.4.1, nota 3).

7.2.2 Quando a medida da incerteza é $u_c(y)$, é preferível declarar o resultado numérico da medição de uma dentre as quatro maneiras seguintes, de modo a evitar uma má compreensão (a grandeza cujo valor está sendo relatado é suposta como uma massa m_s de um padrão de massa nominal de 100 g; as palavras entre parênteses podem ser omitidas para simplicidade, se u_c está definida em alguma outra parte do documento, relatando o resultado).

1) "m_s = 100,021 47 g com u_c = 0,35 mg (uma incerteza padrão combinada)".

2) "m_s = 100,021 47(35) g, onde o número entre parênteses é o valor numérico de u_c (incerteza padrão combinada) referido aos últimos dígitos correspondentes do resultado mencionado".

3) "m_s = 100,021 47 (0,00035) g, onde o número entre parênteses é o valor numérico de u_c (incerteza padrão combinada) expresso na unidade do resultado mencionado".

4) "m_s = (100,021 47 ± 0,000 35) g, onde o número após o simbolo ± é o valor numérico de u_c (incerteza padrão combinada) e não um intervalo de confiança".

NOTA - O formato ± deve ser evitado sempre que for possível, pois tem sido tradicionalmente usado para indicar um intervalo correspondente a um alto nível da confiança e, assim, poderá ser confundido com a incerteza expandida (ver 7.2.4). Além disso, embora o objetivo do alerta dado em 4) seja impedir tal confusão, escrevendo-se $Y = y \pm u_c(y)$ pode ainda ser mal interpretado, inferindo-se que isso representa, especialmente quando o alerta é omitido acidentalmente, que uma incerteza expandida com k=1 é pretendida, e que o intervalo $y - u_c(y) \leq Y \leq y + u_c(y)$ tem um nível da confiança p especificado, especialmente aquele associado com a distribuição normal (ver G.1.3). Como indicado em 6.3.2 e no anexo G, a interpretação de $u_c(y)$, dessa maneira, é, geralmente, difícil de justificar.

7.2.3 Quando se relata o resultado de uma medição, e quando a medida da incerteza é a incerteza expandida $U = k\,u_c(y)$, deve-se:

a) fornecer uma descrição completa de como o mensurando Y é definido;

b) expressar o resultado de medição como $Y = y \pm U$ e fornecer as unidades de y e U;

c) incluir a incerteza expandida relativa $U / |y|, |y| \neq 0$, quando apropriado;

d) fornecer o valor de k usado para obter U [ou, para conveniência do usuário do resultado, fornecer ambos, k e $u_c(y)$];

e) fornecer o nível da confiança aproximado associado com o intervalo $y \pm U$ e explicar como foi determinado;

f) fornecer a informação descrita em 7.2.7 ou referir-se a um documento publicado que a contenha.

7.2.4 Quando a medida da incerteza é U, é preferível, para máxima clareza, declarar o resultado numérico da medição, como no exemplo seguinte. (As palavras entre parênteses podem ser omitidas para maior simplicidade, se U, u_c e k estão definidos em alguma outra parte do documento relatando o resultado).

"m_s = (100,021 47 ± 0,000 79)g, onde o número após o símbolo ± é o valor numérico de $U = ku_c$ (uma incerteza expandida) com U determinado por u_c = 0,35 mg (uma incerteza padrão combinada) e k = 2,26 (um fator de abrangência) baseado na distribuição-t, para ν = 9 graus de liberdade. U define um intervalo estimado para ter um nível da confiança de 95 por cento".

7.2.5 Se uma medição determina, simultaneamente, mais de um mensurando, isto é, se ela fornece duas ou mais estimativas de saída y_i (ver H.2, H.3 e H.4), então, além de fornecer y_i e $u_c(y_i)$, forneça os elementos da matriz de covariância $u(y_i, y_j)$ ou os elementos $r(y_i, y_j)$ da **matriz de**

coeficientes de correlação (C3.6, nota 2) (preferivelmente, forneça ambas as matrizes).

7.2.6 Os valores numéricos da estimativa y e sua incerteza padrão $u_c(y)$ ou incerteza expandida U não devem ser fornecidos com um número excessivo de algarismos. É geralmente suficiente fornecer $u_c(y)$ e U [assim como as incertezas padrão $u(x_i)$ das estimativas de entrada x_i] com até no máximo dois algarismos significativos, embora, em alguns casos, seja necessário reter algarismos adicionais para evitar erros de arredondamento nos cálculos subseqüentes.

Ao relatar resultados finais, pode, às vezes, ser apropriado arredondar incertezas para cima, em vez de arredondar até o algarismo mais próximo. Por exemplo, $u_c(y)$ = 10,47 mΩ pode ser arredondada para 11 mΩ . Entretanto deve prevalecer o bom senso, e um valor como $u(x_i)$ = 28,05 kHz deve ser arredondado para baixo, para 28 kHz. As estimativas de entrada e de saída devem ser arredondadas para ficarem consistentes com suas incertezas; por exemplo, se y = 10,057 62 Ω com $u_c(y)$ = 27 mΩ , y deve ser arredondado para 10,058 Ω. Os coeficientes de correlação devem ser dados com exatidão de três algarismos, se seus valores absolutos estão próximos da unidade.

7.2.7 No relatório detalhado que descreve como o resultado da medição e sua incerteza foram obtidos, devem-se seguir as recomendações de 7.1.4 e, assim:

a) fornecer o valor de cada estimativa de entrada x_i e de sua incerteza padrão $u(x_i)$ juntamente com uma descrição sobre como eles foram obtidos;

b) fornecer as covariâncias estimadas ou os coeficientes de correlação estimados (preferencialmente ambos), associados com todas as estimativas de entrada que são correlacionadas, e os métodos utilizados para obtê-los;

c) fornecer os graus de liberdade da incerteza padrão para cada estimativa de entrada e como eles foram obtidos;

d) fornecer a relação funcional $Y = f(X_1,X_2,...,X_N)$ e, quando consideradas úteis, as derivadas parciais ou coeficientes de sensibilidade $\partial f / \partial x_i$. Entretanto, quaisquer desses coeficientes determinados experimentalmente devem ser fornecidos.

NOTA - Como a relação funcional f pode ser extremamente complexa ou não existir explicitamente, a não ser como um programa de computador, pode ser impossível fornecer f e suas derivadas. A função f pode, então, ser descrita em termos gerais, ou o programa usado pode ser citado por meio de uma referência apropriada. Nestes casos, é importante que esteja claro como a estimativa y do mensurando Y e sua incerteza padrão combinada $u_c(y)$ foram obtidas.

8 Resumo do procedimento para avaliação e expressão da incerteza

Os passos a serem seguidos na avaliação e expressão da incerteza do resultado de uma medição, tais como apresentados neste *Guia*, podem ser resumidos como se segue:

1. Expresse, matematicamente, a relação entre o mensurando Y e as grandezas de entrada X_i das quais Y depende: $Y = f(X_1 , X_2 , ... , X_N)$. A função f deverá conter todas as grandezas, incluindo todas as correções e fatores de correção, que possam contribuir com uma componente significativa de incerteza para o resultado da medição (ver 4.1.1 e 4.1.2).

2. Determine x_i, o valor estimado da grandeza de entrada X_i, seja com base em análise estatística de uma série de observações ou por outros meios (ver 4.1.3).

3. Avalie a *incerteza padrão* $u(x_i)$ de cada estimativa de entrada x_i. Para uma estimativa de entrada obtida através de análise estatística de uma série de observações, a incerteza padrão é avaliada como descrito em 4.2 (*avaliação Tipo A da incerteza padrão*). Para uma estimativa de entrada obtida por outros meios, a incerteza padrão $u(x_i)$ é avaliada como descrito em 4.3 (*avaliação Tipo B da incerteza padrão*).

4. Avalie as covariâncias associadas com quaisquer estimativas de entrada que sejam correlacionadas (ver 5.2).

5. Calcule o resultado da medição, isto é, a estimativa y do mensurando Y, a partir da relação funcional f, utilizando como grandezas de entrada X_i as estimativas x_i, obtidas no passo 2 (ver 4.1.4).

6. Determine a *incerteza padrão combinada* $u_c(y)$ do resultado da medição y, a partir das incertezas padrão e covariâncias associadas com as estimativas de entrada, como descrito no capítulo 5. Se a medição determina, simultaneamente, mais de uma grandeza de saída, calcule suas covariâncias (ver 7.2.5, H.2, H.3 e H.4).

7. Se for necessário fornecer uma *incerteza expandida* U, cujo propósito é fornecer um intervalo $y - U$ a $y + U$ com o qual se espera abranger uma extensa fração da distribuição dos valores que possam razoavelmente ser atribuídos ao mensurando Y, multiplique a incerteza padrão combinada $u_c(y)$ por um *fator de abrangência* k, tipicamente na faixa de 2 a 3, para obter $U = ku_c(y)$. Selecione k com base no nível da confiança requerido do intervalo (ver 6.2, 6.3 e, especialmente, o anexo G, que trata da seleção de um valor de k que produz um intervalo tendo um nível da confiança próximo de um valor especificado).

8 Relate o resultado da medição y juntamente com sua incerteza padrão $u_c(y)$ ou incerteza expandida U, como tratado em 7.2.1 e 7.2.3; use um dos formatos recomendados em 7.2.2 e 7.2.4. Descreva, como delineado também no capítulo 7, como y e $u_c(y)$ ou U foram obtidos.

Anexo A
Recomendações do Grupo de Trabalho e da CIPM

A.1 Recomendações INC-1 (1980)

O Grupo de Trabalho sobre a Declaração de Incertezas (ver o Prefácio) foi convocado, em Outubro de 1980, pelo Bureau Internacional de Pesos e Medidas (BIPM), em resposta à solicitação do Comitê Internacional de Pesos e Medidas (CIPM). Este Grupo preparou um relatório detalhado para ser submetido ao CIPM, que concluiu com a Recomendação INC-1 (1980) [2]. A tradução para o português desta Recomendação é fornecida no item 0.7 deste *Guia*, e o texto em francês, que é oficial, é o seguinte [2]:

Expression des incertitudes expérimentales

Recommandation INC-1 (1980)

1. L'incertitude d´un résultat de mesure comprend généralement plusieurs composantes qui peuvent être groupées en deux catégories d'après la méthode utilisée pour estimer leur valeur numérique:

   A. celles qui sont évaluées à l'aide de méthodes statistiques.

   B. celles qui sont évaluées par d'autres moyens.

Il n'y a pas toujours une correspondance simple entre le classement dans les catégories A ou B et le caractère <<aléatoire>> ou <<systématique>> utilisé antérieurement pour classer les incertitudes. L'expression <<incertitude systématique>> est susceptible de conduire à des erreurs d'interprétation: elle doit être évitée.

Toute description détaillée de l'incertitude devrait comprendre une liste complète de ses composantes et indiquer pour chacune la méthode utilisée pour lui attribuer une valeur numérique.

2. Les composantes de la catégorie A sont caractérisées par les variances estimées s_i^2 (ou les << écarts-types >> estimés s_i) et les nombres ν_i de degrés de liberté. Le cas échéant, les covariances estimées doivent être données.

3. Les composantes de la catégorie B devraient être caractérisées par des termes u_j^2 qui puissent être considérés comme des approximations des variances correspondantes dont on admet l'existence. Les termes u_j^2 peuvent être traités comme des variances et les termes u_j comme des écarts-types. Le cas échéant, les covariances doivent être traitées de façon analogue.

4. L'incertitude composée devrait être caractérisée par la valeur obtenue en appliquant la méthode usuelle de combinaison des variances. L'incertitude composée ainsi que ses composantes devraient être exprimées sous la forme d'<<écart-types>>.

5. Si pour des utilisations particulières on est amené à multiplier par un facteur l'incertitude composée afin d'obtenir une incertitude globale, la valeur numérique de ce facteur doit toujours être donnée.

A.2 Recomendação 1 (CI-1981)

O CIPM reviu o relatório que lhe foi submetido pelo Grupo de Trabalho sobre a Declaração de Incertezas e adotou as seguintes recomendações na sua 70ª reunião, ocorrida em outubro de 1981 [3]:

Recomendação 1 (CI-1981)

Expressão de incertezas experimentais

O Comitê Internacional de Pesos e Medidas

considerando

- a necessidade de encontrar um consenso na expressão da incerteza de medição na metrologia,
- o esforço que tem sido dedicado a isso por muitas organizações ao longo de muitos anos,
- o encorajador progresso feito na procura de uma solução aceitável, que resultou das discussões do Grupo de Trabalho sobre Expressão das Incertezas, que se reuniu no BIPM em 1980,

reconhece

- que as propostas do Grupo de Trabalho podem formar a base de um eventual acordo sobre a expressão das incertezas,

recomenda

- que as propostas do Grupo de Trabalho tenham ampla divulgação;
- que o BIPM tente aplicar os princípios nelas contidos para as comparações internacionais a serem realizadas, sob os seus auspícios, nos anos vindouros;
- que outras organizações interessadas sejam encorajadas a examinar e testar essas propostas e dar ciência ao BIPM de seus comentários;
- que, após dois ou três anos, o BIPM faça um novo relatório sobre a aplicação dessas propostas.

A.3 Recomendação 1 (CI-1986)

O CIPM considerou, ainda, o assunto da expressão de incertezas na sua 75ª reunião, ocorrida em outubro de 1986, e adotou a seguinte recomendação [4]:

Recomendação 1 (CI-1986)

Expressão de incertezas no trabalho
executado sob os auspícios do CIPM

O Comitê Internacional de Pesos e Medidas,

considerando a adoção da Declaração de Incertezas da Recomendação INC-1 (1980) pelo Grupo de Trabalho e a adoção pelo CIPM da Recomendação 1 (CI-1981),

considerando que certos membros dos Comitês Consultivos possam querer esclarecimentos sobre esta Recomendação para fins de trabalho que se situe dentro de seu escopo, especialmente no que diz respeito a comparações internacionais,

reconhece que o parágrafo 5 da Recomendação INC-1 (1980) relativo a algumas aplicações, especialmente àquelas com significado comercial, estão sendo agora consideradas por um grupo de trabalho da International Organization for Standardization (ISO), comum à ISO, OIML e IEC, com a concordância e cooperação do CIPM,

solicita que o parágrafo 4 da Recomendação INC-1 (1980) deva ser aplicado por todos os participantes, ao fornecerem os resultados de todas as comparações internacionais ou outro trabalho realizado sob os auspícios do CIPM e de seus Comitês Consultivos, e que seja fornecida a incerteza combinada das incertezas do Tipo A e do Tipo B, em termos de *um desvio padrão*.

Anexo B
Termos metrológicos gerais

B.1 Fonte das definições

As definições dos termos metrológicos gerais relevantes para este *Guia*, que são aqui fornecidas, foram extraídas do *"Vocabulário Internacional de Termos Fundamentais e Gerais de Metrologia"* (abreviado para VIM), segunda edição [6], publicado pela "Organização Internacional de Normalização" (ISO), em nome das sete organizações que apoiaram seu desenvolvimento e designaram os especialistas que o prepararam: Bureau Internacional de Poids e Mesures (BIPM), International Electrotechnical Commission (IEC), International Federation of Clinical Chemistry (IFCC), ISO, International Union of Pure and Applied Chemistry (IUPAC), International Union of Pure and Applied Physics (IUPAP) e a International Organization of Legal Metrology (OIML). O VIM deve ser a primeira fonte a ser consultada sobre as definições dos termos não incluídos neste anexo ou no texto.

NOTA - Alguns termos e conceitos estatísticos básicos são fornecidos no anexo C, enquanto que os termos "valor verdadeiro", "erro" e "incerteza" são discutidos, mais detalhadamente, no anexo D.

B.2 Definições

Como no capítulo 2, nas definições que se seguem, o uso de parênteses em torno de certas palavras de algumas expressões significa que as mesmas podem ser omitidas, se não for passível de causar confusão.

Os termos em negrito, em algumas notas, são termos metrológicos adicionais definidos nessas notas, seja explícita ou implicitamente (ver referência [6]).

B.2.1 grandeza (mensurável) [VIM 1.1]
atributo de um fenômeno, corpo ou substância que pode ser qualitativamente distinguido e quatitativamente determinado

NOTAS

1 O termo "grandeza" pode referir-se a uma grandeza em sentido geral [veja os exemplos em a] ou a uma **grandeza específica** [veja os exemplos em b].

Exemplos

a) grandezas em um sentido geral: comprimento, tempo, massa, temperatura, resistência elétrica, concentração de quantidade de matéria;

b) grandezas específicas:

- comprimento de uma barra
- resistência elétrica de um fio
- concentração de etanol em uma amostra de vinho

2 Grandezas que podem ser classificadas, uma em relação à outra, em ordem crescente ou decrescente, são denominadas **grandezas de mesma natureza**.

3 Grandezas de mesma natureza podem ser agrupadas em conjuntos de **categorias de grandezas**, por exemplo:

- trabalho, calor, energia
- espessura, circunferência, comprimento de onda

4 Os **símbolos das grandezas** são dados na ISO 31.

B.2.2 valor (de uma grandeza) [VIM 1.18]
expressão quantitativa de uma grandeza específica, geralmente sob a forma de uma unidade multiplicada por um número

Exemplos

a) comprimento de uma barra:	5,34 m	ou 534 cm;
b) massa de um corpo:	0,152 kg	ou 152 g;

c) quantidade de matéria de
uma amostra de água (H2O): 0,012 mol ou 12 mmol.

NOTAS

1 O valor de uma grandeza pode ser positivo, negativo ou nulo.

2 O valor de uma grandeza pode ser expresso de maneiras diferentes.

3 Os valores de grandezas adimensionais são, geralmente, expressos apenas por números puros.

4 Uma grandeza que não puder ser expressa por uma unidade de medida multiplicada por um número, pode ser expressa por meio de uma escala de referência convencional, ou por um procedimento de medição ou por ambos.

B.2.3 valor verdadeiro (de uma grandeza) [VIM 1.19]
valor consistente com a definição de uma dada grandeza específica

NOTAS

1 É um valor que seria obtido por uma medição perfeita.

2 Valores verdadeiros são, por natureza, indeterminados.

3 O artigo indefinido "um" é usado preferivelmente ao artigo definido "o", em conjunto com "valor verdadeiro", porque pode haver muitos valores consistentes com a definição de uma dada grandeza específica.

Comentário do *Guia*: Veja o anexo D, em particular D.3.5, quanto às razões por que o termo "valor verdadeiro" não é usado neste *Guia* e por que os termos "valor verdadeiro de um mensurando" (ou de uma grandeza) e "valor de um mensurando" (ou de uma grandeza) são vistos como equivalentes.

B.2.4 valor verdadeiro convencional (de uma grandeza) [VIM 1.20]
valor atribuído a uma grandeza específica e aceito, às vezes por convenção, como tendo uma incerteza apropriada para uma dada finalidade

EXEMPLOS

a) em um determinado local, o valor atribuído a uma grandeza, por meio de um padrão de referência, pode ser tomado como um valor verdadeiro convencional;

b) o CODATA (1986) recomendou o valor para a constante de Avogrado como sendo A= 6,022 136 7 x 10^{23} mol^{-1}.

NOTAS

1 "Valor verdadeiro convencional" é às vezes denominado **valor designado, melhor estimativa** do valor, **valor convencional** ou **valor de referência**. "Valor de referência", neste sentido, não deve ser confundido com "valor de referência" no sentido usado na Nota do item 5.7 do VIM.

2 Freqüentemente, um certo número de resultados de medições de uma grandeza é utilizado para estabelecer um valor verdadeiro convencional.

Comentários do *Guia*: Veja o Comentário do *Guia* para B.2.3.

B.2.5 medição [VIM 2.1]
conjunto de operações que tem por objetivo determinar um valor de uma grandeza

NOTA - As operações podem ser feitas automaticamente.

B.2.6 princípio de medição [VIM 2.3]
base científica de uma medição

EXEMPLOS

a) o efeito termoelétrico utilizado para a medição da temperatura;

b) o efeito Josephson utilizado para a medição da diferença de potencial elétrico;

c) o efeito Doppler utilizado para a medição da velocidade;

d) o efeito Raman utilizado para a medição do número de ondas das vibrações moleculares.

B.2.7 método de medição [VIM 2.4]
seqüência lógica de operações, descritas genericamente, usadas na execução das medições

NOTA - Os métodos de medição podem ser qualificados de várias maneiras, entre as quais:

- **método de substituição**
- **método diferencial**
- **método "de zero"**

B.2.8 procedimento de medição [VIM 2.5]
conjunto de operações, descritas especificamente, usadas na execução de medições particulares de acordo com um dado método

NOTA - Um procedimento de medição é, usualmente, registrado em um documento, que algumas vezes é denominado **procedimento de medição** (ou **método de medição**) e, normalmente, tem detalhes suficientes para permitir que um observador execute a medição sem informações adicionais.

B.2.9 mensurando [VIM 2.6]
grandeza específica submetida à medição

EXEMPLO - pressão de vapor de uma dada amostra de água a 20ºC.

NOTA - A especificação de um mensurando pode requerer informações de outras grandezas, como tempo, temperatura e pressão.

B.2.10 grandeza de influência [VIM 2.7]

grandeza que não é o mensurando, mas que afeta o resultado da sua medição

EXEMPLOS

a) a temperatura de um micrômetro usado na medição de um comprimento;

b) a freqüência na medição da amplitude de uma diferença de potencial em corrente alternada;

c) a concentração de bilirrubina na medição da concentração de hemoglobina em uma amostra de plasma sangüíneo humano.

Comentário do *Guia*: Entende-se que a definição de grandeza de influência inclui valores associados com padrões de medição, materiais e dados de referência dos quais o resultado de uma medição pode depender, assim como fenômenos (flutuações de curta duração do instrumento de medição) e grandezas (temperatura ambiente, pressão barométrica e umidade).

B.2.11 resultado de uma medição [VIM 3.1]

valor atribuído a um mensurando, obtido por medição

NOTAS

1 Quando um resultado é dado, deve-se indicar, claramente, se ele se refere:

- à indicação;
- ao resultado não-corrigido;
- ao resultado corrigido;

e se corresponde ao valor médio de várias medições.

2 Uma expressão completa do resultado de uma medição inclui informações sobre a incerteza de medição.

B.2.12 resultado não corrigido [VIM 3.3]

resultado de uma medição antes da correção devida a erro sistemático

B.2.13 resultado corrigido [VIM 3.4]

resultado de uma medição após a correção devida a erro sistemático

B.2.14 exatidão de medição [VIM 3.5]

grau de concordância entre o resultado de uma medição e um valor verdadeiro do mensurando

NOTAS

1 Exatidão é um conceito qualitativo.

2 O termo **precisão** não deve ser utilizado como exatidão.

Comentário do *Guia*: Veja o Comentário do *Guia* para B.2.3.

B.2.15 repetitividade (de resultados de medições) [VIM 3.6]

grau de concordância entre os resultados de medições sucessivas de um mesmo mensurando, efetuadas sob as mesmas condições de medição

NOTAS

1 Estas condições são denominadas **condições de repetitividade.**

2 Condições de repetitividade incluem:

- mesmo procedimento de medição;
- mesmo observador;
- mesmo instrumento de medição, utilizado nas mesmas condições;
- mesmo local;
- repetição em curto período de tempo.

3 Repetitividade pode ser expressa, quantitativamente, em função das características de dispersão dos resultados.

B.2.16 reprodutibilidade (de resultados de medições) [VIM 3.7]

grau de concordância entre os resultados das medições de um mesmo mensurando, efetuadas sob condições modificadas de medição

NOTAS

1 Para que uma expressão da reprodutibilidade seja válida, é necessário que sejam especificadas as condições modificadas.

2 As condições modificadas podem incluir:

- princípio de medição;
- método de medição;
- observador;
- instrumento de medição;
- padrão de referência;
- local;
- condições de utilização;
- tempo.

3 A reprodutibilidade pode ser expressa, quantitativamente, em função das características da dispersão dos resultados.

4 Os resultados aqui mencionados referem-se, usualmente, a resultados corrigidos.

B.2.17 desvio padrão experimental [VIM 3.8]

para uma série de "n" medições de um mesmo mensurando, a grandeza "$s(q_k)$", que caracteriza a dispersão dos resultados, é dada pela fórmula:

$$s(q_k) = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^{n} (q_k - \overline{q})^2}{n-1}}$$

onde q_k representa o resultado da k-ésima medição e $\overline{q}$ representa a média aritmética dos n resultados considerados

NOTAS

1 Considerando a série de n valores como uma amostra de uma distribuição, $\overline{q}$ é uma estimativa não-tendenciosa da média μ_q, e $s^2(q_k)$ é uma estimativa não-tendenciosa da variância σ^2 desta distribuição.

2 A expressão $s(q_k)/\sqrt{n}$ é uma estimativa do desvio padrão da distribuição de $\overline{q}$ e é denominada **desvio padrão experimental da média.**

3 "Desvio padrão experimental da média" é, algumas vezes, denominado incorretamente **erro padrão da média.**

Comentário do *Guia*: Alguns dos símbolos utilizados no VIM foram alterados a fim de se obter consistência com a notação utilizada no item 4.2 deste *Guia*.

B.2.18 incerteza (de medição) [VIM 3.9]
parâmetro, associado ao resultado de uma medição, que caracteriza a dispersão dos valores que podem ser razoavelmente atribuídos a um mensurando

NOTAS

1 O parâmetro pode ser, por exemplo, um desvio padrão (ou um dado múltiplo dele) ou a metade de um intervalo correspondente a um nível da confiança declarado.

2 A incerteza de medição compreende, em geral, muitos componentes. Alguns destes componentes podem ser estimados com base na distribuição estatística dos resultados das séries de medições e podem ser caracterizados por desvios padrão experimentais. Os outros componentes, que também podem ser caracterizados por desvios padrão, são avaliados por meio de distribuições de probabilidade supostas, baseadas na experiência ou em outras informações.

3 Entende-se que o resultado de uma medição é a melhor estimativa do valor do mensurando, e que todos os componentes da incerteza, incluindo aqueles resultantes dos efeitos sistemáticos, como os componentes associados com correções e padrões de referência, contribuem para a dispersão.

Comentário do *Guia*: destaca-se no VIM que esta definição e notas são idênticas àquelas deste *Guia* (ver 2.2.3).

B.2.19 erro (de medição) [VIM 3.10]
resultado de uma medição menos o valor verdadeiro do mensurando

NOTAS

1 Uma vez que o valor verdadeiro não pode ser determinado, utiliza-se, na prática, um valor verdadeiro convencional (ver [VIM] 1.19 [B.2.3] e 1.20 [B.2.4]).

2 Quando for necessário distinguir "erro" de "erro relativo", o primeiro é, algumas vezes, denominado de **erro absoluto de medição**. Este termo não deve ser confundido com **valor absoluto de erro**, que é o módulo do erro.

Comentário do *Guia*: Se o resultado de uma medição depende dos valores de grandezas outras além do mensurando, os erros dos valores medidos destas grandezas contribuem para o erro do resultado da medição. Veja, também, o Comentário do *Guia* para B.2.22 e para B.2.3.

B.2.20 erro relativo [VIM 3.12]
erro de medição dividido por um valor verdadeiro do mensurando.

NOTA - Uma vez que um valor verdadeiro não pode ser determinado, utiliza-se, na prática, um valor verdadeiro convencional (ver [VIM] 1.19 [B.2.3] e 1.20 [B.2.4]).

Comentário do *Guia*: Veja o Comentário do *Guia* para B.2.3.

B.2.21 erro aleatório [VIM 3.13]
resultado de uma medição, menos a média que resultaria de um infinito número de medições do mesmo mensurando, efetuadas sob condições de repetitividade

NOTAS

1 Erro aleatório é igual a erro menos erro sistemático.

2 Em virtude de, poder ser feito somente um número finito de medições, é possível apenas determinar uma estimativa do erro aleatório.

Comentário do *Guia*: Veja também os Comentários do *Guia* para B.2.22.

B.2.22 erro sistemático [VIM 3.14]
média que resultaria de um número infinito de medições do mesmo mensurando, efetuadas sob condições de repetitividade, menos o valor verdadeiro do mensurando

NOTAS

1 Erro sistemático é igual ao erro menos o erro aleatório.

2 Analogamente ao valor verdadeiro, o erro sistemático e suas causas não podem ser completamente conhecidos.

3 Para um instrumento de medição, ver tendência ([VIM]5.25).

Comentário do *Guia*: O erro do resultado de uma medição (ver B.2.19) pode freqüentemente ser considerado como oriundo de vários efeitos aleatórios e sistemáticos que contribuem com componentes individuais de erro para o erro do resultado. Veja, também, o Comentário do *Guia* para B.2.19 e para B.2.3.

B.2.23 correção [VIM 3.15]
valor adicionado algebricamente ao resultado não corrigido de uma medição para compensar um erro sistemático

NOTAS

1 A correção é igual ao erro sistemático estimado com sinal trocado.

2 Uma vez que o erro sistemático não pode ser perfeitamente conhecido, a compensação não pode ser completa.

B.2.24 fator de correção [VIM 3.16]
fator numérico pelo qual o resultado não corrigido de uma medição é multiplicado para compensar um erro sistemático

NOTA - Uma vez que o erro sistemático não pode ser perfeitamente conhecido, a compensação não pode ser completa.

Anexo C
Termos e conceitos estatísticos básicos

C.1 Fonte das definições

As definições de termos estatísticos básicos fornecidos neste anexo são extraídas da Norma Internacional ISO 3534-1 [7]. Esta deve ser a primeira fonte a ser consultada para a definição de termos não incluídos aqui. Alguns destes termos e seus conceitos correspondentes são aprofundados em C.3, seguindo a apresentação de suas definições formais em C.2, de forma a facilitar ainda mais o uso deste *Guia*. Entretanto, C.3, que também inclui as definições de alguns termos relacionados, não é baseado diretamente na ISO 3534-1.

C.2 Definições

Como no capítulo 2 e no anexo B, o uso de parênteses, em torno de certas palavras de alguns termos, significa que elas podem ser omitidas se tal omissão não causar equívoco.

Os termos de C.2.1 a C.2.14 são definidos em termos das propriedades de populações. As definições dos termos C.2.15 a C.2.31 são relacionados a um conjunto de observações(ver referência [7]).

C.2.1 probabilidade [ISO 3534-1, 1.1]
um número real na escala de 0 a 1 associado a um evento aleatório

NOTA - Esta pode ser relacionada a uma freqüência relativa de ocorrência de longo prazo ou a um grau de confiança de que um evento ocorrerá. Para um alto grau de confiança, a probabilidade está próxima de 1.

C.2.2 variável aleatória; variada [ISO 3534-1, 1.2]
uma variável que pode assumir qualquer um dos valores de um conjunto especificado de valores e com a qual está associada uma *distribuição de probabilidade* ([ISO 3534-1] 1.3[C.2.3])

NOTAS

1 Uma variável aleatória que só pode assumir valores isolados é chamada "discreta". Uma variável aleatória que pode assumir qualquer valor dentro de um intervalo finito ou infinito é chamada "contínua".

2 A probabilidade de um evento A é designada por Pr(A) ou *P*(A).

Comentário do *Guia*: O símbolo Pr(A) é usado, neste *Guia*, no lugar do símbolo $P_r(A)$, usado na ISO 3534-1.

C.2.3 distribuição de probabilidade (de uma variável aleatória) [ISO 3534-1, 1.3]
função que determina a probabilidade de uma variável aleatória assumir qualquer valor dado ou pertencer a um dado conjunto de valores

NOTA - A probabilidade do conjunto inteiro de valores da variável aleatória é igual a 1.

C.2.4 função distribuição [ISO 3534-1, 1.4]

função que determina, para cada valor *x*, a probabilidade de que a variável aleatória *X* seja menor ou igual a *x*:

$$F(x) = \Pr(X \leq x)$$

C.2.5 função densidade de probabilidade (para uma variável aleatória contínua) [ISO 3534-1, 1.5]
derivada (quando existe) da função distribuição:

$$f(x) = \mathrm{d}F(x)/\mathrm{d}x$$

NOTA - $f(x)dx$ é denominada "elemento de probabilidade":

$$f(x)\mathrm{d}x = Pr(x < X < x+\mathrm{d}x)$$

C.2.6 função massa de probabilidade [ISO 3534-1,1.6]

uma função que fornece, para cada valor x_i de uma variável aleatória discreta X, a probabilidade p_i, de que a variável aleatória seja igual a x_i :

$$p_i = \Pr(X = x_i)$$

C.2.7 parâmetro [ISO 3534-1, 1.12]

uma grandeza utilizada na descrição da distribuição de probabilidade de uma variável aleatória

C.2.8 correlação [ISO 3534-1, 1.13]

a relação entre duas ou muitas variáveis aleatórias dentro de uma distribuição de duas ou mais variáveis aleatórias

NOTA - A maioria das medidas estatísticas de correlação medem somente o grau de relação linear.

C.2.9 esperança (de uma variável aleatória ou de uma distribuição de probabilidade); **valor esperado; média** [ISO 3534-1, 1.18]

1 Para uma variável aleatória discreta X, assumindo valores x_i , com probabilidades p_i, a esperança, se ela existe, é

$$\mu = E(X) = \sum p_i x_i$$

a soma sendo estendida a todos os valores de x_i que podem ser assumidos por X.

2 Para uma variável aleatória contínua X tendo a função densidade de probabilidade $f(x)$, a esperança, se ela existe, é

$$\mu = E(X) = \int x f(x)\mathrm{d}x$$

a integral sendo estendida sobre o(s) intervalo(s) de variação de X.

C.2.10 variável aleatória centrada [ISO 3534-1, 1.21]

duma variável aleatória cuja esperança se iguala a zero

NOTA - Se a variável aleatória X tem uma esperança igual a μ, a variável aleatória centrada correspondente é $(X - \mu)$.

C.2.11 variância (de uma variável aleatória ou de uma distribuição de probabilidade) [ISO 3534-1, 1.22]

A esperança do quadrado da *variável aleatória centrada* ([ISO 3534-1], 1.21 [C.2.10]):

$$\sigma^2 = V(X) = E\{[X - E(X)]^2\}$$

C.2.12 desvio padrão (de uma variável aleatória, ou de uma distribuição de probabilidade) [ISO 3534-1, 1.23]

A raiz quadrada positiva da variância:

$$\sigma = \sqrt{V(X)}$$

C.2.13 momento central[1)] de ordem *q* [ISO 3534-1, 1.28]

em uma distribuição univariada, a esperança da q-ésima potência da variável aleatória centrada $(X- \mu)$:

$$E\left[(X-\mu)^q\right]$$

NOTA - O momento central de ordem 2 é a *variância* ([ISO 3534-1] 1.22[C.2.11]) da variável aleatória X.

1) Se, na definição dos momentos, as grandezas X, X-a, Y, Y-b, etc, são substituídas por seus valores absolutos, isto é, $|X|$, $|X\text{-}a|$, $|Y|$, $|Y\text{-}b|$, etc., outros momentos chamados "momentos absolutos" são definidos.

C.2.14 distribuição normal; distribuição de Laplace-Gauss [ISO 3534-1, 1.37]

distribuição de probabilidade de uma variável aleatória contínua X, cuja função densidade de probabilidade é:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left[\frac{x-\mu}{\sigma}\right]^2\right]$$

$$para\ -\infty < x < +\infty$$

NOTA - μ é a esperança e σ é o desvio padrão da distribuição normal.

C.2.15 característica [ISO 3534-1, 2.2]

uma propriedade que ajuda a identificar ou diferenciar itens de uma dada população

NOTA - A característica pode ser ou quantitativa (por variáveis) ou qualitativa (por atributos).

C.2.16 população [ISO 3534-1, 2.3]

totalidade de itens sob consideração

NOTA - No caso de uma variável aleatória, considera-se que a distribuição de probabilidade ([ISO 3534-1] 1.3 [C.2.3]) defina a população daquela variável.

C.2.17 freqüência [ISO 3534-1, 2.11]

o número de ocorrências de um dado tipo de evento ou o número de observações que se enquadram em uma classe especificada

C.2.18 distribuição de freqüência [ISO 3534-1, 2.15]
relação empírica entre valores de uma característica e suas freqüências ou suas freqüências relativas

NOTA - A distribuição pode ser apresentada graficamente como um *histograma* ([ISO 3534-1] 2.17), *gráficos de barras* ([ISO 3534-1] 2.18), *polígono de freqüência cumulativa* ([ISO 3534-1] 2.19), ou como uma *tabela de dupla entrada* ([ISO 3534-1] 2.22).

C.2.19 média aritmética; média [ISO 3534-1, 2.26]
a soma de valores dividida pelo número de valores

NOTAS

1 O termo "média" (mean) é, geralmente, utilizado quando se refere a um parâmetro de população (média da população) e o termo "média" (average) quando se refere ao resultado de um cálculo sobre dados obtidos de uma amostra (média da amostra).

2 A média (average) de uma amostra aleatória simples tomada de uma população é um estimador não-tendencioso da média (mean) desta população. Entretanto, são por vezes utilizados outros estimadores, tais como a média geométrica ou harmônica, ou a mediana ou a moda.

C.2.20 variância [ISO 3534-1, 2.33]
uma medida de dispersão, que é a soma dos desvios quadráticos das observações de sua média aritmética dividida pelo número de observações menos um.

EXEMPLO - Para n observações $x_1, x_2, \ldots, x_n$, com média aritmética

$$\bar{x} = \left(\frac{1}{n}\right)\sum x_i$$

a variância é:

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum (x_i - \bar{x})^2$$

NOTAS

1 A variância de amostras é um estimador não tendencioso da variância da população.

2 A variância é $n/(n-1)$ vezes o momento central de ordem 2 (ver nota para [ISO 3534-1] 2.39).

Comentário do *Guia*: A variância definida aqui é mais apropriadamente designada como "estimativa amostral da variância da população". A variância de uma amostra é usualmente definida como sendo o momento central de ordem 2 desta amostra (ver C.2.13 e C.2.22).

C.2.21 desvio padrão [ISO 3534-1, 2.34]
a raiz quadrada positiva da variância

NOTA - O desvio padrão da amostra é um estimador tendencioso do desvio padrão da população.

C.2.22 momento central de ordem *q* [ISO 3534-1, 2.37]
em uma distribuição de uma única característica, a média aritmética da q-ésima potência da diferença entre os valores observados e sua média $\bar{x}$:

$$\frac{1}{n}\sum_i (x_i - \bar{x})^q$$

onde n é o número de observações

NOTA - O momento central de ordem 1 é igual a zero.

C.2.23 estatística [ISO 3534-1, 2.45]
função de variáveis aleatórias da amostra

NOTA - Estatística, como uma função de variáveis aleatórias, é também uma variável aleatória e, como tal, assume diferentes valores de uma amostra para outra. O valor da estatística obtida, usando-se os valores observados nesta função, pode ser utilizado num teste estatístico ou como estimativa de um parâmetro de população, tal como uma média ou um desvio padrão.

C.2.24 estimação [ISO 3534-1, 2.49]
a operação que designa, através de observações numa amostra, valores numéricos para os parâmetros de uma distribuição escolhida, como o modelo estatístico da população da qual a amostra é extraída

NOTA - Um resultado desta operação pode ser expresso como um valor único singular (estimativa puntual; ver [ISO 3534-1] 2.51 [C.2.26]) ou como uma estimativa de intervalo (ver a [ISO 3534-1] 2.57 [C.2.27] e 2.58 [C.2.28]).

C.2.25 estimador [ISO 3534-1, 2.50]
estatística utilizada para estimar um parâmetro de população

C.2.26 estimativa [ISO 3534-1, 2.51]
valor de um estimador obtido como um resultado de uma estimação

C.2.27 intervalo de confiança bilateral [ISO 3534-1, 2.57]
quando T_1 e T_2 são duas funções dos valores observados, tais que, θ sendo um parâmetro de população a ser estimado, a probabilidade Pr $(T_1 \leq \theta \leq T_2)$ é, pelo menos, igual a $(1-\alpha)$ [onde $(1-\alpha)$ é um número fixo, positivo e menor que 1], o intervalo entre T_1 e T_2 é um intervalo de confiança $(1-\alpha)$ bilateral para θ

NOTAS

1 Os limites T_1 e T_2 do intervalo de confiança são *estatísticas* ([ISO 3534-1] 2.45 [C.2.23]) e, como tais, geralmente assumem diferentes valores de amostra para amostra.

2 Em uma longa série de amostras, a freqüência relativa dos casos nos quais o valor verdadeiro do parâmetro de população é coberto pelo intervalo de confiança, é maior ou igual a (1- α).

C.2.28 intervalo de confiança unilateral [ISO 3534-1, 2.58]

quando T é uma função dos valores observados, tais que, θ sendo um parâmetro de população a ser estimado, a probabilidade Pr ($T \geq \theta$)[ou a probabilidade Pr ($T \leq \theta$)] é pelo menos igual a (1 - α) [onde (1 - α) é um número fixo, positivo e menor do que 1], o intervalo do menor valor possível de θ até T (ou o intervalo de T até o maior valor possível de θ) é um intervalo de confiança (1 - α) unilateral para θ

NOTAS

1 O limite T do intervalo de confiança é uma *estatística* ([ISO 3534-1] 2.45 [C.2.23]) e, como tal, geralmente irá supor diferentes valores de amostra para amostra.

2 Ver nota 2 da [ISO 3534-1] 2.57 [C.2.27].

C.2.29 coeficiente de confiança; nível de confiança [ISO 3534-1, 2.59]

o valor (1 - α) da probabilidade associada com um intervalo de confiança ou um intervalo estatístico de abrangência. Ver [ISO 3534-1] 2.57 [C.2.27], 2.58 [C.2.28], e 2.61 [C.2.30]).

NOTA - (1 - α) é freqüentemente expresso como uma porcentagem.

C.2.30 intervalo estatístico de abrangência [ISO 3534-1, 2.61]

intervalo para o qual pode-se dizer que, com um dado nível da confiança, ele contém pelo menos uma proporção especificada da população

NOTAS

1 Quando ambos os limites são definidos por estatísticas, o intervalo é bilateral. Quando um dos dois limites não é finito ou consiste do limite absoluto da variável, o intervalo é unilateral.

2 Também denominado "intervalo estatístico de tolerância". Este termo não deve ser usado porque pode ser confundido com "intervalo de tolerância", que é definido na ISO 3534-2.

C.2.31 graus de liberdade [ISO 3534-1, 2.85]

em geral, o número de termos em uma soma menos o número de restrições aos termos da soma

C.3 Elaboração de termos e conceitos

C.3.1 esperança

a esperança de uma função $g(z)$ sobre uma função densidade de probabilidade $p(z)$ da variável aleatória z é definida por:

$$E[g(z)] = \int g(z)\, p(z)\, \mathrm{d}z$$

onde, da definição de $p(z)$, $\int p(z)\,\mathrm{d}z = 1$. A esperança da variável aleatória z, designada por μ_z, e que também é denominada de valor esperado ou a média de z, é dada por:

$$\mu_z \equiv \mathrm{E}(z) = \int z p(z) \mathrm{d}z$$

Ela é estimada, estatisticamente, por $\bar{z}$, a média aritmética ou a média de n observações independentes z_i da variável aleatória z, cuja função densidade de probabilidade é $p(z)$:

$$\bar{z} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} z_i$$

C.3.2 variância

a variância de uma variável aleatória é a esperança do seu desvio quadrático em torno de sua esperança. Assim, a variância de variável aleatória z, com função densidade de probabilidade $p(z)$, é dada por:

$$\sigma^2(z) = \int (z - \mu_z)^2\, p(z) \mathrm{d}z$$

onde μ_z é a esperança de z. A variância $\sigma^2(z)$ pode ser estimada por:

$$s^2(z_i) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (z_i - \bar{z})^2, \text{ onde } \quad \bar{z} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} z_i$$

e o z_i são n observações independentes de z.

NOTAS

1 O fator n-1 na expressão para $s^2(z_i)$ decorre da correlação entre z_i e $\bar{z}$ e reflete o fato de que há somente n-1 itens independentes no conjunto $\{z_i - \bar{z}\}$.

2 Se a esperança μ_z de z é conhecida, a variância pode ser estimada por:

$$s^2(z_i) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (z_i - \mu_z)^2$$

A variância da média aritmética ou média das observações, em vez de variância das observações individuais, é a medida apropriada da incerteza de um resultado de medição. A variância de uma variável z deve ser cuidadosamente distinguida da variância da média $\bar{z}$. A variância da média aritmética de uma série de n observações independentes z_i de z é dada por $\sigma^2 = \sigma^2(z_i)/n$ e é estimada pela variância experimental da média:

$$s^2(\bar{z}) = \frac{s^2(z_i)}{n} = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^{n} (z_i - \bar{z})^2$$

C.3.3 desvio padrão

o desvio padrão é a raiz quadrada positiva da variância. Enquanto uma incerteza padrão do Tipo A é obtida, tomando-se a raiz quadrada da variância estatisticamente avaliada, é muitas vezes mais conveniente, quando se determina uma incerteza padrão do Tipo B, avaliar primeiro o desvio padrão equivalente não-estatístico e, então, obter a variância equivalente, elevando-se ao quadrado o desvio padrão.

C.3.4 covariância

a covariância de suas variáveis aleatórias é uma medida de sua dependência mútua. A covariância de variáveis aleatórias y e z é definida por:

$\text{cov}(y,z) = \text{cov}(z,y) = E\{[y - E(y)]\,[z - E(z)]\}$, que leva a

$$\text{cov}(y,z) = \text{cov}(z,y)$$
$$= \int\int (y-\mu_y)(z-\mu_z)\,p(y,z)\,dy\,dz$$
$$= \int\int yz\,p(y,z)\,dy\,dz - \mu_y\,\mu_z$$

onde $p(y,z)$ é a função densidade de probabilidade conjunta das duas variáveis y e z. A covariância $\text{cov}(y,z)$ [também simbolizada por $\upsilon(y,z)$] pode ser estimada por $s(y_i,z_i)$, obtida a partir de n pares independentes de observações simultâneas y_i e z_i de y e z:

$$s(y_i, z_i) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})(z_i - \bar{z})$$

onde:

$$\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} y_i \quad e \quad \bar{z} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} z_i$$

NOTA - A covariância estimada das duas médias $\bar{y}$ e $\bar{z}$ é dada por $s(\bar{y}, \bar{z}) = s(y_i, z_i)/n$.

C.3.5 matriz de covariância

para uma distribuição de probabilidade multivariada, a matriz V, com elementos iguais para as variâncias e covariâncias das variáveis, é denominada matriz de covariância. Os elementos diagonais, $\upsilon(z,z) \equiv \sigma^2(z)$ ou $s(z_i,z_i) \equiv s^2(z_i)$, são as variâncias, enquanto que os elementos fora da diagonal, $\upsilon(y,z)$ ou $s(y_i,z_i)$, são as covariâncias.

C.3.6 coeficiente de correlação

o coeficiente de correlação é uma medida da dependência mútua relativa de duas variáveis, igual à razão de suas covariâncias e à raiz quadrada positiva do produto de suas variâncias. Assim:

$$\rho(y,z) = \rho(z,y) = \frac{\upsilon(y,z)}{\sqrt{\upsilon(y,y)\,\upsilon(z,z)}} = \frac{\upsilon(y,z)}{\sigma(y)\,\sigma(z)}$$

que estima

$$r(y_i, z_i) = r(z_i, y_i) = \frac{s(y_i, z_i)}{\sqrt{s(y_i, y_i)\,s(z_i, z_i)}} = \frac{s(y_i, z_i)}{s(y_i)\,s(z_i)}$$

O coeficiente de correlação é um número puro, tal que:

$$-1 \le \rho \le +1 \quad \text{ou} \quad -1 \le r(y_i,z_i) \le +1.$$

NOTAS

1 Como ρ e r são números puros na faixa de -1 a +1 inclusive, enquanto as covariâncias são, usualmente, grandezas com dimensões e magnitudes físicas inconvenientes, os coeficientes de correlação são, geralmente, mais úteis que as covariâncias.

2 Para distribuições de probabilidade multivariadas, a matriz de coeficientes de correlação é, geralmente, fornecida no lugar da matriz de covariância. Como $\rho(y,y) = 1$, e $r(y_i, y_i)=1$, os elementos da diagonal desta matriz são iguais à unidade.

3 Se as estimativas de entrada x_i e x_j são correlacionadas (ver 5.2.2) e se uma alteração δ_i em x_i produz uma mudança δ_j em x_j, então o coeficiente de correlação associado com x_i e x_j é estimado, aproximadamente, por:

$$r(x_i, x_j) \approx u(x_i)\,\delta_j / u(x_j)\,\delta_i$$

Esta relação pode servir de base para estimar, experimentalmente, os coeficientes de correlação. Ela também pode ser usada para calcular a variação aproximada em uma estimativa de entrada devido a uma variação em outra, caso seu coeficiente de correlação seja conhecido.

C.3.7 independência

duas variáveis aleatórias são estatisticamente independentes, se sua distribuição de probabilidade conjunta é o produto de suas distribuições de probabilidade individuais

NOTA - Se duas variáveis aleatórias são independentes, sua covariância e coeficiente de correlação são nulos,mas o contrário não é necessáriamente verdadeiro.

C.3.8 a distribuição-*t*; distribuição de Student

a distribuição-*t* ou distribuição de Student é a distribuição de probabilidade de uma variável aleatória contínua *t* cuja função densidade de probabilidade é:

$$p(t,\nu) = \frac{1}{\sqrt{\pi\nu}} \frac{\Gamma\left[\frac{\nu+1}{2}\right]}{\Gamma\left[\frac{\nu}{2}\right]} \left[1+\frac{t^2}{\nu}\right]^{-(\nu+1)/2}$$

$$-\infty < t < +\infty$$

onde Γ é a função gama e $\nu > 0$. A esperança da distribuição-*t* é zero e sua variância é $\nu/(\nu\text{-}2)$, para $\nu > 2$. Conforme $\nu \to \infty$, a distribuição-*t* se aproxima de uma distribuição normal, com μ=0 e σ=1 (ver C.2.14).

A distribuição de probabilidade da variável $(\bar{z}\text{-}\mu_z)/s(\bar{z})$ é a distribuição-*t*, se a variável aleatória z é distribuida normalmente com esperança μ_z, onde $\bar{z}$ é a média aritmética de n observações independentes z_i de z, $s(z_i)$ é o desvio padrão experimental das n observações, e $s(\bar{z}) = s(z_i)/\sqrt{n}$ é o desvio padrão experimental da média $\bar{z}$, com $\nu = n\text{-}1$ graus de liberdade.

Anexo D
Valor “verdadeiro”, erro e incerteza

O termo **valor verdadeiro** (B.2.3) tem sido tradicionalmente usado em publicações sobre incerteza, mas não neste *Guia* pelas razões apresentadas neste anexo. Como as palavras “mensurando”, “erro” e “incerteza” são, freqüentemente, mal interpretadas, este anexo também fornece uma discussão adicional sobre as idéias básicas a elas associadas, a fim de suplementar a discussão dada no capítulo 3. Duas figuras são apresentadas para ilustrar por que o conceito adotado neste *Guia* é baseado no resultado de medição e sua incerteza estimada, em vez de ser baseado nas grandezas desconhecidas: valor “verdadeiro” e erro.

D.1 O mensurando

D.1.1 O primeiro passo, ao se efetuar uma medição, é especificar o mensurando - a grandeza a ser medida; o mensurando não pode ser especificado por um valor, mas, somente, por uma descrição de uma grandeza. Entretanto, a princípio, um mensurando não pode ser *completamente* descrito sem um número infinito de informações. Assim, na proporção em que deixa margem à interpretação, a definição incompleta do mensurando introduz, na incerteza do resultado de uma medição, um componente de incerteza que pode ou não ser significativo para a exatidão requerida da medição.

D.1.2 Comumente, a definição de um mensurando especifica certos estados e condições físicas.

EXEMPLO - A velocidade do som no ar seco de composição (fração molar) N_2 = 0,7808, O_2 = 0,2095, Ar = 0,009 35, e CO_2 = 0,000 35, na temperatura T = 273,15 K e pressão p = 101 325 Pa.

D.2 A grandeza realizada

D.2.1 Em condições ideais, a grandeza realizada para medição seria totalmente consistente com a definição do mensurando. Freqüentemente, entretanto, tal grandeza não pode ser realizada, e a medição é efetuada numa grandeza que é uma aproximação do mensurando.

D.3 O valor “verdadeiro” e o valor corrigido

D.3.1 O resultado da medição da grandeza realizada é corrigido para a diferença entre esta grandeza e o mensurando, de forma a prever qual teria sido o resultado da medição se a grandeza realizada tivesse, de fato, satisfeito, integralmente, a definição do mensurando. O resultado da medição, da grandeza realizada é também corrigido para todos os outros efeitos sistemáticos significativos reconhecidos. Embora o resultado corrigido final seja algumas vezes considerado como a melhor estimativa do valor “verdadeiro” do mensurando, na realidade o resultado é simplesmente a melhor estimativa do valor da grandeza que se pretende medir.

D.3.2 Como exemplo, suponha que o mensurando seja a espessura de uma determinada folha de material em uma temperatura especificada. O espécimen é levado a uma temperatura próxima da especificada e sua espessura, em um lugar em particular, é medida com um micrômetro. A espessura do material, nesse lugar e temperatura, sob a pressão aplicada pelo micrômetro, é a grandeza realizada.

D.3.3 A temperatura do material, no momento da medição, e a pressão aplicada são determinadas. O resultado não-corrigido da medição da grandeza realizada é, então, corrigido, levando-se em conta a curva de calibração do micrômetro, o afastamento entre a temperatura do espécimen quanto à temperatura especificada, além da leve compressão do espécimen sob a pressão aplicada.

D.3.4 O valor corrigido pode ser denominado a melhor estimativa do valor "verdadeiro", "verdadeiro" no sentido de que ele é o valor de uma grandeza que se acredita que satisfaça, completamente, a definição do mensurando; porém, se o micrômetro tivesse sido aplicado a uma parte diferente da folha do material, o mensurando teria sido diferente com um valor "verdadeiro" diferente. No entanto, aquele valor "verdadeiro" seria consistente com a definição do, mensurando porque este não especificou que a espessura era para ser determinada num local em particular sobre a folha. Assim, neste caso, por causa de uma definição incompleta do mensurando, o valor "verdadeiro" tem uma incerteza que pode ser avaliada através de medições realizadas em diferentes partes da folha. Em algum nível, cada mensurando tem uma incerteza "intrínseca" que pode, em princípio, ser estimada de algum modo. Esta é a incerteza mínima com a qual um mensurando pode ser determinado, e cada medição que alcança tal incerteza pode ser considerada a melhor medição possível do mensurando. Para obter um valor da grandeza em questão com uma incerteza menor, requer-se que o mensurando seja definido mais completamente.

NOTAS

1. No exemplo, a especificação do mensurando deixa em dúvida muitos outros assuntos que podem, conceitualmente, afetar a espessura: a pressão barométrica, a umidade, o comportamento da folha no campo gravitacional, como ela é apoiada, etc.

2. Embora um mensurando deva ser definido com detalhes suficientes para que qualquer incerteza decorrente de sua definição incompleta seja desprezível em comparação com a exatidão requerida para a medição, deve-se reconhecer que isto nem sempre é praticável. A definição pode, por exemplo, estar incompleta porque não especifica parâmetros que possam ter sido supostos, injustificadamente, como tendo efeito desprezível, ou pode implicar condições que poderão nunca ser satisfeitas inteiramente e cuja realização imperfeita é difícil de se levar em conta. Por exemplo, no caso do exemplo de D.1.2, a velocidade do som implica infinitas ondas planas de amplitude quase desprezível. Na proporção em que a medição não satisfaz estas condições, os efeitos não-lineares e de difração precisam ser considerados.

3. A especificação inadequada do mensurando pode levar a discrepâncias entre os resultados de medições da mesma grandeza ostensivamente realizadas em laboratórios diferentes.

D.3.5 A expressão "valor verdadeiro de um mensurando" ou de uma grandeza (freqüentemente abreviada para "valor verdadeiro") é evitada neste *Guia*, porque a palavra "verdadeiro" é vista como redundante. "Mensurando" (ver B.2.9) significa "grandeza particular sujeita à medição", portanto "valor de um mensurando" significa "valor de uma grandeza particular sujeita à medição". Como "grandeza particular" é, geralmente, compreendida como significando uma grandeza definida, ou especificada (ver B.2.1, nota 1), o adjetivo "verdadeiro" em "valor verdadeiro de um mensurando" (ou em "valor verdadeiro de uma grandeza") é desnecessário – o valor "verdadeiro" do mensurando (ou da grandeza) é, simplesmente, o valor do mensurando (ou da grandeza). Adicionalmente, como indicado na discussão acima, o valor "verdadeiro" único é somente um conceito idealizado.

D.4 Erro

Um resultado de medição corrigido não é o valor do mensurando – isto é, está errado – por causa da medição imperfeita da grandeza realizada, devido a variações aleatórias das observações (efeitos aleatórios), à determinação inadequada de correções para efeitos sistemáticos e ao conhecimento incompleto de certos fenômenos físicos (também efeitos sistemáticos). Nem o valor da grandeza realizada nem o valor do mensurando podem ser conhecidos exatamente; tudo o que se pode saber são os seus valores estimados. No exemplo acima, a espessura medida da folha *pode* estar errada, isto é, pode diferir do valor do mensurando (a espessura da folha), porque cada uma das seguintes razões podem se combinar para contribuir para um erro desconhecido no resultado da medição:

a) pequenas diferenças entre as indicações do micrômetro, quando ele é aplicado repetidamente para a mesma grandeza realizada;

b) calibração imperfeita do micrômetro;

c) medição imperfeita da temperatura e da pressão aplicada;

d) conhecimento incompleto dos efeitos da temperatura, pressão barométrica e umidade da amostra ou do micrômetro, ou de ambos.

D.5 Incerteza

D.5.1 Enquanto os valores exatos das contribuições ao erro de um resultado de uma medição são desconhecidos e desconhecíveis, as *incertezas* associadas com esses efeitos aleatórios e sistemáticos que contribuem para o erro podem ser avaliadas. Porém, mesmo que as incertezas avaliadas sejam pequenas, ainda não há garantia de que o erro no resultado da medição seja pequeno, pois, na determinação de uma correção ou na avaliação de conhecimento incompleto, um efeito sistemático pode ter passado despercebido porque não é reconhecido. Assim, a incerteza de um resultado de uma medição não é, necessariamente, uma indicação de quanto o resultado da medição está próximo do valor do mensurando; ela é simplesmente uma estimativa de quanto se está próximo do melhor valor que seja consistente com o conhecimento atualmente disponível.

D.5.2 A incerteza de medição é, assim, uma expressão do fato de que, para um dado mensurando e um dado resultado de sua medição, não há um único valor, mas, sim, um infinito número de valores, dispersos em torno do resultado, que são consistentes com todas as observações e dados e conhecimentos sobre o mundo físico, e que podem ter diferentes graus de credibilidade atribuídos ao mensurando.

D.5.3 Felizmente, em muitas situações práticas de medição, muito do que é discutido neste anexo não se aplica. Os exemplos são quando o mensurando está adequadamente bem definido; quando padrões ou instrumentos são calibrados, usando-se padrões de referência bem conhecidos que são rastreáveis a padrões nacionais; e quando as incertezas das correções de calibração são insignificantes comparadas às incertezas provenientes de efeitos aleatórios na indicação dos instrumentos, ou de um número limitado de observações (ver E.4.3). De qualquer maneira, o conhecimento incompleto de grandezas de influência e de seus efeitos podem, muitas vezes, contribuir significativamente para a incerteza do resultado de uma medição.

D.6 Representação gráfica

D.6.1 A figura (D.1) ilustra algumas das idéias discutidas no item 3 deste *Guia* e neste anexo. Ela ilustra por que o enfoque deste *Guia* está na incerteza e não no erro. O valor exato do erro de um resultado de uma medição é, em geral, desconhecido e impossível de se conhecer. Tudo o que se pode fazer é estimar os valores das grandezas de entrada, incluindo correções para efeitos sistemáticos reconhecíveis, juntamente com suas incertezas padrão (desvios padrão estimados), seja por meio de distribuições de probabilidade desconhecidas que são amostradas por meio de observações repetidas, ou por meio de distribuições subjetivas ou *a priori* baseadas no conjunto de informações disponíveis e, então, calcular o resultado da medição através dos valores estimados das grandezas de entrada e da incerteza padrão combinada deste resultado por meio de incertezas padrão daqueles valores estimados. Somente se há uma base sólida para se acreditar que tudo isto foi feito de maneira adequada, sem que se tenha passado por cima de nenhum efeito sistemático relevante, pode-se supor que o resultado da medição é uma estimativa confiável do valor do mensurando e que sua incerteza padrão combinada é uma medida confiável de seu *possível* erro.

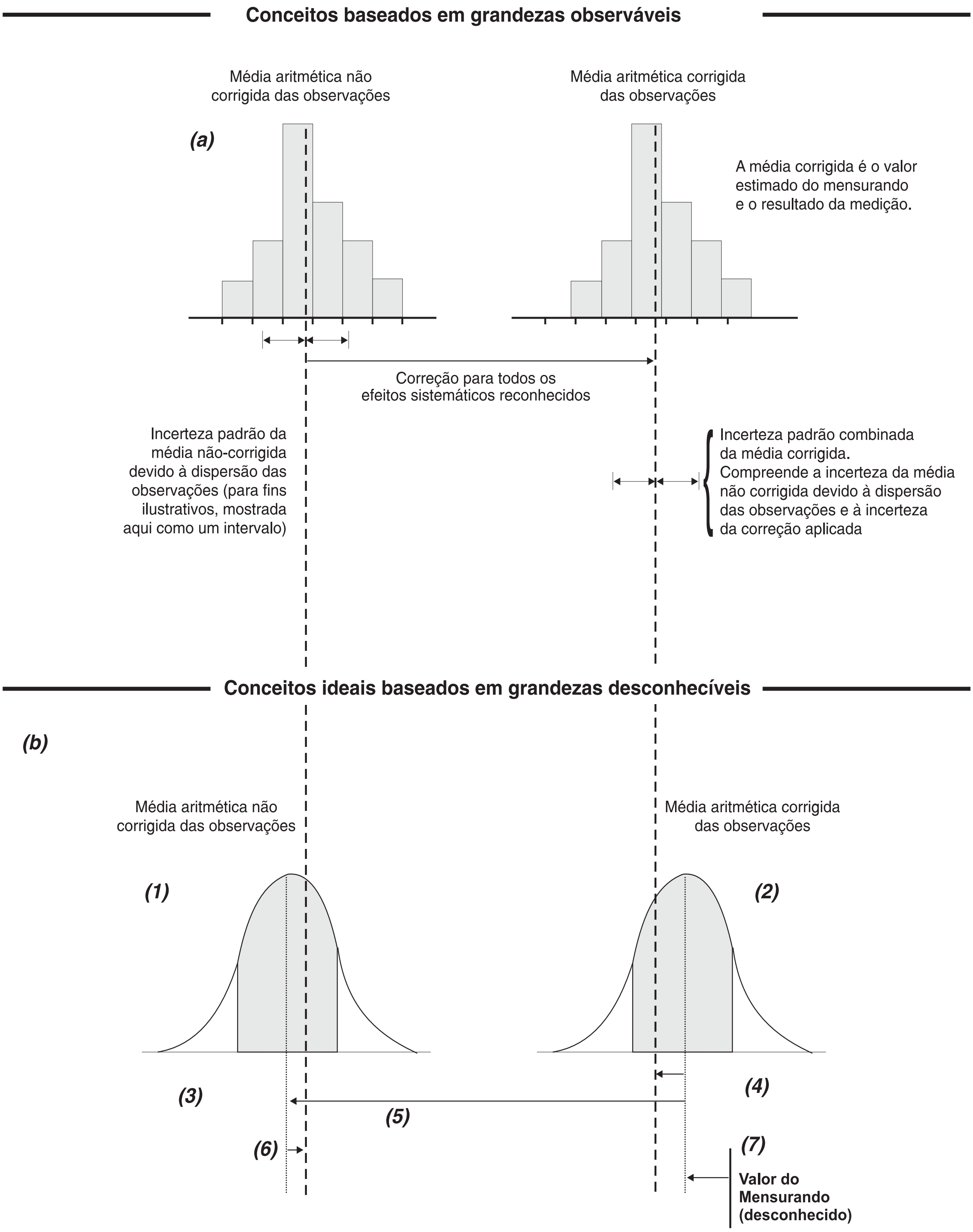
NOTAS

1. Na figura D.1a, as observações são mostradas como um histograma para propósitos ilustrativos [ver 4.4.3 e a figura (1b)].

2. A correção para um erro é igual ao negativo da estimativa do erro. Assim, na figura (D.1) e também na figura (D.2), uma seta que ilustra a correção para um erro é igual em comprimento, mas aponta para a direção contrária da seta que teria ilustrado o próprio erro e vice-versa. O texto da figura torna claro se uma seta em particular ilustra uma correção ou um erro.

D.6.2 A figura (D.2) mostra algumas das mesmas idéias ilustradas na figura (D.1), mas de uma maneira diferente. Além disso, ela também demonstra a idéia de que pode haver vários valores do mensurando, se a sua definição está incompleta (entrada g da figura). A incerteza que se origina do fato da definição estar incompleta, tal como medida pela variância, é avaliada por medições de realizações múltiplas do mensurando, usando-se o mesmo método, os mesmos instrumentos, etc. (ver D.3.4).

NOTA - Na coluna intitulada “Variância”, as variâncias são entendidas como sendo as variâncias $u_i^2(y)$ definidas na equação (11) em 5.1.3; portanto elas se somam linearmente, como mostrado.



(1) Distribuição desconhecida (aqui suposta ser aproximadamente uma distribuição normal) da população (inteira das possíveis observações não-corrigidas
(2) Distribuição desconhecida da população inteira de possíveis observações corrigidas
(3) Média de população desconhecida (expectativa) com desvio padrão desconhecido (indicado pela borda da área sombreada)
(4) Erro desconhecido na média corrigida devido ao erro "aleatório" desconhecido na média não- corrigida e ao erro desconhecido na correção aplicada
(5) Erro desconhecido devido a todos os efeitos sistemáticos reconhecidos
(6) Erro "aleatório" desconhecido na média não corrigida de observações
(7) Erro desconhecido remanescente na média corrigida devido a um efeito sistemático não-reconhecido

Figura D.1. Ilustração gráfica do valor, erro e incerteza

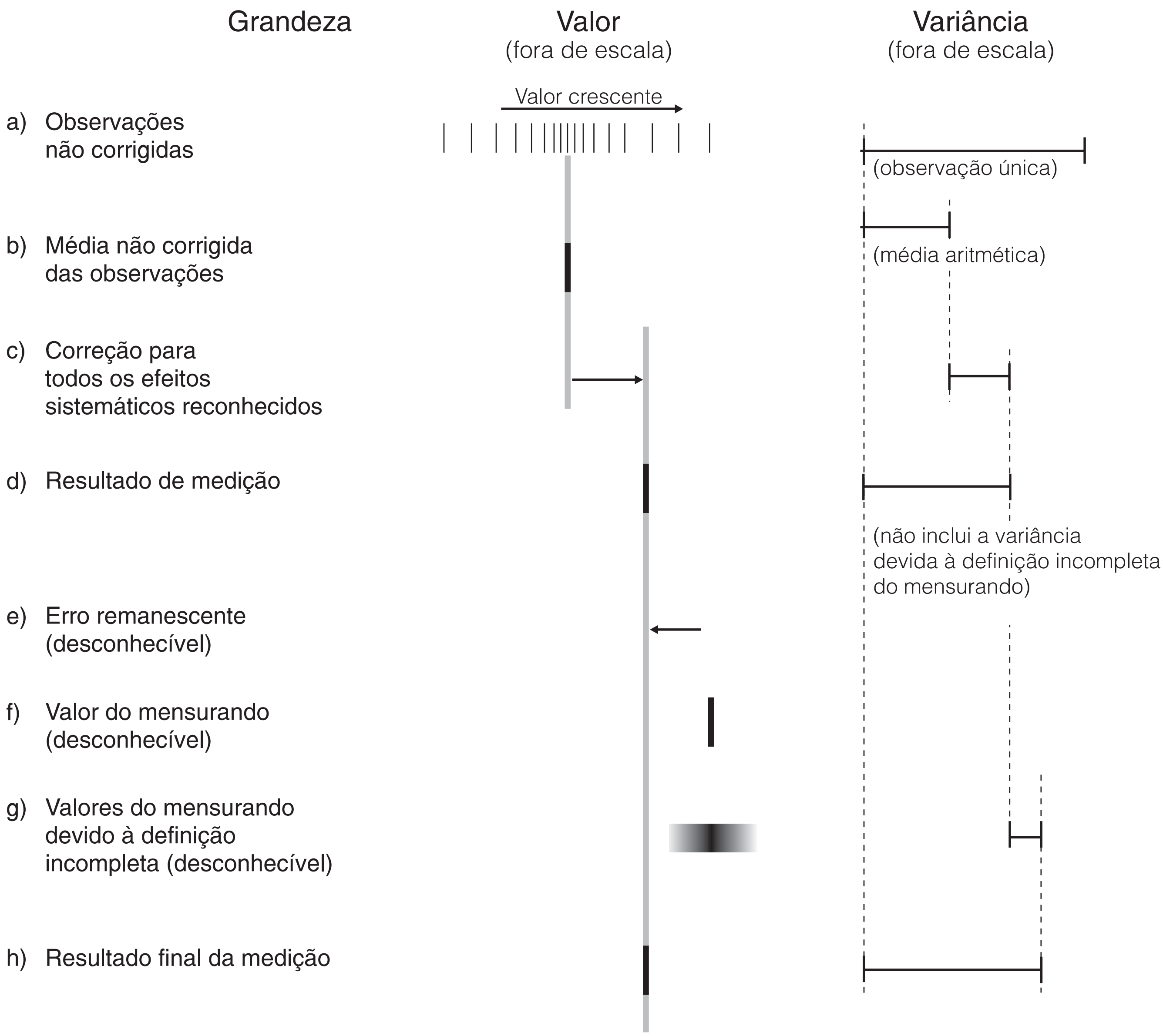


Figura D.2. Ilustração gráfica dos valores, erros e incertezas

Anexo E
Motivação e base para a Recomendação INC-1 (1980)

Este anexo traz uma breve discussão tanto sobre a motivação como sobre a base estatística para a Recomendação INC-1 (1980) do Grupo de Trabalho para Declaração de Incertezas, sobre o qual se fundamenta este Guia. Para discussões mais aprofundadas, ver as referências [1, 2, 11, 12].

E.1 "Seguro", "aleatório" e "sistemático"

E.1.1 Este *Guia* apresenta um método amplamente aplicável para avaliar e expressar incerteza de medição. Ele fornece um valor realista, em vez de um valor "seguro" da incerteza baseado no conceito de que não há diferença inerente entre um componente de incerteza proveniente de um efeito aleatório e um proveniente de uma correção para um efeito sistemático (ver 3.2.2 e 3.2.3). O método se situa, portanto, em contraste com certos métodos mais antigos que têm em comum as duas seguintes idéias:

E.1.2 A primeira idéia é a de que a incerteza relatada deve ser "segura" ou "conservadora", significando que nunca deveria errar para muito menos. De fato, devido à avaliação da incerteza de um resultado de medição ser problemática, ela foi, com freqüência, deliberadamente tornada maior.

E.1.3 A segunda idéia é a de que as influências que dão origem às incertezas foram sempre reconhecidas como sendo ou "aleatórias" ou "sistemáticas", sendo que as duas teriam naturezas diferentes; as incertezas associadas com cada uma eram combinadas na sua própria maneira e deveriam ser relatadas separadamente (ou, quando era requerido um único valor, combinadas de algum modo específico). Na realidade, o método de combinação de incertezas era freqüentemente projetado para satisfazer o requisito de segurança.

E.2 Justificativa para avaliações realísticas da incerteza

E.2.1 Quando o valor de um mensurando é relatado, a melhor estimativa de seu valor e a melhor avaliação da incerteza desta estimativa devem ser dadas, pois, se a incerteza é passível de erro, não é normalmente possível decidir em qual direção dever-se-ia errar "seguramente". Uma declaração para menos das incertezas pode fazer com que demasiada confiança seja depositada nos valores relatados, com conseqüências, por vezes, embaraçosas ou até mesmo desastrosas. Uma declaração deliberadamente para mais das incertezas pode, também, ter repercussões indesejáveis. Poderia fazer com que os usuários de equipamento de medição comprassem instrumentos que são mais dispendiosos do que os de que eles precisam, ou poderia fazer com que produtos caros fossem descartados desnecessariamente, ou que os serviços de um laboratório de calibração fossem rejeitados.

E.2.2 Isso não quer dizer que aqueles que utilizam um resultado de medição não possam aplicar seus próprios fatores de multiplicação à incerteza declarada, de forma a obter uma incerteza expandida que define um intervalo com um nível da confiança especificado e que satisfaz suas próprias necessidades. Nem significa, em certas circunstâncias, que as instituições fornecedoras de resultados de medições não poderiam, rotineiramente, aplicar um fator que forneça uma incerteza expandida similar que satisfaça as necessidades de uma classe específica de usuários desses resultados. Entretanto, tais fatores (sempre a serem declarados) devem ser aplicados à incerteza tal como determinada por um método realista, e somente *após* a incerteza ter sido assim determinada, de modo que o intervalo definido pela incerteza expandida tenha o nível da confiança requerido e a operação possa ser facilmente revertida.

E.2.3 Aqueles engajados em medições freqüentemente precisam incorporar em suas análises os resultados de medições feitas por outros, com cada um desses resultados possuindo uma incerteza própria. Ao avaliar a incerteza de seu próprio resultado de medição, eles necessitam ter um melhor valor, e não um valor "seguro", da incerteza de cada um dos resultados incorporados de terceiros. Adicionalmente, deve haver alguma maneira simples e lógica pela qual essas incertezas importadas possam ser combinadas com as incertezas das suas próprias observações para fornecer a incerteza de seu próprio resultado. A Recomendação INC-1 (1980) fornece tal maneira.

E.3 Justificativa para tratar todos os componentes da incerteza identicamente

O enfoque da discussão deste item é um exemplo simples que ilustra como este *Guia* trata componentes de incerteza provenientes de efeitos aleatórios e de correções para efeitos sistemáticos exatamente da mesma forma na avaliação da incerteza do resultado de uma medição. Ele, assim, exemplifica o ponto de vista adotado neste *Guia* e citado em E.1.1, ou seja, que todos os componentes da incerteza são da mesma natureza e devem ser tratados identicamente. O ponto de partida da discussão é uma derivação simplificada da expressão matemática para a propagação dos desvios padrão, denominada, neste *Guia*, como lei de propagação da incerteza.

E.3.1 Suponha que a grandeza de saída $z = f(w_1, w_2, .., w_N)$ dependa de N grandezas de entrada $w_1, w_2, ... w_N$, onde cada w_i seja descrito por uma distribuição de probabilidade apropriada. A expansão de f por meio das esperanças dos w_i, $E(w_i) \equiv \mu_i$, em uma série de Taylor de primeira ordem, fornece, para pequenos desvios de z com relação a μ_z, em termos de pequenos desvios de w_i em torno de μ_i:

$$z - \mu_z = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial f}{\partial w_i}(w_i - \mu_i) \tag{E.1}$$

onde todos os termos de maior ordem são supostamente desprezíveis e $\mu_z = f(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_N)$. O quadrado do desvio $z - \mu_z$ é, então, dado por:

$$(z - \mu_z)^2 = \left[\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial f}{\partial w_i}(w_i - \mu_i)\right]^2 \tag{E.2a}$$

que pode ser escrito como:

$$(z - \mu_z)^2 = \sum_{i=1}^{N} \left[\frac{\partial f}{\partial w_i}\right]^2 (w_i - \mu_i)^2 + $$

$$+ 2 \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^{N} \frac{\partial f}{\partial w_i}\frac{\partial f}{\partial w_j}(w_i - \mu_i)(w_j - \mu_j) \tag{E.2b}$$

A esperança do desvio quadrado $(z\text{-}\mu_z)^2$ é a variância de z, isto é, $E[(z\text{-}\mu_z)^2] = \sigma_z^2$ e, assim, da equação (E.2b)

$$\sigma_z^2 = \sum_{i=1}^{N} \left[\frac{\partial f}{\partial w_i}\right]^2 \sigma_i^2 + 2 \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^{N} \frac{\partial f}{\partial w_i}\frac{\partial f}{\partial w_j} \sigma_i \sigma_j \rho_{ij} \tag{E.3}$$

Nesta expressão, $\sigma_i^2 = E[(w_i - \mu_i)^2]$ é a variância de w_i e $\rho_{ij} = \upsilon(w_i, w_j)/(\sigma_i^2 \sigma_j^2)^{1/2}$ é o coeficiente de correlação de w_i e w_j, onde $\upsilon(w_i, w_j) = E[(w_i - \mu_i) \cdot (w_j - \mu_j)]$ é a covariância de w_i e w_j.

NOTAS

1. σ_z^2 e σ_i^2 são, respectivamente, os momentos centrais de ordem 2 (ver C.2.13 e C.2.22) das distribuições de probabilidade de z e de w_i. Uma distribuição de probabilidade pode ser completamente caracterizada pela sua esperança, variância e momentos centrais de ordem mais alta.

2. A equação (13) em 5.2.2 [junto com a equação (15)], que é usada para calcular a incerteza padrão combinada, é idêntica à equação (E.3), exceto que a equação (13) é expressa em termos de estimativas das variâncias, desvios padrão e coeficientes de correlação.

E.3.2 Na terminologia tradicional, a equação (E.3) é, freqüentemente, chamada a "lei geral de propagação do erro", um título que é melhor aplicado a uma expressão da forma $\Delta z = \sum_{i=1}^{N} (\delta f / \delta w_i) \Delta w_i$ onde Δz é a mudança em z devido a (pequenas) variações Δw_i em w_i [ver equação (E.8)]. De fato, é apropriado denominar a equação (E.3) de lei de propagação da incerteza, como é dado neste *Guia*, porque ela mostra como as incertezas das grandezas de entrada w_i, tomadas como iguais aos desvios padrão das distribuições de probabilidade de w_i, se combinam para fornecer a incerteza da grandeza de saída z, se aquela incerteza é tomada como igual ao desvio padrão da distribuição de probabilidade de z.

E.3.3 A equação (E.3) também se aplica à propagação de múltiplos de desvios padrão, pois, se cada desvio padrão σ_i é substituído por um múltiplo $k\sigma_i$, com o mesmo k para cada σ_i, o desvio padrão da grandeza de saída z é substituído por $k\sigma_z$. Entretanto, ela não deve ser aplicada à propagação de intervalos de confiança. Se cada σ_i é substituído por uma grandeza δ_i que define um intervalo correspondente a um dado nível da confiança p, a grandeza resultante, para z, δ_z,, não definirá um intervalo correspondente ao mesmo valor de p, a não ser que todos os w_i sejam descritos por distribuições normais. Nenhuma de tais suposições quanto à normalidade das distribuições de probabilidade das grandezas w_i está implícita na equação (E.3). Mais especificamente, se na equação (10), em 5.1.2, cada incerteza padrão $u(x_i)$ é avaliada por meio de repetidas observações independentes e multiplicada pelo fator-t, apropriado para seus graus de liberdade para um valor particular de p (digamos, p = 95 por cento), a incerteza da estimativa y não irá definir um intervalo correspondendo àquele valor de p (ver G.3 e G.4).

Nota - O requisito de normalidade, quando se propagam intervalos de confiança usando a equação (E.3), pode ser uma das razões para a separação histórica dos componentes da incerteza derivada de observações repetidas, que se supôs serem normalmente distribuídas, daqueles que foram avaliados simplesmente como limites superior e inferior.

E.3.4 Considere o seguinte exemplo: z depende somente de uma grandeza de entrada w, $z = f(w)$, onde w é estimado pela média de n valores w_k de w; estes n valores são obtidos de n observações repetidas independentes q_k de uma variável aleatória q; w_k e q_k são relacionados por:

$$w_k = \alpha + \beta q_k \qquad \text{(E.4)}$$

Aqui α é um desvio "sistemático" constante ou deslocamento comum a cada observação, e β é um fator de escala comum. O desvio e o fator de escala, embora fixados durante as observações, são supostos como caracterizados por distribuições de probabilidade *a priori*, com α e β como sendo as melhores estimativas das esperanças dessas distribuições.

A melhor estimativa de w é a média aritmética ou média $\overline{w}$ obtida de:

$$\overline{w} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} w_k = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} (\alpha + \beta q_k) \qquad \text{(E.5)}$$

A grandeza z é, então, estimada por $f(\overline{w}) = f(\alpha, \beta, q_1, q_2, ..., q_n)$ e a estimativa $u^2(z)$ de sua variância $\sigma^2(z)$ é obtida pela equação (E.3). Se, para simplificar, se supõe $z = w$, de modo que a melhor estimativa de z é $z = f(\overline{w}) = \overline{w}$, então a estimativa $\mu^2(z)$ pode ser prontamente encontrada. Notando pela equação (E.5) que:

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha} = 1, \quad \frac{\partial f}{\partial \beta} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} q_k = \overline{q} \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial q_k} = \frac{\beta}{n}$$

designando as variâncias estimadas de α e β por $u^2(\alpha)$ e $u^2(\beta)$, respectivamente, e supondo que as observações individuais são não-correlacionadas, a equação (E.3) torna-se:

$$u^2(z) = u^2(\alpha) + \overline{q}^{\,2} u^2(\beta) + \beta^2 \frac{s^2(q_k)}{n} \qquad \text{(E.6)}$$

onde $s^2(q_k)$ é a variância experimental das observações q_k, calculada de acordo com a equação (4), em 4.2.2, e $s^2(q_k)/n = s^2(\overline{q})$ é a variância experimental da média $\overline{q}$ [equação (5), em 4.2.3].

E.3.5 Na terminologia tradicional, o terceiro termo do membro da direita da equação (E.6) é chamado de contribuição "aleatória" à variância estimada $u^2(z)$, porque ele decresce normalmente quando o número de observações n aumenta, enquanto que os dois primeiros termos são chamados contribuições "sistemáticas", porque eles não dependem de n.

De mais significância, em alguns tratamentos tradicionais de incerteza de medição, a equação (E.6) é questionada, pois nenhuma distinção é feita entre as incertezas oriundas de efeitos sistemáticos e as que decorrem de efeitos aleatórios. Em particular, combinar as variâncias obtidas de uma distribuição de probabilidade *a priori* com aquelas obtidas de distribuições baseadas na freqüência é condenado, pois o conceito de probabilidade é considerado como aplicável *somente* a eventos que podem ser repetidos um grande número de vezes sob condições essencialmente iguais, com a probabilidade p de um evento ($0 \le p \le 1$) indicando a *freqüência relativa* com a qual o evento irá ocorrer.

Em contraste com este ponto de vista da probabilidade baseado na freqüência, um ponto de vista igualmente válido é de que a probabilidade é uma medida do *grau de credibilidade* de que um evento irá ocorrer [13, 14]. Por exemplo, suponha que alguém tenha a oportunidade de ganhar uma pequena soma de dinheiro D, e que se trate de um apostador racional. O grau de credibilidade de um evento

A ocorrer é de $p = 0{,}5$, se o apostador é indiferente quanto à escolha de duas apostas: (1) receber *D*, se o evento *A* ocorrer, porém não receber nada, se ele não ocorrer; (2) receber *D*, se o evento *A* não ocorrer, porém, nada, se ele ocorrer. A Recomendação INC-1 (1980) sobre a qual se fundamenta este *Guia* adota implicitamente tal ponto de vista de probabilidade, uma vez que ele encara expressões, tais como a equação (E.6), como a maneira adequada de calcular a incerteza padrão combinada de um resultado de uma medição.

E.3.6 Existem três vantagens distintas em se adotar uma interpretação de probabilidade baseada no grau de credibilidade, no desvio padrão (incerteza padrão) e na lei de propagação da incerteza [equação (E.3)] como bases para avaliação e expressão da incerteza de medição, como foi feito neste *Guia*:

a) lei da propagação de incerteza permite que a incerteza padrão combinada de um resultado seja prontamente incorporada na avaliação da incerteza padrão combinada de outro resultado no qual a primeira é utilizada;

b) a incerteza padrão combinada pode servir de base para calcular intervalos que correspondam, de forma realista, a seus níveis da confiança requeridos;

c) é desnecessário classificar componentes como "aleatórios" ou "sistemáticos" (ou de qualquer outro modo) quando da avaliação da incerteza, porque todos os componentes da incerteza são tratados da mesma maneira.

O benefício c) é altamente vantajoso porque tal categorização é, freqüentemente, fonte de confusão; um componente de incerteza não é ou "aleatório" ou "sistemático". Sua natureza é condicionada pela utilização feita da grandeza correspondente, ou mais formalmente, pelo contexto no qual a grandeza aparece no modelo matemático que descreve a medição. Assim, quando sua grandeza correspondente é usada em um contexto diferente, um componente "aleatório" pode se tornar um componente "sistemático" e vice versa.

E.3.7 Pelo motivo dado em c) acima, a Recomendação INC-1 (1980) não classifica os componentes da incerteza como "aleatórios" ou "sistemáticos". Na realidade, no que se refere ao cálculo da incerteza padrão combinada de um resultado de medição, não há necessidade de classificar componentes de incerteza e, assim, nenhuma necessidade real de qualquer esquema de classificação. Contudo, uma vez que títulos convenientes podem, às vezes, ser úteis na comunicação e discussão de idéias, a Recomendação INC-1 (1980) fornece um esquema para a classificação de dois métodos distintos pelos quais os componentes da incerteza podem ser avaliados, "A" e "B" (ver 0.7, 2.3.2 e 2.3.3).

Classificando-se os métodos usados para avaliar os componentes de incerteza, evita-se o problema principal associado com a classificação dos próprios componentes, isto é, a dependência entre a classificação de um componente e como a grandeza correspondente é utilizada. Entretanto, classificar os métodos, em vez de componentes, não impede que se agrupem os componentes individuais avaliados pelos dois métodos em grupos específicos para um propósito particular, em uma dada medição, por exemplo, quando se compara a variabilidade observada experimentalmente com a prevista teoricamente dos valores de saída de um complexo sistema de medição (ver 3.4.3).

E.4 Desvios padrão como medidas de incerteza

E.4.1 A equação (E.3) requer que, independente de como seja obtida a incerteza de estimativa de uma grandeza de entrada, ela seja avaliada como uma incerteza padrão, isto é, um desvio padrão estimado. Se, em vez disso, alguma alternativa "segura" é avaliada, ela não pode ser usada na equação (E.3). Em particular, se o "máximo limite de erro" (o maior desvio concebível para a estimativa suposta como sendo a melhor) é usado na equação (E.3), a incerteza resultante terá um significado mal definido e não poderá ser utilizada por alguém que queira incorporá-la em cálculos subseqüentes de incertezas de outras grandezas (ver E.3.3).

E.4.2 Quando a incerteza padrão de uma grandeza de entrada não pode ser avaliada pela análise de resultados de um número adequado de observações repetidas, deve-se adotar uma distribuição de probabilidade baseada no conhecimento que é muito menos extenso do que seria desejável. Isso não torna, entretanto, a distribuição inválida ou irreal; como todas as distribuições de probabilidade, ela é uma expressão do conhecimento existente.

E.4.3 As avaliações baseadas em observações repetidas não são necessariamente superiores àquelas obtidas por outros meios. Considere $s(\overline{q})$ o desvio padrão experimental da média de n observações q_k independentes de uma variável q aleatória, distribuída normalmente [veja equação (5), em 4.2.3]. A grandeza $s(\overline{q})$ é uma estatística (ver C.2.23) que estima $\sigma(\overline{q})$, o desvio padrão da distribuição da probabilidade de $\overline{q}$, que é o desvio padrão da distribuição dos valores de $\overline{q}$ que seria obtido se a medição fosse repetida um número infinito de vezes. A variância $\sigma^2[s(\overline{q})]$ de $s(\overline{q})$ é dada, aproximadamente, por:

$$\sigma^2\left[s(\overline{q})\right] \approx \sigma^2(\overline{q}) / 2\nu \qquad \text{(E.7)}$$

onde $\nu = n - 1$ é o número de graus de liberdade de $s(\overline{q})$ (ver G.3.3). Assim o desvio padrão relativo de $s(\overline{q})$, que é dado pela razão $\sigma\left[s(\overline{q})\right] / \sigma(\overline{q})$ e que pode ser tomado como uma medida da incerteza relativa de $s(\overline{q})$, é, aproximadamente, $[2(n-1)]^{-1/2}$. Esta "incerteza da incerteza" de $\overline{q}$ que decorre do motivo puramente estatístico da amostragem limitada, pode ser surpreendentemente grande; para n = 10 observações, é de 24 por cento. Este e outros valores são dados na tabela E.1, que mostra que o desvio padrão de um desvio padrão estatisticamente estimado não é desprezível para valores práticos de n. Pode-se, portanto, concluir que as avaliações do Tipo A da incerteza padrão não são necessariamente mais confiáveis do que as avaliações do Tipo B, e que em muitas situações práticas de medições, onde o número de observações é limitado, os componentes obtidos por avaliações do Tipo B podem ser melhor conhecidos do que os componentes obtidos de avaliações do Tipo A.

Tabela E.1 $\sigma\left[s(\overline{q})\right] / \sigma(\overline{q})$, o desvio padrão do desvio padrão experimental da média $\overline{q}$ de n observações independentes de uma variável aleatória normalmente distribuída q, relativo ao desvio padrão daquela média[(a)].

Número de observações n	$\sigma[s(\overline{q})] / \sigma(\overline{q})$ (por cento)
2	76
3	52
4	42
5	36
10	24
20	16
30	13
50	10

[(a)]Os valores dados foram calculados da expressão exata para $\sigma\left[s(\overline{q})\right] / \sigma(\overline{q})$, e não para a expressão aproximada $[2(n-1)]^{-1/2}$.

E.4.4 Foi levantada a questão de que, enquanto as incertezas associadas com a aplicação de um método particular de medição são parâmetros estatísticos caracterizando variáveis aleatórias, existem exemplos de um "efeito verdadeiramente sistemático" cuja incerteza deve ser tratada diferentemente. Um exemplo é um desvio tendo um valor fixo desconhecido que é o mesmo para cada determinação pelo método devido à uma possível imperfeição no próprio princípio do método em si ou em uma de suas hipóteses. Mas, se se reconhece que tal possibilidade de desvio existe e se sua magnitude é tida como sendo possivelmente significativa, então ele pode ser descrito por uma distribuição de probabilidade, ainda que simplesmente construída, baseada no conhecimento que levou à conclusão de que ele poderia existir e de que era significativo. Assim, se se considerar a probabilidade como uma medida do grau de credibilidade de que um evento irá ocorrer, a contribuição de tal efeito sistemático pode ser incluída na incerteza padrão combinada de um resultado de medição, pela avaliação desta como uma incerteza padrão de uma distribuição de probabilidade *a priori*, e tratando-a como qualquer outra incerteza padrão de uma grandeza de entrada.

EXEMPLO - A especificação de um procedimento de medição particular *requer* que uma certa grandeza de entrada seja calculada a partir de uma expansão em série de potências específicas cujos termos de maior ordem não são exatamente conhecidos. O efeito sistemático, devido a não ser possível tratar com exatidão estes termos, leva a um desvio fixo desconhecido que não pode ser experimentalmente amostrado por repetições do procedimento. Assim, a incerteza associada com o efeito não pode ser avaliada e incluída na incerteza do resultado final de medição se uma interpretação da probabilidade, baseada em freqüencia, é estritamente seguida. Entretanto, interpretando-se a probabilidade na base do grau de credibilidade, permite-se uma incerteza, caracterizando o efeito a ser avaliado de uma distribuição de probabilidade *a priori* (derivada do conhecimento disponível concernente aos termos conhecidos sem exatidão) e que seja incluída no cálculo da incerteza padrão combinada do resultado da medição, como qualquer outra incerteza.

E.5 Uma comparação entre duas abordagens da incerteza

E.5.1 O enfoque deste *Guia* é sobre o resultado de medição e sua incerteza avaliada, em vez de sobre as grandezas desconhecidas, o valor "verdadeiro" e erro das grandezas desconhecidas (ver o anexo D).

Este *Guia*, na realidade, desfaz a conexão, muitas vezes confusa, entre as grandezas desconhecidas, valor "verdadeiro" e erro, tomando-se os pontos de vista operacionais: que o resultado de uma medição é simplesmente o valor atribuído ao mensurando e que a incerteza desse resultado é uma medida de dispersão dos valores que poderiam, razoavelmente, ser abtribuídos ao mensurando.

E.5.2 Esta conexão pode ser entendida ao se interpretar a derivação da equação (E.3), a lei da propagação da incerteza, do ponto de vista de valor "verdadeiro" e erro. Neste caso, μ_i é considerado como desconhecido, único valor "verdadeiro" da grandeza de entrada w_i e cada w_i é suposto ser relacionado ao seu valor "verdadeiro" μ_i por $w_i = \mu_i + \varepsilon_i$, onde ε_i é o erro em w_i. A esperança da distribuição da probabilidade de cada ε_i é supostamente nula, $E(\varepsilon_i) = 0$, com variância $E(\varepsilon_i^2) = \sigma_i^2$. A equação (E.1) passa, então, a ser:

$$\varepsilon_z = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial f}{\partial w_i} \varepsilon_i \tag{E.8}$$

onde $\varepsilon_z = z - \mu_z$ é o erro em z e μ_z é o valor "verdadeiro" de z. Tomando-se a esperança do quadrado de ε_z, obtém-se uma equação idêntica, na forma, à equação (E.3), mas onde $\sigma_z^2 = E(\varepsilon_z^2)$ é a variância de ε_z, e $\rho_{i,j} = \upsilon(\varepsilon_i, \varepsilon_j) / (\sigma_i^2 \sigma_j^2)^{1/2}$ é o coeficiente de correlação de ε_i e ε_j, onde $\upsilon(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = E(\varepsilon_i, \varepsilon_j)$ é a covariância de ε_i e ε_j. As variâncias e os coeficientes de correlação estão portanto, associados, aos *erros* das grandezas de entrada, em vez de estarem associadas às próprias grandezas de entrada.

NOTA - Supõe-se que a probabilidade seja vista como uma medida do grau de credibilidade de que um evento irá ocorrer. Isso implica que um erro sistemático pode ser tratado da mesma forma que um erro aleatório e que ε_i representa ambos os tipos de erros.

E.5.3 Na prática, a diferença de pontos de vista não leva a uma diferença no valor numérico do resultado da medição ou da incerteza atribuída a esse resultado.

Primeiro, em ambos os casos, as melhores estimativas disponíveis das grandezas de entrada w_i são utilizadas para obter a melhor estimativa de z através da função f; não faz nenhuma diferença *nos cálculos* se as melhores estimativas são vistas como os valores mais prováveis de serem atribuídos às grandezas em questão, ou como as melhores estimativas de seus valores "verdadeiros".

Segundo, uma vez que $\varepsilon_i = w_i - \mu_i$ e que μi representa valores únicos e fixos e, por conseqüência, não tem incerteza, as variâncias e os desvios padrão de ε_i e de w_i são idênticos. Isso significa que, em ambos os casos, as incertezas padrão utilizadas como estimativas dos desvios padrão σ_i, para obter a incerteza padrão combinada do resultado da medição, são idênticas e fornecem o mesmo valor numérico para aquela incerteza. Novamente, não faz nenhuma diferença *nos cálculos* se uma incerteza padrão é vista como uma medida da dispersão da distribuição da probabiliade de uma grandeza de entrada ou como uma medida da dispersão da distribuição de probabilidade do erro dessa grandeza.

NOTA - Se a suposição da nota de E.5.2 não tivesse sido feita, então a discussão deste item não iria ter a aplicação, a não ser que todas as estimativas das grandezas de entrada e da incerteza dessas estimativas fossem obtidas da análise estatística de observações repetidas, isto é, de avaliações do Tipo A.

E.5.4 Embora o enfoque baseado no valor "verdadeiro" e erro forneça os mesmos resultados numéricos que o enfoque tomado por este Guia (desde que a suposição da nota E.5.2 seja feita), o conceito de incerteza deste Guia elimina a confusão entre erro e incerteza (ver o anexo D). Na realidade, o enfoque operacional deste Guia, pelo qual é focalizado o valor observado (ou estimado) de uma grandeza e a variabilidade observada (ou estimada) desse valor, faz qualquer menção a erro inteiramente desnecessária.

Anexo F
Guia prático para avaliação de componentes de incerteza

Este anexo dá sugestões adicionais para avaliar componentes de incerteza, principalmente de natureza prática, que têm o propósito de complementar as sugestões já dadas no capítulo 4.

F.1 Componentes avaliados a partir de observações repetidas: avaliação Tipo A da incerteza padrão

F.1.1 Aleatoriedade e observações repetidas

F.1.1.1 As incertezas determinadas a partir de observações repetidas são, freqüentemente, contrastadas com aquelas avaliadas por outros meios, como sendo “objetivas”, “estatisticamente rigorosas”, etc. Isso sugere, erroneamente, que elas podem ser avaliadas meramente pela aplicação de fórmulas estatísticas às observações e que suas avaliações não requerem a aplicação de algum discernimento.

F.1.1.2 Deve-se perguntar primeiro: “Em que extensão as observações repetidas são repetições completamente independentes do procedimento de medição”? Se todas as observações são de uma amostra única, e se a amostragem é parte do procedimento de medição porque o mensurando é a propriedade de um material (ao contrário da propriedade de um dado material em particular), então as observações não foram independentemente repetidas; uma avaliação de um componente da variância, decorrente de possíveis diferenças entre amostras, deve ser adicionada à variância das observações repetidas realizadas sobre a amostra única.

Se zerar um instrumento é parte do procedimento de medição, o instrumento deve ser novamente zerado como parte de cada repetição, mesmo se houver um desvio desprezível durante o período em que as observações são feitas, pois há potencialmente, uma incerteza estatisticamente determinável, atribuível à operação de zerar.

Similarmente, se um barômetro deve ser lido, ele deve, em princípio, ser lido para cada repetição da medição (preferivelmente, após perturbá-lo e deixá-lo voltar ao seu equilíbrio), pois pode haver uma variação tanto na indicação como na leitura, mesmo se a pressão barométrica for constante.

F.1.1.3 Em segundo lugar, deve-se perguntar se todas as influências, supostamente aleatórias, são, de fato, aleatórias. Serão constantes as médias e variâncias de suas distribuições ou haverá, talvez, um desvio no valor de uma grandeza de influência não medida, durante o período das observações repetidas? Se há um número suficiente de observações, as médias aritméticas dos resultados da primeira e segunda metades do período e seus desvios padrão experimentais podem ser calculados, e as duas médias, comparadas uma com a outra, de forma a se julgar se a diferença entre elas é estatisticamente significativa e, assim, se há um efeito variando com o tempo.

F.1.1.4 Se os valores dos “serviços comuns” no laboratório (tensão e freqüência da rede elétrica, pressão e temperatura da água, pressão de nitrogênio, etc.) são grandezas de influência, há, normalmente, um forte elemento não aleatório em suas variações que não pode ser ignorado.

F.1.1.5 Se o algarismo menos significativo de uma indicação digital varia continuamente durante uma observação devido a “ruído”, é, por vezes, difícil deixar de selecionar, sem saber, valores pessoalmente preferidos desse algarismo. É melhor arranjar algum meio de congelar a indicação num instante arbitrário e registrar o resultado congelado.

F.1.2 Correlações

Grande parte da discussão neste item é também aplicável a avaliações do Tipo B da incerteza padrão.

F.1.2.1 A covariância associada com as estimativas de duas grandezas de entrada X_i e X_j podem ser tomadas como nulas ou tratadas como insignificantes, se:

a) X_i e X_j forem *não-correlacionadas* (as variáveis aleatórias, não as grandezas físicas que são consideradas invariáveis [ver 4.1.1, nota 1]), por exemplo, seja em razão de terem sido medidas repetidamente, mas não simultaneamente, em experimentos independentes diferentes, ou seja em razão de representarem grandezas resultantes de avaliações *diferentes* que foram realizadas independentemente, ou se

b) qualquer das grandezas X_i ou X_j puder ser tratada como constante, ou se

c) não existirem informações suficientes para avaliar a covariância associada às estimativas de X_i e X_j .

NOTAS

1. Por outro lado, em certos casos, tais como no exemplo da resistência de referência da nota 1 de 5.2.2, fica evidente que as grandezas de entrada são totalmente correlacionadas e que as incertezas padrão de suas estimativas combinam linearmente.

2. Experimentos diferentes podem não ser independentes se, por exemplo, o mesmo instrumento é utilizado em cada um dos experimentos (ver F.1.2.3)

F.1.2.2 Se duas grandezas de entrada observadas simultânea e repetidamente são ou não correlacionadas, pode ser determinado por meio da equação (17), em 5.2.3. Por exemplo, se a freqüência de um oscilador, não compensada ou mal compensada quanto à temperatura, for uma grandeza de entrada, e, se a temperatura ambiente for também uma grandeza de entrada, e se forem observadas simultaneamente, poderá haver uma correlação significativa revelada pela covariância calculada da freqüência do oscilador e da temperatura ambiente.

F.1.2.3 Na prática, as grandezas de entrada são, freqüentemente, correlacionadas, porque o mesmo padrão de medição físico, instrumento de medição, dado de referência, ou até mesmo o método de medição, tendo uma incerteza significativa, são usados na estimativa de seus valores. Sem perda de generalidade, suponha que duas grandezas de entrada X_1 e X_2, estimadas por x_1 e x_2, dependam de um conjunto de variáveis não-correlacionadas $Q_1, Q_2,..., Q_L$. Assim, $X_1 = F(Q_1, Q_2,..., Q_L)$ e $X_2 = G(Q_1, Q_2,..., Q_L)$, embora algumas dessas variáveis possam, na realidade, aparecer em somente uma função e não na outra. Se $u^2(q_l)$ é a variância estimada associada com a estimativa de q_l de Q_l, então a variância estimada associada com x_1 é da equação (10), em 5.1.2:

$$u^2(x_1) = \sum_{l=1}^{L} \left[\frac{\partial F}{\partial q_l}\right]^2 u^2(q_l) \tag{F.1}$$

com uma expressão similar para $u^2(x_2)$. A covariância estimada associada a x_1 e x_2 é dada por:

$$u(x_1, x_2) = \sum_{l=1}^{L} \frac{\partial F}{\partial q_l}\frac{\partial G}{\partial q_l} u^2(q_l) \tag{F.2}$$

Em razão de somente aqueles termos para os quais $\partial F/\partial q_l \neq 0$ e $\partial G/\partial q_l \neq 0$, para um dado l, contribuírem para a soma, a covariância é zero, se nenhuma variável é comum a ambos, F e G.

O coeficiente de correlação estimado $r(x_1, x_2)$, associado com as duas estimativas x_1 e x_2, é determinado através de $u(x_1, x_2)$ [equação (F.2)] e equação (14), em 5.2.2, com $u(x_1)$ calculado da equação (F.1) e $u(x_2)$, de uma expressão similar [ver também a equação (H.9), em H.2.3]. Isto também é possível para as covariâncias estimadas, associadas com duas estimativas de entrada, tendo ambas um componente estatístico [ver equação (17), em 5.2.3] e um componente oriundo da discussão deste item.

EXEMPLOS

1 Um resistor padrão R_s é usado na mesma medição para determinar tanto a corrente I como a temperatura t. A corrente é determinada, medindo-se, com um voltímetro digital, a diferença de potencial nos terminais do padrão; a temperatura é determinada medindo-se, com uma ponte de resistência e com o padrão, a resistência $R_t(t)$ de um sensor resistivo de temperatura calibrado, cuja relação temperatura - resistência, na faixa de 15 ºC ≤ t ≤ 30 ºC, é $t = aR_t^2(t) - t_o$, onde a e t_o são constantes conhecidas. Assim, a corrente é determinada através da relação $I = V_s/R_s$ e a temperatura, através da relação $t = a\beta^2(t)R_s^2 - t_o$, onde $\beta(t)$ é a razão medida $R_t(t)/R_s$ fornecida pela ponte.

Como apenas a grandeza R_s é comum à expressão de I e t, a equação (F.2) fornece para a covariância de I e t

$$u(I,t) = \frac{\partial I}{\partial R_s}\frac{\partial t}{\partial R_s} u^2(R_s)$$

$$= \left[-\frac{V_s}{R_s^2}\right](2\,a\beta^2(t)R_s)\,u^2(R_s) =$$

$$= -\frac{2I(t+t_o)}{R_s^2}u^2(R_s)$$

(Por simplicidade de notação, neste exemplo foi usado o mesmo símbolo tanto para a grandeza de entrada como para a sua estimativa).

Para obter o valor numérico da covariância, substituiem-se, nesta expressão, os valores numéricos das grandezas medidas I e t, e os valores de R_s e $u(R_s)$ dados no certificado de calibração do resistor padrão. A unidade de $u(I,t)$ é, claramente A °C, uma vez que a variância relativa $[u(R_s)/R_s]^2$ é uma grandeza adimensional.

Seja uma grandeza P relacionada com as grandezas de entrada I e t por $P = C_o I^2/(T_o + t)$, onde C_o e T_o são constantes conhecidas, com incertezas desprezíveis $[u^2(C_o) \approx 0, u^2(T_o) \approx 0]$. A equação (13), em 5.2.2, então, fornece para a variância de P em termos das variâncias de I e t e de sua covariância:

$$\frac{u^2(P)}{P^2} = 4\frac{u^2(I)}{I^2} - 4\frac{u(I,t)}{I(T_o+t)} + \frac{u^2(t)}{(T_o+t)^2}$$

As variâncias $u^2(I)$ e $u^2(t)$ são obtidas através da aplicação da equação (10) de 5.1.2 às relações $I = V_s/R_s$ e $t = a\beta^2(t)R_s^2 - t_o$. Os resultados são:

$$u^2(I)/I^2 = u^2(V_s)/V_s^2 + u^2(R_s)/R_s^2$$

$$u^2(t) = 4(t+t_o)^2u^2(\beta)/\beta^2 + 4(t+t_o)^2u^2(R_s)/R_s^2$$

nos quais, para simplificar, supõe-se que as incertezas das contantes t_o e a sejam também desprezíveis. Estas expressões podem ser prontamente avaliadas, uma vez que $u^2(V_s)$ e $u^2(\beta)$ podem ser determinadas, respectivamente, a partir de leituras repetidas do voltímetro e da ponte de resistência. Naturalmente, quaisquer incertezas inerentes aos próprios instrumentos e aos procedimentos de medição empregados devem também ser levados em conta, quando $u^2(V_s)$ e $u^2(\beta)$ são determinados.

2. No exemplo da nota 1 de 5.2.2, suponhamos que a calibração de cada resistor seja representada por $R_i = \alpha_i R_s$, com $u(\alpha_i)$ sendo a incerteza padrão da razão medida α_i, tal como obtida em observações repetidas. Além disso, admitindo-se que $\alpha_i \approx 1$ para cada resistor e que $u(\alpha_i)$ seja essencialmente a mesma para cada calibração, de forma que $u(\alpha_i) = u(\alpha)$. Então, as equações (F.1) e (F.2) fornecem $u^2(R_i) = R_s^2u^2(\alpha) + u^2(R_s)$ e $u(R_i,R_j) = u^2(R_s)$. Isso implica, através da equação (14), em 5.2.2, que o coeficiente de correlação de quaisquer dois resistores ($i \neq j$) é:

$$r(R_i, R_j) \equiv r_{ij} = \left(1 + \left(\frac{u(\alpha)}{u(R_s)/R_s}\right)^2\right)^{-1}$$

Desde que $u(R_s)/R_s = 10^{-4}$, se $u(\alpha) = 100 \times 10^{-6}$, $r_{ij} \approx 0{,}5$; se $u(\alpha) = 10 \times 10^{-6}$, $r_{i,j} \approx 0{,}990$; e, se $u(\alpha) = 1 \times 10^{-6}$, $r_{i,j} \approx 1{,}000$. Assim, quando $u(\alpha) \to 0$, $r_{i,j} \to 1$ e $u(R_i) \to u(R_s)$.

NOTA - Em geral, em calibrações por comparação, tais como neste exemplo, os valores estimados dos itens calibrados são correlacionados, com o grau de correlação dependendo da razão entre a incerteza da comparação e a incerteza do padrão de referência. Quando, como ocorre freqüentemente na prática, a incerteza da comparação é desprezível com respeito à incerteza do padrão, os coeficientes de correlação são iguais a +1 e a incerteza de cada ítem de calibração é a mesma que a do padrão.

F.1.2.4 A necessidade de introduzir a covariância $u(x_i,x_j)$ pode ser dispensada, se o conjunto original de grandezas de entrada $X_1, X_2, ..., X_N$, das quais o mensurando Y depende [ver a equação (1), em 4.1], é redefinido, de tal maneira que inclua como grandezas de entrada adicionais e independentes aquelas grandezas Q_l, comuns a duas ou mais das X_i originais. (Pode ser necessário executar medições adicionais para estabecer integralmente a relação entre Q_l e as X_i afetadas). No entanto, em algumas situações pode ser mais conveniente manter as covariâncias em vez de, aumentar o número das grandezas de entrada. Um processo similar pode ser realizado para as covariâncias encontradas em observações repetidas simultaneamente [ver a equação (17), em 5.2.3], porém a identificação das grandezas de entrada adicionais apropriadas é, freqüentemente, arbitrada e não física.

EXEMPLO - Se, no exemplo 1 do item anterior, as expressões para I e t em termos de R_s são introduzidas na expressão de P, o resultado é:

$$P = \frac{C_o V_s^2}{R_s^2[T_o + a\beta^2(t)R_s^2 - t_o]}$$

e a correlação entre I e t é evitada à custa da substituição das grandezas de entrada I e t pelas grandezas V_s, R_s e β. Como essas grandezas não são correlacionadas, a variância de P pode ser obtida a partir da equação (10) de 5.1.2.

F.2 Componentes avaliados por outros meios: avaliação do Tipo B da incerteza padrão

F.2.1 A necessidade de avaliações do Tipo B

Se um laboratório de medição tivesse recursos e tempo ilimitados, ele poderia conduzir a uma exaustiva investigação estatística de todas as causas concebíveis de incerteza, por exemplo, utilizando muitas marcas e tipos diferentes de instrumentos, diferentes métodos de medição, diferentes aplicações do método e diferentes aproximações dos seus modelos teóricos de medição. As incertezas associadas a todas essas causas poderiam, então, ser avaliadas pela análise estatística de séries de observações, e a incerteza de cada causa seria caracterizada por um desvio padrão estatisticamente avaliado. Em outras palavras, todos os componentes da incerteza seriam obtidos através de avaliações do Tipo A. Como tal investigação não tem nenhuma praticidade econômica, muitos componentes da incerteza devem ser avaliados por quaisquer outros meios que sejam práticos.

F.2.2 Distribuições determinadas matematicamente

F.2.2.1 Resolução de uma indicação digital

Uma fonte de incerteza de um instrumento digital é a resolução de seu dispositivo indicador. Por exemplo, mesmo se as observações repetidas forem todas idênticas, a incerteza de medição atribuível à repetitividade não seria zero, pois há uma faixa de sinais de entrada no instrumento, varrendo um intervalo conhecido, que dariam a mesma indicação. Se a resolução do dispositivo indicador é δx, o valor do estímulo que produz uma dada indicação pode estar situado com igual probabilidade em qualquer lugar no intervalo X-$\delta x/2$ a X+$\delta x/2$. O estímulo é, então, descrito por uma distribuição de probabilidade retangular (ver 4.3.7 e 4.4.5), de amplitude δx, com variância u^2=$(\delta x)^2/12$, implicando em uma incerteza padrão de u=0,29 δx para qualquer indicação.

Assim, um instrumento de pesagem, com um dispositivo indicador cujo menor algarismo significativo é 1 g, tem uma variância devido à resolução do dispositivo de $u^2 = (1/12)\ g^2$ e uma incerteza padrão de $u = (1/\sqrt{12})g = 0{,}29g$.

F.2.2.2 Histerese

Certos tipos de histerese podem causar um tipo similar de incerteza. A indicação de um instrumento pode diferir por um valor fixado e conhecido, caso as leituras sucessivas sejam crescentes ou decrescentes. O operador prudente anota a direção das sucessivas leituras e faz a correção apropriada. Entretanto, a direção da histerese não é sempre observável: pode haver oscilações ocultas do instrumento, em torno do ponto de equilíbrio, de modo que a indicação dependa da direção pela qual este ponto de equilíbrio é finalmente alcançado. Se a faixa de leituras possíveis desta causa for δx, a variância é, novamente, $u^2 = \delta x^2/12$, e a incerteza padrão devido à histerese é u=0,29 δx.

F.2.2.3 Aritmética de precisão-finita

O arredondamento ou corte de números provenientes da redução automática de dados pelo computador pode, também, ser uma fonte de incerteza. Considere, por exemplo, um computador com um comprimento de palavra de 16 bits. Se, no decorrer da computação, um número tendo esse comprimento de palavra é subtraído de outro do qual ele difira apenas no 16º bit, somente permanece um bit significativo. Tais eventos podem ocorrer na avaliação de algoritmos "mal-condicionados" e podem ser difíceis de prever. Pode-se obter uma determinação empírica da incerteza, aumentando-se a grandeza de entrada mais importante para o cálculo (há freqüentemente, uma que é proporcional à magnitude da grandeza de saída) por pequenos incrementos até que a grandeza de saída mude; a menor mudança na grandeza de saída que pode ser obtida por tais meios pode ser tomada como uma medida da incerteza; se é δx, a variância é $u^2 = (\delta x)^2/12$ e $u = 0{,}29\ \delta x$.

NOTA - Pode-se verificar a avaliação da incerteza, comparando-se o resultado da computação levada a efeito na máquina com limitação do comprimento de palavra, com o resultado da mesma computação efetuada por uma máquina com um comprimento de palavra significativamente maior.

F.2.3 Valores de entrada importados

F.2.3.1 Um valor *importado* para uma grandeza de entrada é um valor que não foi estimado no decorrer de uma dada medição, mas que foi obtido em outra parte como resultado de uma avaliação independente. Freqüentemente, tal valor importado é acompanhado de algum tipo de declaração de sua incerteza. Por exemplo, a incerteza pode ser dada como um desvio padrão, um múltiplo de um desvio padrão, ou a semifaixa de um intervalo, tendo um nível da confiança declarado. Alternativamente, limites superior ou inferior podem ser fornecidos, ou nenhuma informação pode ser fornecida sobre a incerteza. Neste último caso, aqueles que utilizam o valor devem empregar seu próprio conhecimento da magnitude provável da incerteza, dada a natureza da grandeza, pela confiabilidade da fonte, pelas incertezas obtidas na prática para essas grandezas, etc.

NOTA - A discussão da incerteza de grandezas de entrada importadas é incluída neste item sobre a avaliação do Tipo B de incerteza padrão por conveniência; a incerteza de tal grandeza poderia ser composta por componentes obtidos por avaliações do Tipo A ou componentes obtidos por avaliações de ambos os Tipos, A e B. Como é desnecessário distinguir entre componentes avaliados pelos dois métodos diferentes para se calcular uma incerteza padrão combinada, é também desnecessário conhecer a composição de uma incerteza de uma grandeza importada.

F.2.3.2 Alguns laboratórios de calibração têm adotado a prática de expressar a "incerteza" na forma de limites de confiança superior e inferior que definem um intervalo, tendo um nível da confiança "mínimo", por exemplo, "pelo menos" 95 por cento. Isso pode ser visto como um exemplo da assim chamada incerteza "segura" (ver E.1.2) e esta não pode ser convertida em uma incerteza padrão sem o conhecimento de como ela foi calculada. Se é dada informação suficiente, ela pode ser recalculada de acordo com as regras deste *Guia*; de outra forma, uma avaliação independente da incerteza deve ser feita por quaisquer outros meios que estejam disponíveis.

F.2.3.3 Algumas incertezas são dadas, simplesmente, como limites máximos dentro dos quais *todos* os valores da grandeza estarão contidos. É uma prática comum supor que todos os valores dentro desses limites são igualmente prováveis (uma distribuição de probabilidade retangular), mas tal distribuição não deve ser suposta, se existem razões para se esperar que os valores que estejam dentro do intervalo, porém, próximos aos limites, sejam menos prováveis do que aqueles que estão mais próximos do centro desses limites. Uma distribuição retangular de semifaixa a tem uma variância $a^2/3$; uma distribuição normal para a qual a é a semifaixa de um intervalo, tendo um nível da confiança de 99,73 por cento tem uma variância de $a^2/9$. Pode ser prudente adotar um meio termo entre esses valores, por exemplo, supondo-se uma distribuição triangular, para a qual a variância é $a^2/6$ (ver 4.3.9 e 4.4.6).

F.2.4 Valores de entrada medidos

F.2.4.1 Observação única, instrumentos calibrados

Se uma estimativa de entrada foi obtida através de uma única observação, com um determinado instrumento que tenha sido calibrado por um padrão de pequena incerteza, a incerteza da estimativa é, principalmente, a de repetitividade. A variância de medições repetidas pelo instrumento pode ter sido obtida em uma ocasião anterior, não de modo necessário para precisamente o mesmo valor de leitura, mas próximo o suficiente para ser útil, e pode ser possível supor que a variância seja aplicável ao valor de entrada em questão. Se nenhuma informação é disponível, deve ser feita uma estimativa baseada na natureza do aparelho ou instrumento de medição, nas variâncias conhecidas de outros instrumentos de construção similar, etc.

F.2.4.2 Observação única, instrumentos verificados

Nem todos os instrumentos de medição são acompanhados de um certificado de calibração ou de uma curva de calibração. A maioria dos instrumentos, entretanto, é construída de acordo com uma norma escrita e verificada, seja pelo fabricante ou por uma autoridade independente, para estar em conformidade com esse documento. Usualmente, a norma contém requisitos metrológicos, freqüentemente na forma de "erros máximos permissíveis", com os quais se requer que o instrumento esteja conforme. O atendimento do instrumento a esses requisitos é determinado por comparação com um instrumento de referência cuja incerteza máxima permitida é, geralmente, especificada na norma. Essa incerteza é, então, um componente da incerteza do instrumento verificado.

Se nada é conhecido sobre a curva caraterística de erro do instrumento verificado, deve-se supor que há uma probabilidade igual de que o erro tenha qualquer valor dentro dos limites permitidos, isto é, uma distribuição de probabilidade retangular. Entretanto, certos tipos de instrumentos têm curvas caraterísticas tais que os erros são, por exemplo, provavelmente sempre positivos em parte da faixa de medição e negativos em outra. Algumas vezes, tal informação pode ser deduzida pelo estudo da norma escrita.

F.2.4.3 Grandezas controladas

Medições são freqüentemente feitas sob condições de referência controladas que se supõe que permaneçam constantes no decorrer de uma série de medições. Por exemplo, medições podem ser efetuadas em amostras em um banho de óleo agitado, cuja temperatura seja controlada por um termostato. A temperatura do banho pode ser medida ao mesmo tempo em que se realiza a medição em uma amostra, mas, se a temperatura do banho é cíclica, a temperatura instantânea da amostra pode não ser a temperatura indicada pelo termômetro no banho. O cálculo das flutuações da temperatura da amostra baseado na teoria de transferência de calor, e de sua variância, está além do escopo deste *Guia*, porém ele deve começar a partir de um ciclo conhecido ou suposto de temperatura para banho. Este ciclo pode ser observado por um termopar adequado e um registrador de temperatura, mas, na falta deles, pode-se deduzir uma aproximação do valor a partir do conhecimento da natureza dos controles.

F.2.4.4 Distribuições assimétricas de valores possíveis

Há ocasiões em que todos os valores possíveis de uma grandeza se encontram de um lado de um valor limitante único. Por exemplo, quando se mede uma altura vertical fixa h (o mensurando) de uma coluna de líquido em um manômetro, o eixo da altura do dispositivo medidor pode se desviar da vertical por um pequeno ângulo β. A distância l determinada pelo dispositivo será sempre *maior* do que h; não é possível nenhum valor menor do que h. Isto se dá porque h é igual à projeção l cosβ, implicando $l = h/\cos\beta$, e todos os valores de cosβ são menores que um; nenhum valor maior do que um é possível. Este assim chamado "erro de cosseno" pode também ocorrer de tal maneira que a projeção $h'\cos\beta$, de um mensurando h', é igual à distância observada l, isto é, $l = h'\cos\beta$, e a distância observada é sempre *menor* do que o mensurando.

Se uma nova variável $\delta = 1 - \cos\beta$ é introduzida, as duas diferentes situações são, supondo $\beta \approx 0$, ou $\delta << 1$ como acontece geralmente na prática:

$$h = \bar{l}(1 - \delta) \qquad \text{(F.3a)}$$

$$h' = \bar{l}(1 + \delta) \qquad \text{(F.3b)}$$

Aqui, $\bar{l}$, a melhor estimativa de l, é a média aritmética ou média de n observações independentes repetidas l_k, de l, com uma variância estimada $u^2(\bar{l})$ [ver as equações (3) e (5), em 4.2]. Assim, das equações (F.3a) e (F.3b) segue que, para obter uma estimativa de h ou h', necessita-se de uma estimativa do fator de correção δ, enquanto que, para se obter a incerteza padrão combinada da estimativa de h ou h', necessita-se de $u^2(\delta)$, a variância estimada de δ. Mais especificamente, a aplicação da equação (10) em 5.1.2 às equações (F.3a) e (F.3b) fornece para $u_c^2(h)$ e $u_c^2(h')$ (com sinais - e +, respectivamente):

$$u_c^2 = (1 \mp \delta)^2 u^2(\bar{l}) + \bar{l}^2 u^2(\delta) \qquad \text{(F.4a)}$$

$$\approx u^2(\bar{l}) + \bar{l}^2 u^2(\delta) \qquad \text{(F.4b)}$$

Para se obter estimativas do valor esperado de δ e a variância de δ, assuma que o eixo do dispositivo utilizado para medir a altura da coluna de líquido no manômetro é mantido fixo no plano vertical e que a distribuição dos valores do ângulo de inclinação β, em torno de seu valor esperado de zero, é uma distribuição normal, com variância σ^2. Embora β possa ter valores tanto positivos quanto negativos, $\delta = 1 - \cos\beta$ é positivo para todos os valores de β. Se o desalinhamento do eixo do dispositivo é irrestrito, a orientação do eixo pode variar em um ângulo sólido, uma vez que é capaz de um desalinhamento também de azimute, sendo, porém, β sempre um ângulo positivo.

No caso restrito ou unidimensional, o **elemento de probabilidade** $\rho(\beta)d\beta$ (C.2.5, nota) é proporcional a $\left[\exp(-\beta^2/2\sigma^2)\right]d\beta$; no caso irrestrito ou bidimensional, o elemento de probabilidade é proporcional a $\left[\exp(-\beta/2\sigma^2)\right] sen(\beta)d\beta$. As funções densidade de probabilidade $p(\delta)$ são, nos dois casos, as expressões requeridas para se determinar a esperança e variância de δ para uso nas equações (F.3) e (F.4). Elas podem, prontamente, ser obtidas a partir destes elementos de probabilidades porque o ângulo β pode ser suposto como pequeno e, portanto, $\delta = 1 - \cos\beta$ e senβ podem ser expandidos até a menor ordem em β. Isso gera $\delta \approx \beta^2/2$, $\text{sen}\beta \approx \beta = \sqrt{2\delta}$ e $d\beta = d\delta/\sqrt{2\delta}$. As funções densidade de probabilidade são, então:

$$p(\delta) = \frac{1}{\sigma\sqrt{\pi\delta}} \exp(-\delta/\sigma^2) \qquad \text{(F.5a)}$$

em uma dimensão e

$$p(\delta) = \frac{1}{\sigma^2} \exp(-\delta/\sigma^2) \qquad \text{(F.5b)}$$

em duas dimensões, onde

$$\int_0^\infty p(\delta)d\delta = 1$$

As equações (F.5a) e (F.5b), que mostram que o valor mais provável da correção δ em ambos os casos é zero, fornecem, no caso unidimensional, $E(\delta) = \sigma^2/2$ e $\text{var}(\delta) = \sigma^4/2$ para a esperança e a variância de (δ); e no caso bidimensional, $E(\delta) = \sigma^2$ e $\text{var}(\delta) = \sigma^4$. As equações (F.3a), (F3.b) e (F.4b) tornam-se, então:

$$h = \bar{l}\left[1 - (d/2)u^2(\beta)\right] \qquad \text{(F.6a)}$$

$$h' = \bar{l}\left[1 + (d/2)u^2(\beta)\right] \qquad \text{(F.6b)}$$

$$u_c^2(h) = u_c^2(h') = u^2(\bar{l}) + (d/2)\bar{l}^2 u^4(\beta) \qquad \text{(F.6c)}$$

onde d é a dimensionalidade (d = 1 ou 2) e $u(\beta)$ é a incerteza padrão do ângulo (β), tomado como sendo a melhor estimativa do desvio padrão σ de uma distribuição suposta como normal e a ser avaliada a partir de todas as informações disponíveis relativas à medição (avaliação do Tipo B). Este é um exemplo de um caso em que a estimativa do valor de um mensurando depende da *incerteza* de uma grandeza de entrada.

Embora as equações de (F.6a) até (F.6c) sejam específicas para uma distribuição normal, a análise pode ser efetuada, supondo-se outras distribuições para β. Por exemplo, supondo-se uma distribuição retangular simétrica para β, com limites superior e inferior $+\beta_0$ e $-\beta_0$, no caso unidimensional; $+\beta_0$ e zero, no caso bidimensional; $E(\delta) = \beta_0^2/6$ e $var(\delta) = \beta_0^4/45$, em uma dimensão; $E(\delta) = \beta_0^2 / 4$ e $var(\delta) = \beta_0^4 / 48$, em duas dimensões.

NOTA - Esta é uma situação em que a expansão da função $Y = f(X_1, X_2, \dots, X_N)$, em uma série de Taylor de primeira ordem para obter $u_c^2(y)$, equação (10), em 5.1.2, é inadequada por causa da não-linearidade de *f*: $\overline{\cos\beta} \neq \cos(\overline{\beta})$ (ver nota 2 de 5.1.2, e H.2.4). Embora a análise possa ser realizada inteiramente em termos de β, a introdução da variável δ simplifica o problema.

Outro exemplo de uma situação em que todos os valores possíveis de uma grandeza situam-se de um só lado de um valor limitante único é a determinação por titulação da concentração de um componente em uma solução em que o ponto final é indicado pelo disparo de um sinal; a quantidade de reagente adicionada é sempre maior do que aquela necessária para disparar o sinal; nunca é menor. O excesso titulado além do ponto limite é uma variável requerida na redução de dados, e o procedimento, neste caso (e em casos similares), é supor uma distribuição de probabilidade adequada para o excesso e utilizá-la para obter o valor esperado do excesso e sua variância.

EXEMPLO - Supondo-se uma distribuição retangular de limite inferior 0 e limite superior C_0, para o excesso *z*, o valor esperado do excesso é $C_0/2$, com a variância associada $C_o^2 / 12$. Se a função densidade de probabilidade do excesso for tomada como uma distribuição normal com $0 \le z < \infty$, isto é, $p(z) = (\sigma\sqrt{\pi/2})^{-1} \exp(-z^2 / 2\sigma^2)$, então o valor esperado é $\sigma\sqrt{2/\pi}$, com variância $\sigma^2(1 - 2/\pi)$.

F.2.4.5 Incerteza quando as correções de uma curva de calibração não são aplicadas

A Nota de 6.3.1 discutiu o caso em que uma correção conhecida *b*, para um efeito sistemático significativo, não é aplicada ao resultado relatado de uma medição, mas, em vez disso, é levada em conta, ampliando-se a "incerteza" atribuída ao resultado. Um exemplo é a substituição de uma incerteza expandida *U* por *U* + *b*, onde *U* é uma incerteza expandida obtida sob a suposição de *b* = 0. Esta prática é, por vezes, seguida em situações nas quais todas as seguintes condições se aplicam: o mensurando *Y* é definido sobre uma faixa de valores de um parâmetro *t*, como no caso de uma curva de calibração para um sensor de temperatura; *U* e *b* também dependem de *t*; e somente um único valor de "incerteza" deve ser dado para todas as estimativas *y*(*t*) do mensurando para a faixa dos valores possíveis de *t*. Em tais situações, o resultado da medição é, muitas vezes, relatado como $Y(t) = y(t) \pm [U_{max} + b_{max}]$, onde o índice "max" indica que são usados os valores máximos de *U* e da correção conhecida *b* para a faixa dos valores de *t*.

Embora este *Guia* recomende que sejam aplicadas correções aos resultados de medição para os efeitos sistemáticos significativos conhecidos, isto pode não ser sempre factível em tal situação, devido a um esforço financeiro inaceitável que ocorreria para calcular e aplicar uma correção individual e para calcular e utilizar uma incerteza individual para cada valor de *y*(*t*).

Um enfoque comparativamente simples deste problema, consistente com os princípios deste *Guia*, é como se segue:

Estabeleça uma correção média única $\overline{b}$ a partir de:

$$\overline{b} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} b(t)\, \mathrm{d}t \tag{F.7a}$$

onde t_1 e t_2 definem a faixa de interesse do parâmetro *t*, e considere como a melhor estimativa de *Y*(*t*) o valor $y'(t) = y(t) + \overline{b}$, onde *y*(*t*) é a melhor estimativa não-corrigida de *Y*(*t*). A variância associada à correção média $\overline{b}$ sobre a faixa de interesse é dada por:

$$u^2(\overline{b}) = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} \left[b(t) - \overline{b}\right]^2 \mathrm{d}t \tag{F.7b}$$

sem levar em conta a incerteza da real determinação da correção *b*(*t*). A variância média da correção *b*(*t*) devido à sua determinação real é dada por:

$$\overline{u^2\left[b(t)\right]} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} u^2\left[b(t)\right] \mathrm{d}t \tag{F.7c}$$

onde $u^2[b(t)]$ é a variância da correção *b*(*t*). Similarmente, a variância média de *y*(*t*) proveniente de todas as fontes de incerteza, à exceção da correção *b*(*t*), é obtida de:

$$\overline{u^2\left[y(t)\right]} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} u^2\left[y(t)\right] \mathrm{d}t \tag{F.7d}$$

onde $u^2[y(t)]$ é a variância de *y*(*t*) devido a todas as fontes de incertezas, à exceção de *b*(*t*). O valor único da incerteza padrão a ser usado para todas as estimativas $y'(t) = y(t) + \overline{b}$ do mensurando *Y*(*t*) é, então, a raiz quadrada positiva de:

$$u_c^2(y') = \overline{u^2[y(t)]} + \overline{u^2[b(t)]} + u^2(\overline{b}) \tag{F.7e}$$

Uma incerteza expandida U pode ser obtida, multiplicando-se $u_c(y')$ por um fator de abrangência k adequadamente escolhido , $U = ku_c(y')$, fornecendo $\{Y(t) = y'(t) \pm U = y(t) + \bar{b} \pm U$. Entretanto, o uso da mesma correção média para todos os valores de t, em vez da correção apropriada para cada valor de t, deve ser reconhecida e declarada de forma clara no tocante ao que U representa.

F.2.5 Incerteza do método de medição

F.2.5.1 Talvez o componente de incerteza mais difícil de avaliar seja aquele associado com o método de medição, especialmente se a aplicação do método demonstrou dar resultados com menor variabilidade que os de quaisquer outros métodos conhecidos. Mas é provável que existam outros métodos, alguns deles ainda desconhecidos ou, de alguma forma, pouco práticos, que dariam de modo sistemático, resultados diferentes aparentemente de igual validade. Isto implica numa distribuição de probabilidade *a priori*, não uma distribuição da qual as amostras podem ser rapidamente extraídas e tratadas estatisticamente. Assim, muito embora a incerteza do método possa ser dominante, a única informação muitas vezes disponível para avaliar sua incerteza padrão é o próprio conhecimento existente do mundo físico (ver também E.4.4).

NOTA - A determinação do mesmo mensurando por diferentes métodos, seja no mesmo laboratório, seja em laboratórios diferentes, ou pelo mesmo método em laboratórios diferentes, pode, muitas vezes, fornecer informação valiosa acerca da incerteza atribuível a um método em particular. Em geral, a troca de padrões de medição ou de materiais de referência entre laboratórios para medições independentes é um meio usual de avaliar a confiabilidade das avaliações de incerteza e de identificar efeitos sistemáticos não reconhecidos previamente.

F.2.6 Incerteza da amostra

F.2.6.1 Muitas medições envolvem a comparação de um objeto desconhecido com um padrão conhecido, tendo características similares, de forma a calibrar o desconhecido. Exemplos incluem blocos padrão, certos termômetros, conjuntos de massas, resistores e materiais de alta pureza. Na maioria desses casos, os métodos de medição não são especialmente sensíveis, ou afetados prejudicialmente, pela seleção da amostra (isto é, o desconhecido em particular sendo calibrado), pelo tratamento da amostra ou pelos efeitos das várias grandezas ambientais de influência, porque, em geral, tanto o padrão como o desconhecido respondem do mesmo modo (e freqüentemente predito) a tais variáveis.

F.2.6.2 Em algumas situações práticas de medição, a amostragem e o tratamento das amostras desempenham um papel muito mais importante. Este é, muitas vezes, o caso da análise química de materiais naturais. Ao contrário dos materiais feitos pelo homem, que podem ter uma homogeneidade comprovada em um nível bem acima do requerido para a medição, os materiais naturais são, freqüentemente, muito heterogêneos. Essa heterogeneidade conduz a dois componentes adicionais de incerteza. A avaliação do primeiro requer a determinação de quão adequadamente a amostra selecionada representa o material original sendo analisado. A avaliação do segundo requer a determinação da extensão na qual os constituintes secundários (não analisados) influenciam a medição e quão adequadamente eles são tratados pelo método de medição.

F.2.6.3 Em alguns casos, o planejamento cuidadoso da experiência pode tornar possível avaliar estatisticamente a incerteza devido à amostra (ver H.5 e H.5.3.2). Usualmente, entretanto, especialmente quando os efeitos de grandezas ambientais de influência sobre a amostra são significativos, a habilidade e conhecimento do analista, derivados de sua experiência e de todas as informações então disponíveis, são requeridos para avaliar a incerteza.

Anexo G
Graus de liberdade e níveis da confiança

G.1 Introdução

G.1.1 Este anexo trata da questão geral da obtenção de uma incerteza expandida $U_p = k_p u_c(y)$, a partir da estimativa y do mensurando Y e de sua incerteza padrão combinada $u_c(y)$, que define um intervalo $y - U_p \leq Y \leq y + U_p$, o qual tem uma alta probabilidade de abrangência especificada ou nível da confiança p. O anexo, então, trata da determinação do fator de abrangência k_p que produz um intervalo em torno do resultado y da medição, do qual se espera que abranja uma grande fração especificada p da distribuição de valores que poderiam, razoavelmente, ser atribuídos ao mensurando Y (ver item 6).

G.1.2 Em muitas situações práticas de medição, o cálculo de intervalos tendo níveis da confiança especificados - de fato, a estimativa da maioria dos componentes individuais da incerteza em tais situações - é somente, a melhor aproximação. Até mesmo o desvio padrão experimental da média do equivalente a 30 observações repetidas de uma grandeza descrita por uma distribuição normal tem uma incerteza de cerca de 13 por cento (ver a tabela E.1, no anexo E).

Na maioria dos casos, não faz sentido tentar distinguir entre, por exemplo, um intervalo tendo um nível da confiança de 95 por cento (uma chance em 20 de que o valor do mensurando Y esteja fora do intervalo) e tampouco um intervalo de 94 ou 96 por cento (1 chance em 17 e 25, respectivamente). É particularmente difícil obter intervalos da confiança justificáveis com níveis da confiança de 99 por cento (1 chance em 100) e maiores, mesmo que ele assuma que nenhum efeito sistemático tenha sido esquecido, porque, geralmente, se dispõe de muito pouca informação sobre as porções extremas ou "caudas" das distribuições de probabilidade das grandezas de entrada.

G.1.3 Para obter o valor do fator de abrangência k_p, que produz um intervalo corrrespondente a um nível especificado da confiança p, requer-se um conhecimento detalhado da distribuição de probabilidade caracterizada pelo resultado da medição e a sua incerteza padrão combinada. Por exemplo, para uma grandeza z descrita por uma distribuição normal, com esperança μ_z e desvio padrão σ, o valor de k_p, que fornece um intervalo $\mu_z \pm k_p\sigma$, que compreende a fração p da distribuição e, dessa forma, tem uma probabilidade de abrangência ou nível da confiança p, pode ser prontamente calculado. Alguns exemplos são dados na tabela G.1.

Tabela G.1- Valor do fator de abrangência k_p que produz um intervalo da confiança tendo um nível da confiança p, supondo uma distribuição normal.

Nível da confiança p (por cento)	Fator de abrangência k_p
68,27	1
90	1,645
95	1,960
95,45	2
99	2,576
99,73	3

NOTA - Por contraste, se z é descrito por uma distribuição de probabilidade retangular, com esperança μ_z e um desvio padrão $\sigma = a/\sqrt{3}$, onde a é a semifaixa da distribuição, os níveis da confiança p são 57,74 por cento, para $k_p = 1$; 95 por cento, para $k_p = 1{,}65$; 99 por cento, para $k_p = 1{,}71$; 100 por cento, para $k_p \geq \sqrt{3} \approx 1{,}73$. A distribuição retangular é mais estreita do que a distribuição normal no sentido de que é de extensão finita e não tem "caudas".

G.1.4 Se as distribuições de probabilidade das grandezas de entrada $X_1, X_2, ..., X_N$, das quais o mensurando Y depende, são conhecidas [suas esperanças, variâncias e momentos de ordem superior (ver C.2.13 e C.2.22), se as distribuições não são distribuições normais] e se Y é uma função linear das grandezas de entrada, $Y = c_1X_1 + c_2X_2 + ... + c_NX_N$, então a distribuição de probabilidade de Y pode ser obtida por convolução das distribuições de probabilidade individuais [10]. Os valores de k_p que fornecem os intervalos correspondentes aos níveis especificados da confiança p podem, então, ser calculados a partir da distribuição resultante da convolução.

G.1.5 Se a relação funcional entre Y e suas grandezas de entrada é não-linear e se uma expansão de primeira ordem da série de Taylor da relação não é uma aproximação aceitável (ver 5.1.2 e 5.1.5), então a distribuição de probabilidade de Y não pode ser obtida pela convolução das grandezas de entrada. Em tais casos, outros métodos numéricos ou analíticos são requeridos.

G.1.6 Na prática, em razão de os parâmetros que caracterizam as distribuições de probabilidade das grandezas de entrada serem usualmente estimativas, porque não é realista esperar que o nível da confiança a ser associado com um determinado intervalo possa ser conhecido com um alto grau de exatidão, e devido à complexidade de convolução das distribuições de probabilidade, tais convoluções são raramente, se vierem a ser, implementadas quando intervalos com níveis da confiança especificados precisarem ser calculados. Em vez disso, são usadas aproximações para obter vantagem no uso do Teorema Central do Limite.

G.2 Teorema Central do Limite

G.2.1 Se $Y = c_1X_1 + c_2X_2 + ... + c_NX_N = \sum_{i=1}^{N} c_iX_i$ e todos os X_i são caracterizados por distribuições normais, então a distribuição convolucionada resultante de Y também será normal. Entretanto, mesmo que as distribuições de X_i não sejam normais, a distribuição de Y pode, freqüentemente, ser aproximada por uma distribuição normal devido ao Teorema Central do Limite. Este teorema estabelece que a distribuição de Y será *aproximadamente normal*, com esperança $E(Y) = \sum_{i=1}^{N} c_iE(X_i)$ e variância $\sigma^2(Y) = \sum_{i=1}^{N} c_i^2\sigma^2(X_i)$, onde $E(X_i)$ é a esperança de X_i e $\sigma^2(X_i)$ é a variância de X_i, se os X_i são independentes e $\sigma^2(Y)$ é muito maior do que qualquer componente individual $c_i^2\sigma^2(X_i)$ de um X_i, com distribuição não-normal.

G.2.2 O Teorema Central do Limite é importante porque mostra o papel muito relevante desempenhado pelas variâncias das distribuições de probabilidade das grandezas de entrada, comparado ao desempenhado pelos momentos de ordem superior das distribuições, na determinação da forma da distribuição convolucionada de Y resultante. Ademais, isto implica que a distribuição convolucionada tende à distribuição normal quando aumenta o número de contribuições das grandezas de entrada para $\sigma^2(Y)$; que a convergência será tanto mais rápida quanto mais próximos os valores de $c_i^2\sigma^2(X_i)$ estiverem um do outro (equivalente, na prática, a dizer que cada estimativa de entrada x_i contribui com uma incerteza comparável à incerteza da estimativa y do mensurando Y); que quanto mais próximas as distribuições de X_i estão de serem normais, tanto menos X_i são requeridos para dar a Y uma distribuição normal.

EXEMPLO - A distribuição retangular (ver 4.3.7e 4.4.5) é um exemplo extremo de uma distribuição não normal, mas a convolução de, ainda que apenas, *três* distribuições de igual largura é aproximadamente normal. Se a semifaixa de cada uma das três distribuições retangulares é a, de modo que a variância de cada uma é $a^2/3$, a variância da distribuição convolucionada é $\sigma^2 = a^2$. Os intervalos de 95 por cento e de 99 por cento da distribuição convolucionada são definidos por 1,937 σ e 2,379 σ, respectivamente, enquanto que os intervalos correspondentes para uma distribuição normal com o mesmo desvio padrão σ são definidos por 1,960 σ e 2,576 σ (ver a tabela G.1) [10].

NOTAS

1. Para cada intervalo com um nível da confiança p maior do que cerca de 91,7 por cento, o valor de k_p, para uma distribuição normal, é maior do que o valor correspondente para a distribuição resultante da convolução de qualquer número e tamanho de distribuições retangulares.

2. Do Teorema Central do Limite, segue que a distribuição de probabilidade da média aritmética $\bar{q}$ de n observações q_k de uma variável aleatória q, com esperança μ_q e desvio padrão finito σ, se aproxima de uma distribuição normal, com média μ_q e desvio padrão $\sigma / \sqrt{n}$, quando $n \rightarrow \infty$, qualquer que possa ser a distribuição de probabilidade de q.

G.2.3 Uma conseqüência prática do Teorema Central do Limite é que, quando se pode estabelecer que seus requisitos foram aproximadamente satisfeitos, em particular se a incerteza padrão combinada $u_c(y)$ não é dominada por um componente de incerteza padrão obtido por uma avaliação do Tipo A, baseada em apenas poucas observações, ou por um componente de incerteza padrão obtido por uma avaliação do Tipo B, baseada em uma suposta distribuição retangular, uma primeira aproximação razoável para o cálculo de uma incerteza expandida $U_p = k_p u_c(y)$, que irá proporcionar um intervalo com nível da confiança p, é usar, para k_p, um valor da distribuição normal. Os valores mais comumente usados para este propósito são dados na tabela G.1.

G.3 A distribuição-*t* e os graus de liberdade

G.3.1 Para obter uma melhor aproximação do que simplesmente usar um valor k_p da distribuição normal, como em G.2.3, deve-se reconhecer que o cálculo de um intervalo, tendo especificado um nível da confiança, requer, não a distribuição da variável $[Y - E(Y)]/\sigma(Y)$, mas a distribuição da variável $(y - Y)/u_c(y)$. Isto se dá porque, na prática, tudo que está geralmente disponível é y, a estimativa de Y tal como obtida de $y = \sum_{i=1}^{N} c_i X_i$, onde x_i é a estimativa de X_i; e a variância combinada associada com $u_c^2(y)$, avaliada a partir de $u_c^2(y) = \sum_{i=1}^{N} c_i^2 u^2(x_i)$, onde $u(x_i)$ é a incerteza padrão (desvio padrão estimado) da estimativa x_i.

NOTA - Falando de modo estrito, na expressão $(y - Y)/u_c(y)$, Y deveria ser lido como $E(Y)$. Para simplificar, tal distinção só tem sido feita em algumas partes deste *Guia*. Em geral, o mesmo símbolo tem sido usado para a grandeza física, a variável aleatória que representa esta grandeza, e a esperança desta variável (ver as notas de 4.1.1).

G.3.2 Se z é uma variável aleatória normalmente distribuída com esperança μ_z e desvio padrão σ, e $\bar{z}$ é a média aritmética de n observações independentes de z_k de z e $s(\bar{z})$ é o desvio padrão experimental de $\bar{z}$ [ver as equações (3) e (5), em 4.2], então a distribuição da variável $t = (\bar{z} - \mu_z) / s(\bar{z})$ é a **distribuição-*t* ou distribuição de Student** (C.3.8), com $\nu = n$-1 graus de liberdade.

Conseqüentemente, se o mensurando Y é, simplesmente, uma grandeza única normalmente distribuída X, $Y = X$ e se X é estimada pela média aritmética $\bar{X}$ de n observações repetidas e independentes X_k de X, com desvio padrão experimental $s(\bar{X})$, então a melhor estimativa de Y é $y = \bar{X}$, e o desvio padrão dessa estimativa é $u_c(y) = s(\bar{X})$. Então $t = (\bar{z} - \mu_z)/s(\bar{z}) = (\bar{X} - X)/s(\bar{X}) = (y - Y)/u_c(y)$ é distribuído de acordo com a distribuição-t, com:

$$\Pr[-t_p(\nu) \le t \le t_p(\nu)] = p \qquad \text{(G.1a)}$$

ou:

$$\Pr[-t_p(\nu) \le (y - Y)/u_c(y) \le t_p(\nu)] = p \qquad \text{(G.1b)}$$

que pode ser reescrita como:

$$\Pr[y - t_p(\nu)u_c(y) \le Y \le y + t_p(\nu)u_c(y)] = p \qquad \text{(G.1c)}$$

Nestas expressões, Pr[ ] significa "probabilidade de", e o fator-t $t_p(\nu)$ é o valor de t para um dado valor do parâmetro ν - os graus de liberdade (ver G.3.3) - tal que a fração p da distribuição t é abrangida pelo intervalo $-t_p(\nu)$ até $+t_p(\nu)$. Assim, a incerteza expandida:

$$U_p = k_p u_c(y) = t_p(\nu) u_c(y) \qquad \text{(G.1d)}$$

define um intervalo $y - U_p$ até $y + U_p$, convenientemente escrito como $Y = y \pm U_p$, do qual espera-se abranger uma fração p da distribuição de valores que poderiam, razoavelmente, ser atribuídos a y, e p é a probabilidade de abrangência ou nível da confiança do intervalo.

G.3.3 Os graus de liberdade ν são iguais a n -1 para uma grandeza única estimada pela média aritmética de n observações independentes, como em G.3.2. Se n observações independentes são usadas para determinar tanto a inclinação como a interseção de uma linha reta pelo método dos mínimos quadrados, o grau de liberdade de suas respectivas incertezas padrão é $\nu = n - 2$. Para um ajuste pelos mínimos quadrados de m parâmetros para n pontos de dados, o grau de liberdade da incerteza padrão de cada parâmetro é $\nu = n - m$ (ver referência [15] para uma posterior discussão mais detalhada de graus de liberdade).

G.3.4 Os valores selecionados de $t_p(\nu)$, para diferentes valores de ν e vários valores de p, são dados na Tabela G.2, no fim deste anexo. Quando $\nu \to \infty$, a distribuição-t se aproxima da distribuição normal, e $t_p(\nu) \approx (1 + 2/\nu)^{1/2} k_p$, onde, k_p é o fator de abrangência requerido para obter um intervalo com nível da confiança p para uma variável normalmente distribuída. Assim, o valor de $t_p(\infty)$, na Tabela G.2, para um dado p, é igual ao valor de k_p , na tabela G.1, para o mesmo p.

NOTA - Muitas vezes, a distribuição-t é tabulada em quantis; ou seja, valores do quantil $t_{1-\alpha}$ são dados, onde 1 - α denota a probabilidade cumulativa, e a relação:

$$1 - \alpha = \int_{-\infty}^{t_{1-\alpha}} f(t, \nu)\, \mathrm{d}t$$

define o quantil, onde *f* é a função densidade de probabilidade de *t*. Assim, t_p e $t_{(1-\alpha)}$ são relacionados por $p = 1 - 2\alpha$. Por exemplo, o valor do quantil $t_{0,975}$, para o qual $1-\alpha = 0,975$ e $\alpha = 0,025$, é o mesmo que $t_p(\nu)$, para $p = 0,95$.

G.4 Graus de liberdade efetivos

G.4.1 Em geral, a distribuição-*t* não irá descrever a distribuição da variável $(y - Y)/u_c(y)$ se $u_c^2(y)$ é a soma de dois ou mais componentes de variância estimados $u_i^2(y) = c_i^2 u^2(x_i)$ (ver 5.1.3), mesmo se cada x_i é a estimativa de uma grandeza de entrada X_i normalmente distribuída. Entretanto, a distribuição desta variável pode ser aproximada por uma distribuição-*t*, com graus liberdade de *efetivos* ν_{eff} obtidos da chamada fórmula de Welch-Satterthwaite [16, 17, 18]:

$$\frac{u_c^4(y)}{\nu_{\text{eff}}} = \sum_{i=1}^{N} \frac{u_i^4(y)}{\nu_i} \qquad \text{(G.2a)}$$

ou

$$\nu_{\text{eff}} = \frac{u_c^4(y)}{\sum_{i=1}^{N} \frac{u_i^4(y)}{\nu_i}} \qquad \text{(G.2b)}$$

com

$$\nu_{\text{eff}} \le \sum_{i=1}^{N} \nu_i \qquad \text{(G.2c)}$$

onde $u_c^2(y) = \sum_{i=1}^{N} u_i^2(y)$ (ver 5.1.3). A incerteza expandida $U_p = k_p u_c(y) = t_p(\nu_{\text{eff}}) u_c(y)$, então, fornece um intervalo $Y = y \pm U_p$ tendo nível da confiança aproximado *p*.

NOTAS

1. Se o valor de ν_{eff}, obtido da equação (G.2b) não for um número inteiro, o que ocorrerá usualmente na prática, o valor correspondente de t_p pode ser encontrado a partir da tabela G.2, por interpolação ou truncando ν_{eff} até o próximo inteiro inferior.

2. Se uma estimativa de entrada x_i é, ela própria, obtida de duas ou mais estimativas, então o valor de ν_i a ser usado com $u_i^4(y) = [c_i^2 u^2(x_i)]^2$ no denominador da equação (G.2b) é o grau de liberdade efetivo calculado por uma expressão similar à própria equação (G.2b).

3. Dependendo das necessidades dos usuários em potencial de um resultado de medição, pode ser útil, em adição a ν_{eff}, calcular e relatar os valores ν_{effA} e ν_{effB}, computados pela equação (G.2b), tratando separadamente as incertezas padrão obtidas por avaliações do Tipo A e do Tipo B. Se as contribuições para $u_c^2(y)$ das incertezas padrão do Tipo A e do Tipo B são denotadas em separado, respectivamente, por $u^2_{cA}(y)$ e $u^2_{cB}(y)$, as várias grandezas são relacionadas por:

$$u_c^2(y) = u_{cA}^2(y) + u_{cB}^2(y)$$

$$\frac{u_c^4(y)}{\nu_{\text{eff}}} = \frac{u_{cA}^4(y)}{\nu_{\text{effA}}} + \frac{u_{cB}^4(y)}{\nu_{\text{effB}}}$$

EXEMPLO - Considere que $Y = f(X_1,X_2,X_3) = bX_1X_2X_3$ e que as estimativas x_1,x_2,x_3 das grandezas de entrada normalmente distribuídas X_1,X_2,X_3 são as médias aritméticas de $n_1 = 10$, $n_2 = 5$ e $n_3 = 15$ observações repetidas e independentes, respectivamente, com incertezas padrão relativas $u(x_1)/x_1 = 0,25$ por cento, $u(x_2)/x_2 = 0,57$ por cento e $u(x_3)/x_3 = 0,82$ por cento. Neste caso, $c_i = \partial f/\partial X_i = Y/X_i$ (a ser avaliado em x_1,x_2,x_3 - ver 5.1.3, nota 1), $[u_c(y)/y]^2 = \sum_{i=1}^{3} [u(x_i)/x_i]^2 = (1,03 \text{ por cento})^2$ [ver a nota 2, em 5.1.6], e a equação (G.2b) torna-se:

$$\nu_{\text{eff}} = \frac{[u_c(y)/y]^4}{\sum_{i=1}^{3} \frac{[u(x_i)/x_i]^4}{\nu_i}}$$

Assim:

$$\nu_{\text{eff}} = \frac{1,03^4}{\frac{0,25^4}{10-1} + \frac{0,57^4}{5-1} + \frac{0,82^4}{15-1}} = 19,0$$

O valor de t_p para $p = 95$ por cento e $\nu = 19$ é , pela tabela G.2, $t_{95}(19) = 2,09$, portanto a incerteza relativa expandida para este nível da confiança é $U_{95} = 2,09 \times (1,03$ por cento$) = 2,2$ por cento. Pode-se, então, afirmar que $Y = y \pm U_{95} = y(1 \pm 0,022)$ [*y* a ser determinado por $y = bx_1x_2x_3$], ou que $0,9785y \le Y \le 1,022y$, e que o nível da confiança a ser associado com o intervalo é, aproximadamente, 95 por cento.

G.4.2 Na prática, $u_c(y)$ depende das incertezas padrão $u(x_i)$ das estimativas de entrada tanto de grandezas de entrada normalmente distribuídas, como não normalmente distribuídas, e os $u(x_i)$ são obtidos tanto de distribuições de probabilidade baseadas na freqüência como da distribuição *a priori* (isto é, tanto de avaliações do Tipo A quanto do Tipo B). Uma afirmação similar aplica-se à estimativa *y* e às estimativas x_i de entrada, das quais *y* depende. Não obstante, a distribuição de probabilidade da função $t = (y - Y)/u_c(y)$ pode ser aproximada pela distribuição-*t*, se ela é expandida por uma série de Taylor em torno de sua esperança. Em essência, isto é o que se consegue, com aproximação da menor ordem, pela fórmula Welch-Satterthwaite, equação (G.2a) ou equação (G.2b).

Levanta-se uma questão quanto aos graus de liberdade a serem atribuídos à incerteza padrão obtida a partir de uma avaliação do Tipo B, quando se calcula ν_{eff} pela equação (G.2b). Como a definição apropriada de graus de liberdade reconhece que o v, tal como aparece na distribuição-t, é uma medida da incerteza da variância $s^2(z)$, a equação (E.7), em E.4.3, pode ser usada para definir os graus de liberdade v_i:

$$\nu_i \approx \frac{1}{2}\frac{u^2(x_i)}{\sigma^2[u(x_i)]} \approx \frac{1}{2}\left[\frac{\Delta u(x_i)}{u(x_i)}\right]^{-2} \quad \text{(G.3)}$$

A grandeza entre colchetes maiores é a incerteza relativa de $u(x_i)$; para uma avaliação do Tipo B da incerteza padrão, é uma grandeza subjetiva cujo valor é obtido por julgamento científico baseado no conjunto de informações disponíveis .

EXEMPLO - Baseado no conhecimento disponível do procedimento de medição usado para determinar estimativas de entrada x_i e de como sua incerteza padrão $u(x_i)$ foi avaliada, julgou-se que a avaliação de $u(x_i)$ é confiável cerca de 25%. Isso pode ser tomado como significando que a incerteza relativa $\Delta u(x_i)/u(x_i) = 0{,}25$ e, assim, pela equação (G.3), $\nu_i = (0{,}25)^{-2}/2 = 8$. Se, entretanto, se julga que o valor de $u(x_i)$ é confiável em somente cerca de 50%, então $\nu_i = 2$ (ver também a tabela E.1, no anexo E).

G.4.3 Na discussão em 4.3 e 4.4 da avaliação do Tipo B da incerteza padrão a partir de uma distribuição de probabilidade *a priori*, foi implicitamente suposto que o valor de $u(x_i)$ resultante de tal avaliação é conhecido exatamente. Por exemplo, quando $u(x_i)$ é obtido por meio de uma distribuição de probabilidade retangular com semifaixa suposta de $a = (a_+ - a_-)/2$, como em 4.3.7 e 4.4.5, $u(x_i) = a/\sqrt{3}$ é vista como uma constante sem incerteza, pois $a_+ - a_-$, e também a, são assim vistas (porém, ver 4.3.9, nota 2). Isto implica, pela equação (G.3), que $v_i \to \infty$ ou $1/v_i \to 0$, o que não causa dificuldade na avaliação da equação G.2b. Além disso, supor que $\nu_i \to \infty$ não é necessariamente irreal; é uma prática usual escolher a_+ e a_- , de tal modo que a probabilidade da grandeza em questão, ficando fora do intervalo a_- até a_+, seja extremamente pequena.

G.5 Outras considerações

G.5.1 Uma expressão encontrada, na literatura, sobre a medição da incerteza, e freqüentemente usada para obter uma incerteza que se destina a proporcionar um intervalo com um nível da confiança de 95 por cento, pode ser escrita como

$$U'_{95} = [t_{95}^2(\nu'_{\text{eff}})s^2 + 3u^2]^{1/2} \quad \text{(G.4)}$$

Aqui, t_{95} (ν'_{eff}) é obtido da distribuição t para v'_{eff} graus de liberdade e p = 95 por cento; ν'_{eff} é o grau efetivo de liberdade calculado pela fórmula de Welch-Satterthwaite [equação (G.2b)], levando em conta *somente* aqueles componentes de incerteza padrão s_i que foram avaliados, estatisticamente, a partir de observações repetidas na medição *em curso*; $s^2 = \sum c_i^2 s_i^2$; $c_i \equiv \partial f / \partial x_i$; $u^2 = \sum u_j^2(y) = \sum c_j^2(a_j^2/3)$ consideram *todos* os outros componentes da incerteza, nos quais se supõe que $+ a_j$ e $-a_j$ sejam, exatamente, os limites superior e inferior conhecidos de X_j, relativos à sua melhor estimativa x_j (isto é, $x_j - a_j \le X_j \le x_j + a_j$).

NOTA - Um componente baseado em observações repetidas feitas *fora* da medição em curso é tratado do mesmo modo que qualquer outro componente incluído em u^2. Por isso, de modo a se fazer uma comparação consistente entre a equação (G.4) e a equação (G.5) do item seguinte, supõe-se que tais componentes, se estiverem presentes, sejam desprezíveis.

G.5.2 Se uma incerteza expandida que fornece um intervalo com um nível da confiança de 95 por cento é avaliada de acordo com os métodos recomendados em G.3 e G.4, a expressão resultante em lugar da equação (G.4) é:

$$U_{95} = t_{95}(\nu_{\text{eff}})[s^2 + u^2]^{1/2} \quad \text{(G.5)}$$

onde ν_{eff} é calculado pela equação (G.2b), e o cálculo inclui *todos* os componentes de incerteza.

Na maioria dos casos, o valor de U_{95} da equação (G.5) será maior do que o valor U'_{95} da equação (G.4), se for suposto que, na avaliação da equação (G.5), todas as variâncias do Tipo B são obtidas de distribuições retangulares *a priori*, com semifaixas que são as mesmas que os limites a_j usados para computar u^2 da equação (G.4). Isso pode ser compreendido, reconhecendo-se que, embora $t_{95}(\nu'_{\text{eff}})$ venha a ser, na maioria dos casos, maior do que $t_{95}(\nu_{\text{eff}})$, ambos os fatores estão próximos de 2; e, na equação (G.5), u^2 é multiplicado por $t_p^2(\nu_{\text{eff}}) \approx 4$, enquanto que, na equação (G.4), ele é multiplicado por 3. Embora as duas expressões dêem valores iguais de U'_{95} e U_{95}, para $u^2 << s^2$, U'_{95} será até 13 por cento menor do que U_{95}, se $u^2 >> s^2$. Assim, em geral, a equação (G.4) dá uma incerteza que fornece um intervalo tendo um nível da confiança *menor* do que o intervalo fornecido pela incerteza expandida calculada pela equação (G.5).

NOTAS

1. Nos limites $u^2/s^2 \rightarrow \infty$ e $v_{eff} \rightarrow \infty$, $U'_{95} \rightarrow 1{,}732\ u$, enquanto $U_{95} \rightarrow$ 1,960 u. Neste caso, U'_{95} fornece um intervalo com somente 91,7 por cento de nível da confiança, enquanto que U_{95} fornece um intervalo com 95 por cento. Este caso é aproximado na prática quando os componentes obtidos por estimativas dos limites superior e inferior são dominantes, numerosos e têm valores de $u_j^2(y) = c_j^2 a_j^2/3$ que são comparáveis em tamanho.

2. Para uma distribuição normal, o fator de abrangência $k = \sqrt{3} \approx$ 1,732 fornece um intervalo com nível da confiança p = 91,673... por cento. Este valor de p é robusto no sentido que é, em comparação com aquele de qualquer outro valor, otimamente independente de pequenos desvios da normalidade das grandezas de entrada.

G.5.3 Ocasionalmente, uma grandeza de entrada X_i é distribuída assimetricamente - desvios em torno de seu valor esperado de um sinal são mais prováveis do que os desvios de sinal contrário (ver 4.3.8). Embora isso não faça diferença na avaliação da incerteza padrão $u(x_i)$ da estimativa x_i de X_i, e, portanto, na avaliação de $u_c(y)$, isto pode afetar o cálculo de U.

É usualmente conveniente fornecer um intervalo de confiança simétrico, $Y = y \pm U$, a não ser que o intervalo seja tal que haja um diferencial de custo entre desvios de um sinal sobre o outro. Se a assimetria de X_i causa somente uma pequena assimetria na distribuição de probabilidades, caracterizada pelo resultado de medição y e sua incerteza padrão combinada $u_c(y)$, a probabilidade perdida por um lado, por considerar o intervalo simétrico, é compensada pela probabilidade ganha de outro lado.

A alternativa é fornecer um intervalo simétrico em probabilidade (e, dessa forma, assimétrico em relação a U): a probabilidade de que y fique abaixo do limite inferior $y\text{-}U_-$ é igual à probabilidade de que y fique acima do limite inferior $y+U_+$. Porém, de forma a considerar tais limites, é necessário mais informações do que simplesmente a estimativa de y e $u_c(y)$ [e, dessa maneira, mais informações do que a estimativa x_i e $u(x_i)$ de cada grandeza de entrada X_i].

G.5.4 A avaliação da incerteza expandida U_p, dada aqui em termos de $u_c(y)$, de ν_{eff} e do fator $t_p(\nu_{eff})$ da distribuição-t, é somente uma aproximação e tem suas limitações. A distribuição de $(y - Y)/u_c(y)$ é dada pela distribuição t, somente se a distribuição de Y é normal, se a estimativa y e sua incerteza padrão combinada $u_c(y)$ são independentes e se a distribuição de $u_c^2(y)$ é uma distribuição χ^2. A introdução de ν_{eff}, equação (G.2b), trata somente de parte do problema e fornece uma distribuição aproximadamente χ^2 para $u^2_c(y)$: a outra parte do problema originária da não-normalidade da distribuição de Y requer a consideração de momentos de ordem mais alta, além da variância.

G.6 Resumo e conclusões

G.6.1 O fator de abrangência k_p, que fornece um intervalo tendo um dado nível da confiança p, próximo a um nível especificado, pode somente ser encontrado se houver um completo conhecimento da distribuição de probabilidade de cada grandeza de entrada e se estas distribuições forem combinadas para se obter a distribuição da grandeza de saída. As estimativas de entrada x_i e suas incertezas padrão $u(x_i)$ por si mesmas são inadequadas a este propósito.

G.6.2 Em razão de o grande volume de cálculo requerido, para combinar distribuições de probabilidade, ser raramente justificável pela extensão e confiabilidade da informação disponível, é aceitável uma aproximação da distribuição da grandeza de saída. Por causa do Teorema Central do Limite, é geralmente suficiente supor que a distribuição da probabilidade de $(y - Y)/u_c(y)$ é a distribuição-t e tomar $k_p = t_p(\nu_{eff})$, com o fator-t baseado nos graus efetivos de liberdade ν_{eff} de $u_c(y)$ obtidos pela fórmula de Welch - Satterthwaite, equação (G.2b).

G.6.3 Para obter ν_{eff} da equação (G.2b), são necessários os graus de liberdade ν_i para cada componente de incerteza padrão. Para um componente obtido por uma avaliação do Tipo A, ν_i é obtido de um número de observações independentes repetidas sobre as quais é baseada a estimativa de entrada correspondente e do número de grandezas independentes determinado por essas observações (ver G.3.3). Para um componente obtido por uma avaliação do Tipo B, ν_i é obtido pela confiabilidade arbitrada para o valor desse componente [ver G.4.2 e a equação (G.3)].

G.6.4 Assim, o que se segue é um sumário do método preferido para o cálculo da incerteza expandida $U_p = k_p u_c(y)$ que fornece um intervalo $Y = y \pm U_p$ que tenha um nível da confiança aproximado p.

1) Obtenha y e $u_c(y)$ como descrito nos capítulos 4 e 5.

2) Calcule ν_{eff} pela fórmula Welch-Satterthwaite, equação (G.2b) (repetida aqui para fácil referência)

$$\nu_{eff} = \frac{u_c^4(y)}{\sum_{i=1}^{N} \frac{u_i^4(y)}{\nu_i}} \qquad \text{(G.2b)}$$

Se $u(x_i)$ é obtido por meio de uma avaliação do Tipo A, determine ν_i como orientado em G.3.3. Se $u(x_i)$ é obtido por meio de uma avaliação do tipo B e pode ser tratado como exatamente conhecido, como é frequente o caso na prática, $\nu_i \to \infty$; caso contrário, estime ν_i pela equação (G.3).

3) Obtenha o fator-*t* $t_p(\nu_{eff})$ para o nível da confiança p desejado a partir da tabela G.2. Se ν_{eff} não é um inteiro, interpole ou trunque ν_{eff} até o próximo inteiro inferior.

4) Tome $k_p = t_p(\nu_{eff})$ e calcule $U_p = k_p u_c(y)$.

G.6.5 Em certas situações, que não devem ocorrer muito freqüentemente na prática, as condições requeridas pelo Teorema Central do Limite podem não ser completamente satisfeitas, e o enfoque dado em G.6.4 leva a um resultado inaceitável. Por exemplo, se $u_c(y)$ é dominado por um componente de incerteza avaliado por uma distribuição retangular cujos limites são supostos, sendo exatamente conhecidos, é possível [se $t_p(\nu_{eff}) > \sqrt{3}$] que $y + U_p$ e $y - U_p$, os limites superior e inferior do intervalo definido por U_p, possam ficar fora dos limites da distribuição de probabilidade da grandeza de saída Y. Tais casos devem ser tratados em uma base individual, mas são muitas vezes susceptíveis a um tratamento analítico aproximado (envolvendo, por exemplo, a convolução de sua distribuição de probabilidade normal com uma distribuição retangular [10]).

G.6.6 Para muitas medições práticas em uma ampla faixa de campos, as seguintes condições prevalecem:

- a estimativa y do mensurando Y é obtida das estimativas x_i de um número significativo de grandezas de entrada X_i que são descritíveis por uma distribuição de probabilidade bem comportada, tal como as distribuições normal e retangular;
- as incertezas padrão $u(x_i)$ dessas estimativas que podem ser obtidas de cada avaliação do Tipo A ou do Tipo B, contribuem com quantidades comparáveis para a incerteza padrão combinada $u_c(y)$ do resultado de medição y;
- a aproximação linear envolvida na lei de propagação da incerteza é adequada (ver 5.1.2 e E.3.1);
- a incerteza de $u_c(y)$ é razoavelmente pequena devido a seus graus efetivos de liberdade ν_{eff} possuírem uma magnitude significativa, isto é, maior que 10.

Sob estas circunstâncias, a distribuição de probabilidade, caracterizada pelo resultado de medição e sua incerteza padrão combinada, pode ser suposta como normal devido ao Teorema Central do Limite, e $u_c(y)$ pode ser tomada como uma estimativa razoavelmente confiável do desvio padrão da distribuição normal devido ao tamanho significativo de ν_{eff}. Então, baseado na discussão contida neste anexo, incluindo a ênfase da natureza aproximada do processo de avaliação da incerteza e a impraticabilidade da tentativa de distinção entre invervalos, tendo níveis da confiança que diferem por um ou dois por cento, pode ser feito o seguinte:

Adote k=2 e assuma que U=2$u_c(y)$, definindo um intervalo tendo um nível da confiança de, aproximadamente, 95 por cento; ou, para aplicações mais críticas, adote k=3 e assuma que $U = 3u_c(y)$ define um intervalo tendo um nível da confiança de, aproximadamente, 99 por cento.

Embora esta abordagem deva ser conveniente para muitas medições práticas, sua aplicabilidade para qualquer medição particular dependerá de quão próximo k=2 deverá estar para t_{95} (ν_{eff}) ou k=3 deverá estar para $t_{99}(\nu_{eff})$, isto é, quão próximo o nível da confiança do intervalo definido por U=2$u_c(y)$ ou U=3$u_c(y)$ deverá estar para 95 por cento ou 99 por cento, respectivamente. Embora, para ν_{eff}=11, k=2 e k=3 subestima $t_{95}(11)$ e $t_{99}(11)$ por somente 10 e 4 por cento, respectivamente (ver tabela G.2), o que pode não ser aceitável em alguns casos. Adicionalmente, para todos os valores de ν_{eff}, algo maior que 13, k=3 produz um intervalo tendo um nível da confiança maior que 99 por cento (ver tabela G.2, que também mostra que, para $\nu_{eff} \to \infty$, os níveis da confiança dos intervalos produzidos por k=2 e k=3 são 95,45 e 99,73 por cento, respectivamente). Então, na prática, o tamanho do ν_{eff} e a incerteza expandida requerida determinarão se essa abordagem poderá ser utilizada.

Tabela G.2 - Valor de $t_p(v)$ da distribuição-t, para ν graus de liberdade, que define um intervalo $-t_p(\nu)$ a $+ t_p(\nu)$ que abrange a fração p da distribuição

Graus de liberdade v	Fração p em porcentagem					
	68,27[a]	90	95	95,45[a]	99	99,73[a]
1	1,84	6,31	12,71	13,97	63,66	235,80
2	1,32	2,92	4,30	4,53	9,92	19,21
3	1,20	2,35	3,18	3,31	5,84	9,22
4	1,14	2,13	2,78	2,87	4,60	6,62
5	1,11	2,02	2,57	2,65	4,03	5,51
6	1,09	1,94	2,45	2,52	3,71	4,90
7	1,08	1,89	2,36	2,43	3,50	4,53
8	1,07	1,86	2,31	2,37	3,36	4,28
9	1,06	1,83	2,26	2,32	3,25	4,09
10	1,05	1,81	2,23	2,28	3,17	3,96
11	1,05	1,80	2,20	2,25	3,11	3,85
12	1,04	1,78	2,18	2,23	3,05	3,76
13	1,04	1,77	2,16	2,21	3,01	3,69
14	1,04	1,76	2,14	2,20	2,98	3,64
15	1,03	1,75	2,13	2,18	2,95	3,59
16	1,03	1,75	2,12	2,17	2,92	3,54
17	1,03	1,74	2,11	2,16	2,90	3,51
18	1,03	1,73	2,10	2,15	2,88	3,48
19	1,03	1,73	2,09	2,14	2,86	3,45
20	1,03	1,72	2,09	2,13	2,85	3,42
25	1,02	1,71	2,06	2,11	2,79	3,33
30	1,02	1,70	2,04	2,09	2,75	3,27
35	1,01	1,70	2,03	2,07	2,72	3,23
40	1,01	1,68	2,02	2,06	2,70	3,20
45	1,01	1,68	2,01	2,06	2,69	3,18
50	1,01	1,68	2,01	2,05	2,68	3,16
100	1,005	1,660	1,984	2,025	2,626	3,077
∞	1,000	1,645	1,960	2,000	2,576	3,000

[a] Para a grandeza z descrita por uma distribuição normal, com esperança μ_z e desvio padrão σ, o intervalo $\mu_z \pm k\sigma$ abrange p = 68,27; 95,45 e 99,73 por cento da distribuição para k = 1,2 e 3, respectivamente.

Anexo H
Exemplos

Este anexo fornece seis exemplos, H.1 a H.6, trabalhados detalhadamente, de modo a ilustrar os princípios básicos apresentados neste *Guia*, para avaliação e expressão da incerteza de medição. Juntamente com os exemplos incluídos no texto principal e em alguns dos outros anexos, eles devem permitir aos usuários deste *Guia* colocar estes princípios em prática nos seus próprios trabalhos.

Em razão de os exemplos terem fins ilustrativos, eles foram, por necessidade, simplificados. Além disso, porque estes e os dados numéricos usados nos exemplos foram escolhidos principalmente para demonstrar os princípios deste *Guia*, nem os exemplos nem os dados deverão, necessariamente, ser interpretados como descrevendo medições reais. Enquanto os dados são usados conforme fornecidos, de forma a evitar erros de arredondamento, mais dígitos são mantidos nos cálculos intermediários que os usualmente mostrados. Portanto, o resultado declarado de um cálculo envolvendo várias grandezas pode diferir ligeiramente do resultado obtido por valores numéricos fornecidos no texto para estas grandezas.

É indicado, nas partes anteriores deste *Guia*, que a classificação dos métodos utilizados para avaliar componentes de incerteza, como os do Tipo A e do Tipo B, se faz apenas por conveniência; ela não é requerida para a determinação da incerteza padrão combinada ou da incerteza expandida de um resultado de uma medição, uma vez que todos os componentes da incerteza, não importa como tenham sido avaliados, são tratados da mesma maneira (ver 3.3.4, 5.1.2 e E.3.7). Assim, nos exemplos, o método utilizado para avaliar um determinado componente de incerteza não é especificamente identificado conforme seu tipo. Entretanto, será esclarecido pela discussão se um componente é obtido por uma avaliação do Tipo A ou do Tipo B.

H.1 Calibração de bloco padrão

Este exemplo demonstra que mesmo uma medição aparentemente simples pode envolver aspectos sutis de avaliação de incerteza.

H.1.1 O problema da medição

O comprimento de um bloco padrão de 50 mm nominais é determinado por comparação com um padrão conhecido de mesmo comprimento nominal. A saída direta da comparação de dois gabaritos de extremidade é a diferença d de seus comprimentos:

$$d = l(1 + \alpha\theta) - l_s(1 + \alpha_s\theta_s) \tag{H.1}$$

onde:

l é o mensurando, ou seja, o comprimento a 20 ºC do bloco padrão sendo calibrado;

l_s é o comprimento do padrão a 20 ºC, como dado no seu certificado de calibração;

α e α_s são os coeficientes de expansão térmica, respectivamente, do gabarito sendo calibrado e do padrão;

θ e θ_s são os *desvios* na temperatura com relação à temperatura de referência de 20 ºC, respectivamente, do gabarito e do padrão.

H.1.2 Modelo matemático

Pela equação (H.1), o mensurando é dado por:

$$l = \frac{l_s(1 + \alpha_s\theta_s) + d}{(1 + \alpha\theta)} = l_s + d + l_s(\alpha_s\theta_s - \alpha\theta) + \ldots \tag{H.2}$$

Se a diferença de temperatura entre o bloco que está sob fração e o padrão é escrita como $\delta\theta = \theta - \theta_s$, e a diferença entre os seus coeficientes de expansão térmica como $\delta\alpha = \alpha - \alpha_s$, a equação (H.2) se torna:

$$l = f(l_s, d, \alpha_s, \theta, \delta\alpha, \delta\theta) \tag{H.3}$$
$$= l_s + d - l_s[\delta\alpha . \theta + \alpha_s . \delta\theta]$$

As diferenças $\delta\theta$ e $\delta\alpha$, mas não suas incertezas, são estimadas para serem zero; e $\delta\alpha$, α_s, $\delta\theta$ e θ são supostas como não-correlacionadas. (Se o mensurando fosse expresso em termos das variáveis θ, θ_s, α e α_s, seria necessário incluir a correlação entre θ e θ_s , e entre α e α_s).

Segue-se, assim, da equação (H.3) que a estimativa do valor do mensurando l pode ser obtida de uma expressão simples $l_s + \bar{d}$, onde l_s é o comprimento do padrão a 20 ºC, como dado em seu certificado de calibração, e d é estimado por $\bar{d}$, a média aritmética de n = 5 observações repetidas independentes. A incerteza padrão combinada $u_c(l)$ de l é obtida, aplicando-se a equação (10), em 5.1.2, à equação (H.3), como discutido abaixo.

NOTA - Neste e em outros exemplos, para simplicidade de notação, o mesmo símbolo é usado para uma grandeza e para sua estimativa.

H.1.3 Variâncias contribuintes

Os aspectos pertinentes desse exemplo, tal como discutidos aqui e nos itens seguintes, estão resumidos na Tabela H.1.

Uma vez que se supõe que $\delta\alpha = 0$ e $\delta\theta = 0$, a aplicação da equação (10) em 5.1.2 à equação (H.3) resulta em:

$$u_c^2(l) = c_s^2\, u^2(l_s) + c_d^2\, u^2(d) + c_{\alpha_s}^2\, u^2(\alpha_s) + \tag{H.4}$$

com:

$$c_S = \partial f / \partial l_S = 1 - (\delta\alpha . \theta + \alpha_S . \delta\theta) = 1$$
$$c_d = \partial f / \partial d = 1$$
$$c_{\alpha_S} = \partial f / \partial \alpha_S = -l_S \delta\theta = 0$$
$$c_\theta = \partial f / \partial \theta = -l_S \delta\alpha = 0$$
$$c_{\delta\alpha} = \partial f / \partial \delta\alpha = -l_S \theta$$
$$c_{\delta\theta} = \partial f / \partial \delta\theta = -l_S \alpha_S$$

e, assim:

$$u_c^2(l) = u^2(l_S) + u^2(d)$$
$$+ l_S^2\, \theta^2\, u^2(\delta\alpha) + l_S^2\, \alpha_S^2\, u^2(\delta\theta) \tag{H.5}$$

H.1.3.1 Incerteza de calibração do padrão, *u(l_S)*

O certificado de calibração fornece como a incerteza expandida do padrão U = 0,075 µm e declara que ela foi obtida usando um fator de abrangência de k = 3. A incerteza padrão é, então:

$$u(l_S) = (0{,}075\ \mu\text{m}) / 3 = 25\ \text{nm}$$

H.1.3.2 Incerteza da diferença medida no comprimento, *u(d)*

O desvio padrão experimental agrupado que caracteriza a comparação de l e l_S foi determinado como sendo de 13 nm, a partir da variabilidade de 25 observações repetidas e independentes da diferença nos comprimentos de dois blocos padrão. Na comparação deste exemplo, foram tomadas cinco observações repetidas. A incerteza padrão associada com a média aritmética dessas leituras é, então (ver 4.2.4):

$$u(\bar{d}) = s(\bar{d}) = 13\ \text{nm} / \sqrt{5} = 5{,}8\ \text{nm}$$

De acordo com o certificado de calibração do comparador usado para comparar l com l_S, sua incerteza "devido a erros aleatórios" é ± 0,01 µm em um nível da confiança de 95 por cento e é baseada em 6 medições replicadas; assim, a incerteza padrão, usando o fator-t $t_{95}(5)$ = 2,57, para ν = 6 -1 = 5 graus de liberdade (ver tabela G.2 no anexo G), é:

$$u(d_1) = (0{,}01\ \mu\text{m}) / 2{,}57 = 3{,}9\ \text{nm}$$

A incerteza do comparador "devido a erros sistemáticos" é dada no certificado como sendo de 0,02 µm "para um nível de três sigma". A incerteza padrão oriunda desta fonte pode, portanto, ser tomada como:

$$u(d_2) = (0{,}02\ \mu\text{m}) / 3 = 6{,}7\ \text{nm}$$

A contribuição total é obtida pela soma das variâncias estimadas:

$$u^2(d) = u^2(\bar{d}) + u^2(d_1) + u^2(d_2) = 93\ \text{nm}^2$$

ou:

$$u(d) = 9{,}7\ \text{nm}$$

H.1.3.3 Incerteza do coeficiente de expansão térmica, $u(\alpha_s)$

O coeficiente de expansão térmica do bloco padrão é dado como $\alpha_s = 11{,}5 \times 10^{-6}$ ºC^{-1}, com uma incerteza representada por uma distribuição retangular com limites $\pm 2 \times 10^{-6}$ ºC^{-1}. A incerteza padrão é, então [ver a equação (7) em 4.3.7]:

$$u(\alpha_s) = (2 \times 10^{-6}\ °\mathrm{C}^{-1}) / \sqrt{3} = 1{,}2 \times 10^{-6}\ °\mathrm{C}^{-1}$$

Sendo $c_{\alpha_s} = \partial f / \partial \alpha_s = -l_s\ \delta\theta = 0$, como indicado em H.1.3, esta incerteza em nada contribui para a incerteza de l em primeira ordem. Ela tem, entretanto, uma contribuição de segunda ordem, que é discutida em H.1.7.

H.1.3.4 Incerteza do desvio da temperatura do bloco padrão, $u(\theta)$

A temperatura da bancada de teste é relatada como (19,9 ± 0,5) °C; a temperatura, no momento das observações individuais, não foi registrada. A faixa máxima declarada, $\Delta = 0{,}5$ ºC, é tida como representando a amplitude de uma variação aproximadamente cíclica da temperatura sob um sistema termostático, e não a incerteza da temperatura média. O valor do desvio médio da temperatura:

$$\bar{\theta} = 19{,}9\ °\mathrm{C} - 20\ °\mathrm{C} = -0{,}1\ °\mathrm{C}$$

é relatado como tendo uma incerteza padrão própria devido à incerteza na temperatura média da bancada de teste de:

$$u(\bar{\theta}) = 0{,}2\ °\mathrm{C}$$

enquanto que a variação cíclica no tempo produz uma distribuição em forma de U (arco seno) de temperaturas, resultando em uma incerteza padrão de:

$$u(\Delta) = (0{,}5\ °\mathrm{C}) / \sqrt{2} = 0{,}35\ °\mathrm{C}$$

O desvio da temperatura θ pode ser tomado como igual a $\bar{\theta}$, e a incerteza padrão de θ é obtida de:

$$u^2(\theta) = u^2(\bar{\theta}) + u^2(\Delta) = 0{,}165\ °\mathrm{C}^2$$

que fornece:

$$u(\theta) = 0{,}41\ °\mathrm{C}$$

Tabela H.1 - Sumário dos componentes da incerteza padrão

Componente da incerteza padrão $u(x_i)$	Fonte da incerteza	Valor da Incerteza padrão $u(x_i)$	$c_i \equiv \partial f / \partial x_i$	$u_i(l) \equiv \lvert c_i \rvert u(x_i)$ (nm)	Graus de liberdade
$u(l_s)$	Calibração do bloco padrão	25 nm	1	25	18
$u(d)$	Diferença medida entre blocos padrão	9,7 nm	1	9,7	25,6
$u(\bar{d})$	observações repetidas	5,8 nm			24
$u(d_1)$	efeitos aleatórios do comparador	3,9 nm			5
$u(d_2)$	efeitos sistemáticos do comparador	6,7 nm			8
$u(\alpha_s)$	Coeficiente de expansão térmica do bloco padrão	$1{,}2 \times 10^{-6}$ ºC^{-1}	0	0	
$u(\theta)$	Temperatura da bancada de teste	0,41 ºC	0	0	
$u(\bar{\theta})$	temperatura média da bancada	0,2 ºC			
$u(\Delta)$	variação cíclica da temperatura do ambiente	0,35 ºC			
$u(\delta\alpha)$	Diferença dos coeficientes de expansão dos blocos padrão	$0{,}58 \times 10^{-6}$ ºC^{-1}	$-l_S\ \theta$	2,9	50
$u(\delta\theta)$	Diferença da temperatura dos blocos padrão	0,029 ºC	$-l_S\ \alpha_S$	16,6	2

$$u_c^2(l) = \sum u_i^2\ (l) = 1002\ \mathrm{nm}^2$$

$$u_c\ (l) = 32\ \mathrm{nm}$$

$$\nu_{eff}\ (l) = 16$$

Como $c_\theta = \partial f / \partial\theta = -l_s\,\delta\alpha = 0$, como indicado em H.1.3, esta incerteza também em nada contribui para a incerteza de primeira ordem de l; mas ela tem uma contribuição de segunda ordem, que é discutida em H.1.7.

H.1.3.5 Incerteza da diferença nos coeficientes de expansão térmica, *u*(δα)

Os limites estimados da variabilidade de $\delta\alpha$ são $\pm$ 1 x 10^{-6} ºC^{-1}, com igual probabilidade de $\delta\alpha$ ter qualquer valor dentro destes limites. A incerteza padrão é:

$$u(\delta\alpha) = (1\times10^{-6}\ ^\circ\mathrm{C}^{-1})/\sqrt{3} = 0{,}58\times10^{-6}\ ^\circ\mathrm{C}^{-1}$$

H.1.3.6 Incerteza da diferença nas temperaturas dos blocos, u(δθ)

Espera-se que o padrão e o bloco sob ensaio estejam na mesma temperatura, mas a diferença de temperatura pode estar com igual probabilidade em qualquer lugar no intervalo estimado -0,05 ºC a + 0,05 ºC. A incerteza padrão é:

$$u(\delta\theta) = (0{,}05\ ^\circ\mathrm{C})/\sqrt{3} = 0{,}029\ ^\circ\mathrm{C}$$

H.1.4 A incerteza padrão combinada

A incerteza padrão combinada $u_c(l)$ é calculada pela equação (H.5). Os termos individuais são coletados e substituídos nesta expressão para obter:

$$\begin{aligned} u_c^2(l) &= (25\ \mathrm{nm})^2 + (9{,}7\ \mathrm{nm})^2 && \text{(H.6a)} \\ &\quad + (0{,}05\ \mathrm{m})^2(\text{-}0{,}1\ ^\circ\mathrm{C})^2(0{,}58\times10^{-6}\ ^\circ\mathrm{C}^{-1})^2 + \\ &\quad + (0{,}05\ \mathrm{m})^2(11{,}5\times10^{-6}\ ^\circ\mathrm{C}^{-1})^2(0{,}029\ ^\circ\mathrm{C})^2 \\ &= (25\ \mathrm{nm})^2 + (9{,}7\ \mathrm{nm})^2 && \text{(H.6b)} \\ &\quad + (2{,}9\ \mathrm{nm})^2 + (16{,}6\ \mathrm{nm})^2 \\ &= 1002\ \mathrm{nm}^2 \end{aligned}$$

Ou:

$$u_c(l) = 32\ \mathrm{nm} \qquad \text{(H.6c)}$$

O componente dominante da incerteza é, obviamente, aquele do padrão, $u(l_s)$ = 25 nm.

H.1.5 Resultado final

O certificado de calibração para o bloco padrão fornece l_s = 50,000 623 mm como seu comprimento, a 20 ºC. A média aritmética $\bar{d}$ das cinco observações repetidas da diferença nos comprimentos entre o bloco padrão desconhecido e o padrão de referência é de 215 nm. Assim, como $l = l_s + \bar{d}$ (ver H.1.2), o comprimento l do bloco padrão desconhecido, a 20 ºC, é 50,000 838 mm. De acordo com 7.2.2, o resultado final da medição pode ser declarado como:

> l = 50,000 838 mm, com uma incerteza padrão combinada u_c = 32 nm. A incerteza padrão relativa combinada correspondente é $u_c / l = 6{,}4 \times 10^{-7}$.

H.1.6 Incerteza expandida

Suponha que seja requerida a obtenção de uma incerteza expandida $U_{99} = k_{99}\, u_c(l)$ que forneça um intervalo, tendo um nível da confiança de aproximadamente 99 por cento. O procedimento a ser utilizado está resumido em G.6.4, e os graus de liberdade requeridos estão indicados na tabela H.1. Estes foram obtidos como se segue:

1) *Incerteza de calibração do padrão*, $u(l_s)$ [H.1.3.1]. O certificado de calibração declara que os graus de liberdade efetivos da incerteza padrão combinada da qual foi obtida a incerteza expandida citada são $\nu_{\mathrm{eff}}(l_s) = 18$.

2) *Incerteza da diferença medida nos comprimentos*, $u(d)$ [H.1.3.2]. Embora $\bar{d}$ fosse obtido de cinco observações repetidas, em razão de $u(\bar{d})$ ter sido obtido de um desvio padrão experimental agrupado baseado em 25 observações, os graus de liberdade de $u(\bar{d})$ são $\nu(\bar{d})$ = 25 - 1 = 24 (ver H.3.6 - nota). Os graus de liberdade de $u(d_1)$, a incerteza devido aos efeitos aleatórios no comparador, são $\nu(d_1)$ = 6 -1 = 5, por d_1 ter sido obtido de seis medições repetidas. A incerteza de ± 0,02 μm para efeitos sistemáticos no comparador pode ser suposta como sendo confiável a 25 por cento e, assim, os graus de liberdade da equação (G.3), em G.4.2, é $\nu(d_2)$ = 8 (ver o exemplo de G.4.2). Os graus de liberdade efetivos de $u(d)$, $\nu_{\mathrm{eff}}(d)$, são, então, obtidos da equação (G.2b), em G.4.1:

$$\nu_{\mathrm{eff}}(d) = \frac{[u^2(\bar{d}) + u^2(d_1) + u^2(d_2)]^2}{\dfrac{u^4(\bar{d})}{\nu(\bar{d})} + \dfrac{u^4(d_1)}{\nu(d_1)} + \dfrac{u^4(d_2)}{\nu(d_2)}} =$$

$$= \frac{(9{,}7\ \text{nm})^4}{\frac{(5{,}8\ \text{nm})^4}{24} + \frac{(3{,}9\ \text{nm})^4}{5} + \frac{(6{,}7\ \text{nm})^4}{8}} = 25{,}6$$

3) *Incerteza da diferença nos coeficientes de expansão térmica*, $u(\delta\alpha)$ [H.1.3.5]. Os limites estimados de $\pm 1 \times 10^{-6}$ ºC^{-1} sobre a variabilidade de $\delta\alpha$ são julgados confiáveis a 10 por cento. Isso dá, pela equação (G.3), em G.4.2, $\nu(\delta\alpha) = 50$.

4) *Incerteza da diferença na temperatura dos blocos,* $u(\delta\theta)$ [H.1.3.6]. O intervalo estimado de − 0,05 ºC a + 0,05 ºC, para a diferença de temperatura $\delta\theta$, é tido como confiável somente a 50 por cento, e, pela equação (G.3), em G.4.2, fornece $\nu(\delta\theta) = 2$.

O cálculo de $\nu_{\text{eff}}(l)$ da equação (G.2b), em G.4.1, é efetuado exatamente da mesma maneira que o cálculo de $\nu_{\text{eff}}(d)$, em H.1.6, 2). Assim, das equações (H.6b) e (H.6c) e dos valores de ν dados em H.1.6, de 1) até 4).

$$\nu_{\text{eff}}(l) =$$

$$\frac{(32\ \text{nm})^4}{\frac{(25\,nm)^4}{18} + \frac{(9{,}7\,nm)^4}{25{,}6} + \frac{(2{,}9\,nm)^4}{50} + \frac{(16{,}6\,nm)^4}{2}} = 16{,}7$$

Para obter a incerteza expandida requerida, este valor é primeiramente arredondado para o próximo inteiro inferior, $\nu_{\text{eff}}(l) = 16$. Segue, então, da tabela G.2, no anexo G, que $t_{99}(16) = 2{,}92$ e, portanto, $U_{99} = t_{99}(16)u_c(l) = 2{,}92 \times (32\ \text{nm}) = 93\ \text{nm}$. Seguindo 7.2.4, o resultado final da medição pode ser declarado como:

$l = (50{,}000\ 838 \pm 0{,}000\ 093)$ mm, onde o número precedido do símbolo ± é o valor numérico de uma incerteza expandida $U = ku_c$, com U determinado a partir de uma incerteza padrão combinada $u_c = 32$ nm e um fator de abrangência $k = 2{,}92$, baseado na distribuição-*t*, para $\nu = 16$ graus de liberdade, e define um intervalo, o qual se estima ter um nível da confiança de 99 por cento. A incerteza expandida relativa correspondente é $U/l = 1{,}9 \times 10^{-6}$.

H.1.7 Termos de segunda ordem

A Nota de 5.1.2 assinala que a equação (10), que é usada neste exemplo para se obter a incerteza padrão combinada $u_c(l)$, deve ser aumentada quando a não-linearidade da função $Y = f(X_1, X_2, ..., X_N)$ é tão significativa que os termos de maior ordem na expansão pela série de Taylor não podem ser desprezados. Tal é o caso neste exemplo e, portanto, a avaliação de $u_c(l)$, como apresentada até este ponto, não está completa. A aplicação da equação (H.3) da expressão dada na nota de 5.1.2 resulta, de fato, em dois termos de segunda ordem distintos, não-desprezíveis, a serem adicionados à equação (H.5). Estes termos, que provêm do termo quadrático na expressão da nota, são:

$$l_s^2\, u^2(\delta\alpha)\, u^2(\theta) + l_s^2\, u^2(\alpha_s)\, u^2(\delta\theta)$$

mas somente o primeiro destes termos contribui significativamente para $u_c(l)$:

$$l_s u(\delta\alpha)\, u(\theta) = (0{,}05\ \text{m})(0{,}58 \times 10^{-6}\ ^\circ\text{C}^{-1})(0{,}41\ ^\circ\text{C})$$

$$= 11{,}7\ \text{nm}$$

$$l_s u(\alpha_s)\, u(\delta\theta) = (0{,}05\ \text{m})(1{,}2 \times 10^{-6}\ ^\circ\text{C}^{-1})(0{,}029\ ^\circ\text{C})$$

$$= 1{,}7\ \text{nm}$$

Os termos de segunda ordem aumentam $u_c(l)$ de 32 nm para 34 nm.

H.2 Medição simultânea de resistência e reatância

Este exemplo demonstra o tratamento de mensurandos múltiplos ou grandezas de saída determinadas simultaneamente na mesma medição e a correlação de suas estimativas. Ele considera somente as variações aleatórias das observações; na prática atual, as incertezas de correções para efeitos sistemáticos também contribuiriam para a incerteza dos resultados da medição. Os dados são analisados de dois modos diferentes, sendo que ambos fornecem, essencialmente, os mesmos valores numéricos.

H.2.1 O problema de medição

A resistência R e a reatância X de um elemento de circuito são determinadas, medindo-se a amplitude V de uma diferença de potencial alternada senoidal entre seus terminais, a amplitude I da corrente alternada que passa por ele e o ângulo de mudança de fase ϕ da diferença de potencial alternada em relação à corrente alternada. Assim, as três grandezas de entrada são V, I e ϕ, e as três grandezas de saída - os mensurados - são os três componentes da impedância R, X, e Z. Uma vez que $Z^2 = R^2 + X^2$, existem somente duas grandezas de saída independentes.

H.2.2 Modelo matemático e dados

Os mensurandos são relacionados às grandezas de entrada pela lei de Ohm:

$$R = \frac{V}{I}\cos\phi;\ X = \frac{V}{I}\operatorname{sen}\phi;\ Z = \frac{V}{I} \qquad \text{(H.7)}$$

Considere que cinco conjuntos independentes de observações simultâneas das três grandezas de entrada V, I e ϕ são obtidas sob condições similares (ver B.2.15), resultando nos dados apresentados na tabela H.2. As médias aritméticas das observações e os desvios padrão experimentais destas médias, calculados pelas equações (3) e (5), em 4.2, são também dadas. As médias são tomadas como sendo as melhores estimativas dos valores esperados das grandezas de entrada, e os desvios padrão experimentais são as incertezas padrão destas médias.

Como as médias $\overline{V}$, $\overline{I}$ e $\overline{\phi}$ são obtidas por observações simultâneas, elas são correlacionadas, e as correlações devem ser levadas em conta na avaliação das incertezas padrão dos mensurandos R, X e Z. Os coeficientes de correlação requeridos são prontamente obtidos pela equação (14), em 5.2.2, usando valores de $s(\overline{V}, \overline{I})$, $s(\overline{V}, \overline{\phi})$ e $s(\overline{I}, \overline{\phi})$ calculados pela equação (17), em 5.2.3. Os resultados estão incluídos na Tabela H.2, onde deve ser lembrado que $r(x_i,x_j) = r(x_j,x_i)$ e $r(x_i,x_i) = 1$.

H.2.3 Resultados: enfoque 1

O enfoque 1 está resumido na Tabela H.3.

Os valores dos três mensurandos R, X e Z são obtidos das relações dadas na equação (H.7), usando os valores médios $\overline{V}$, $\overline{I}$ e $\overline{\phi}$ da Tabela H.2, para V, I e ϕ. As incertezas padrão de R,X e Z são obtidas da equação (16), em 5.2.2, uma vez que, como mencionado acima, as grandezas de entrada $\overline{V}$, $\overline{I}$ e $\overline{\phi}$ são correlacionadas. Como exemplo, considere $Z = \overline{V} / \overline{I}$. Identificando $\overline{V}$ com x_1, $\overline{I}$ com x_2 e f com $Z = \overline{V} / \overline{I}$, a equação (16), em 5.2.2, fornece para a incerteza padrão combinada de Z:

$$u_c^2(Z) = \left[\frac{1}{\overline{I}}\right]^2 u^2(\overline{V}) + \left[\frac{\overline{V}}{\overline{I}^2}\right]^2 u^2(\overline{I}) \qquad \text{(H.8a)}$$

$$+2\left[\frac{1}{\overline{I}}\right]\left[-\frac{\overline{V}}{\overline{I}^{\,2}}\right] u(\overline{V})\, u(\overline{I})\, r(\overline{V}, \overline{I})$$

$$= Z^2\left[\frac{u(\overline{V})}{\overline{V}}\right]^2 + Z^2\left[\frac{u(\overline{I})}{\overline{I}}\right]^2 \qquad \text{(H.8b)}$$

$$-2\, Z^2\left[\frac{u(\overline{V})}{\overline{V}}\right]\left[\frac{u(\overline{I})}{\overline{I}}\right] r(\overline{V}, \overline{I})$$

ou:

$$u_{c,r}^2\ (\overline{Z}) = u_r^2\ (\overline{V}) + u_r^2\ (\overline{I}) \qquad \text{(H.8c)}$$

$$-\,2u_r\ (\overline{V})\, u_r\ (\overline{I})\, r(\overline{V}, \overline{I})$$

onde $u(\overline{V}) = s(\overline{V})$ e $u(\overline{I}) = s(\overline{I})$, e o subscrito "$r$", na última expressão, indica que u é uma incerteza relativa. Substituindo os valores apropriados da tabela H.2, na equação (H.8a), tem-se, então, $u_c(Z) = 0{,}236\ \Omega$.

Em razão de os três mensurandos, ou grandezas de saída, dependerem das mesmas grandezas de entrada, eles também são correlacionados. Os elementos da matriz de covariância que descreve esta correlação podem ser escritos, em geral, como:

Tabela H.2 - Valores das grandezas de entrada V, I e ϕ obtidos de cinco conjuntos de observações simultâneas

Nº do conjunto k	Grandezas de Entrada		
	V (V)	I (mA)	ϕ (rad)
1	5,007	19,663	1,0456
2	4,994	19,639	1,0438
3	5,005	19,640	1,0468
4	4,990	19,685	1,0428
5	4,999	19,678	1,0433
Média aritmética	$\overline{V} = 4{,}9990$	$\overline{I} = 19{,}6610$	$\overline{\phi} = 1{,}044\ 46$
Desvio padrão experimental da média	$s(\overline{V}) = 0{,}0032$	$s(\overline{I}) = 0{,}0095$	$s(\overline{\phi}) = 0{,}000\ 75$

Coeficientes de correlação
$r(\overline{V}, \overline{I}) = -0{,}36$
$r(\overline{V}, \overline{\phi}) = 0{,}86$
$r(\overline{I}, \overline{\phi}) = -0{,}65$

$$u(y_l, y_m) = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial y_l}{\partial x_i} \frac{\partial y_m}{\partial x_j} u(x_i) u(x_j) r(x_i . x_j) \qquad \text{(H.9)}$$

onde $y_l = f_l(x_1, x_2, \ldots, x_N)$ e $y_m = f_m(x_1, x_2, \ldots, x_N)$. A equação (H.9) é a generalização da equação (F.2), em F.1.2.3, quando os q_l são correlacionados. Os coeficientes de correlação estimados das grandezas de saída são dados por $r(y_l,y_m) = u(y_l,y_m)/u(y_l)u(y_m)$, como indicado na equação (14), em 5.2.2. Deve-se reconhecer que os elementos diagonais da matriz de covariância, $u(y_l,y_l) \equiv u^2(y_l)$, são as variâncias estimadas das grandezas de saída y_l (ver 5.2.2, nota 2) e que, para $m = l$, a equação (H.9) é idêntica à equação (16), em 5.2.2.

Para aplicar a equação (H.9) neste exemplo, as seguintes identificações são feitas:

$y_1 = R$ $\quad x_1 = \overline{V}$ $\quad u(x_i) = s(x_i)$

$y_2 = X$ $\quad x_2 = \overline{I}$ $\quad N = 3$

$y_3 = Z$ $\quad x_3 = \overline{\phi}$

Os resultados dos cálculos de R, X e Z e de suas variâncias estimadas e coeficientes de correlação são dados na Tabela H.3.

H.2.4 Resultados: enfoque 2

O enfoque 2 está resumido na tabela H.4.

Uma vez que os dados tenham sido obtidos de cinco conjuntos de observações das três grandezas de entrada V, I e ϕ, é possível computar um valor para R, X e Z de *cada conjunto* de dados de entrada e, então, tomar a média aritmética dos cinco valores individuais para obter as melhores estimativas de R, X e Z. O desvio padrão experimental de cada média (que é a sua incerteza padrão combinada) é, então, calculado a partir dos cinco valores individuais da maneira usual [equação (5), em 4.2.3]; e as covariâncias estimadas das três médias são calculadas, aplicando-se a equação (17), em 5.2.3, diretamente aos cinco valores individuais dos quais cada média é obtida. Não existem diferenças nos valores de saída, incertezas padrão e covariâncias estimadas fornecidas pelos dois enfoques, exceto para efeitos de segunda ordem associados com a substituição de termos tais como $\overline{V}/\overline{I}$ e $\cos\overline{\phi}$ por $\overline{V/I}$ e $\overline{\cos\phi}$.

Para demonstrar este enfoque, a tabela H.4 dá os valores de R, X e Z calculados para cada um dos cinco conjuntos de observações. As médias aritméticas, incertezas padrão e coeficientes de correlação estimados são, então, diretamente computados destes valores individuais. Os resultados numéricos obtidos dessa maneira diferem dos resultados fornecidos, na tabela H.3, por um valor desprezível.

Na terminologia da nota de 4.1.4, o enfoque 2 é um exemplo a obtenção da estimativa y a partir de $\overline{Y} = (\sum_{k=1}^{n} Y_k)/n$,

Tabela H.3 - Valores calculados das grandezas de saída R, X e Z: enfoque 1

Índice do mensurado l	Relação entre a estimativa do mensurando y_l e a estimativa de entrada x_i	Valor da estimativa y_l , que é o resultado da medição	Incerteza padrão combinada $u_c(y_l)$ do resultado da medição
1	$y_1 = R = (\overline{V} / \overline{I}) \cos\overline{\phi}$	$y_1 = R = 127{,}732\ \Omega$	$u_c(R) = 0{,}071\ \Omega$ $u_c(R)/R = 0{,}06 \times 10^{-2}$
2	$y_2 = X = (\overline{V} / \overline{I})\ \text{sen}\ \overline{\phi}$	$y_2 = X = 219{,}847\ \Omega$	$u_c(X) = 0{,}295\ \Omega$ $u_c(X)/X = 0{,}13 \times 10^{-2}$
3	$y_3 = Z = \overline{V} / \overline{I}$	$y_3 = Z = 254{,}260\ \Omega$	$u_c(Z) = 0{,}236\ \Omega$ $u_c(Z)/Z = 0{,}09 \times 10^{-2}$
Coeficiente de correlação $r\ (y_l ,\ y_m)$			
$r(y_1, y_2) = r(R, X) = -0{,}588$ $r(y_1, y_3) = r(R, Z) = -0{,}485$ $r(y_2, y_3) = r(X, Z) = 0{,}993$			

Tabela H.4 - Valores calculados das grandezas de saída R, X e Z: enfoque 2

Nº do conjunto k	Valores individuais dos mensurandos		
	$R = (V/I) \cos \phi(\Omega)$	$X = (V/I)\ \text{sen}\ \phi(\Omega)$	$Z = V/I(\Omega)$
1	127,67	220,32	254,64
2	127,89	219,79	254,29
3	127,51	220,64	254,84
4	127,71	218,97	253,49
5	127,88	219,51	254,04
Média aritmética	$y_1 = \overline{R} = 127{,}732$	$y_2 = \overline{X} = 219{,}847$	$y_3 = \overline{Z} = 254{,}260$
Desvio padrão da média experimental	$s(\overline{R}) = 0{,}071$	$s(\overline{X}) = 0{,}295$	$s(\overline{Z}) = 0{,}236$
Coeficiente de correlação $r\ (y_l ,\ y_m)$			
$r(y_1, y_2) = r(\overline{R}, \overline{X}) = -0{,}588$ $r(y_1, y_3) = r(\overline{R}, \overline{Z}) = -0{,}485$ $r(y_2, y_3) = r(\overline{X}, \overline{Z}) = 0{,}993$			

enquanto que o enfoque 1 é um exemplo de obtenção de y a partir de $y = f(\overline{X}_1, \overline{X}_2, \ldots \overline{X}_N)$. Como ressaltado naquela nota, em geral, os dois enfoques fornecerão resultados *idênticos*, se f é uma função linear de suas grandezas de entrada (desde que os coeficientes de correlação observados experimentalmente sejam levados em consideração quando se implementa o enfoque 1). Se f não é uma função linear, então os resultados do enfoque 1 diferirão daqueles do enfoque 2, dependendo do grau de não-linearidade e das variâncias e covariâncias estimadas de X_i. Isso pode ser visto na expressão:

$$y = f\,(\overline{X}_1, \overline{X}_2, \ldots, \overline{X}_N) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\frac{\partial^2 f}{\partial \overline{X}_i\,,\partial \overline{X}_j}u(\overline{X}_i\,, \overline{X}_j) + \ldots \tag{H.10}$$

onde o segundo termo, no lado direito da igualdade, é o termo de segunda ordem da expansão da série de Taylor de f em termos de $\overline{X}_i$ (ver também 5.1.2, nota). No presente caso, o enfoque 2 é preferível porque ele evita a aproximação $y = f(\overline{X}_1, \overline{X}_2, \ldots, \overline{X}_N)$ e reflete melhor o procedimento de medição utilizado - os dados foram, na realidade, coletados em conjuntos.

Por outro lado, o enfoque 2 seria inadequado se os dados da tabela H.2 representassem $n_1 = 5$ observações da diferença de potencial V, seguidas por $n_2 = 5$ observações da corrente I, e, então, seguidas por $n_3 = 5$ observações da fase ϕ, e seria impossível, se $n_1 \neq n_2 \neq n_3$. (É, na realidade, um mau procedimento de medição executar as medições dessa maneira, uma vez que a diferença de potencial através de uma impedância fixada e a corrente através dela são diretamente relacionadas).

Se os dados da tabela H.2 forem reinterpretados dessa maneira, de modo que o enfoque 2 seja inadequado, e se as correlações entre as grandezas V, I e ϕ forem supostas como ausentes, então os coeficientes de correlação observados não têm nenhum significado e devem ser tomados como sendo zero. Se isto é feito na Tabela H.2, a equação (H.9) reduz-se ao equivalente da equação (F.2), em F.1.2.3, isto é:

$$u(y_l, y_m) = \sum_{i=1}^{N}\frac{\partial y_l}{\partial x_i}\frac{\partial y_m}{\partial x_i}u^2(x_i) \tag{H.11}$$

e sua aplicação aos dados da tabela H.2 leva às alterações na tabela H.3, mostradas na tabela H.5:

Tabela H.5 - Alterações na tabela H.3 sob a hipótese de que os coeficientes de correlação da tabela H.2 são zero

Incerteza padrão combinada $u_c(y_l)$ do resultado de medição
$u_c(R) = 0{,}195\Omega$ $u_c(R)/R = 0{,}15 \times 10^{-2}$
$u_c(X) = 0{,}201\Omega$ $u_c(X)/X = 0{,}09 \times 10^{-2}$
$u_c(Z) = 0{,}204\Omega$ $u_c(Z)/Z = 0{,}08 \times 10^{-2}$
Coeficientes de correlação, $r(y_l, y_m)$
$r(y_1, y_2) = r(R, X) = 0{,}056$ $r(y_1, y_3) = r(R, Z) = 0{,}527$ $r(y_2, y_3) = r(X, Z) = 0{,}878$

H.3 Calibração de um termômetro

Este exemplo ilustra o uso do método dos mínimos quadrados para obter uma curva de calibração linear e como os parâmetros do ajuste, o intercepto e a inclinação, e suas variâncias e covariâncias estimadas são usadas para obter, a partir da curva, o valor da incerteza padrão de uma correção prevista.

H.3.1 O problema da medição

Um termômetro é calibrado comparando-se n = 11 leituras t_k de temperatura do termômetro, cada uma tendo uma incerteza desprezível, com as correspondentes temperaturas de referência conhecidas $t_{R,k}$ na faixa de temperatura de 21 ºC a 27 ºC, para obter as correções $b_k = t_{R,k} - t_k$ para as leituras. As correções medidas b_k e as temperaturas *medidas* t_k são as grandezas de entrada da avaliação. Uma curva de calibração linear:

$$b(t) = y_1 + y_2(t - t_o) \qquad \text{(H.12)}$$

é ajustada pelo método dos mínimos quadrados, para as correções e temperaturas medidas. Os parâmetros y_1 e y_2, que são, respectivamente, o intercepto e a inclinação da curva de calibração, são os dois mensurandos ou as grandezas de saída a serem determinadas. A temperatura t_0 é uma temperatura exata de referência convenientemente escolhida; ela não é um parâmetro independente a ser determinado pelo ajuste dos mínimos quadrados. Uma vez que y_1 e y_2 são encontrados, juntamente com suas variâncias e covariâncias estimadas, a equação (H.12) pode ser usada para predizer o valor e a incerteza padrão da correção a ser aplicada ao termômetro, para qualquer valor t da temperatura.

H.3.2 Ajuste por mínimos quadrados

Baseado no método dos mínimos quadrados, e de acordo com as hipóteses feitas em H.3.1 acima, as grandezas de saída y_1 e y_2 e suas variâncias e covariância estimadas são obtidas, minimizando-se a soma:

$$S = \sum_{k=1}^{n} [b_k - y_1 - y_2(t_k - t_0)]^2$$

Isto conduz às seguintes equações para y_1, y_2, suas variâncias experimentais $s^2(y_1)$ e $s^2(y_2)$, e seu coeficiente de correlação estimado $r(y_1, y_2) = s(y_1, y_2) / s(y_1)s(y_2)$, onde $s(y_1, y_2)$ é sua covariância estimada:

$$y_1 = \frac{(\sum b_k)(\sum \theta_k^2) - (\sum b_k\theta_k)(\sum \theta_k)}{D} \qquad \text{(H.13a)}$$

$$y_2 = \frac{n\sum b_k\theta_k - (\sum b_k)(\sum \theta_k)}{D} \qquad \text{(H.13b)}$$

$$s^2(y_1) = \frac{s^2\sum \theta_k^2}{D} \qquad \text{(H.13c)}$$

$$s^2(y_2) = n\frac{s^2}{D} \qquad \text{(H.13d)}$$

$$r(y_1, y_2) = -\frac{\sum \theta_k}{\sqrt{n\sum \theta_k^2}} \qquad \text{(H.13e)}$$

$$s^2 = \frac{\sum [b_k - b(t_k)]^2}{n-2} \qquad \text{(H.13f)}$$

$$D = n\sum \theta_k^2 - (\sum \theta_k)^2 \qquad \text{(H.13g)}$$

$$= n\sum(\theta_k - \bar{\theta})^2 = n\sum(t_k - \bar{t})^2$$

onde todos os somatórios são de $k = 1$ até n, $\theta_k = t_k - t_0$, $\bar{\theta} = (\sum \theta_k)/n$ e $\bar{t} = (\sum t_k)/n$; $[b_k - b(t_k)]$ é a diferença entre a correção b_k medida ou observada na temperatura t_k e a correção $b(t_k)$ prevista pela curva ajustada $b(t) = y_1 + y_2(t - t_0)$ em t_k. A variância s^2 é uma medida da incerteza total do ajuste, onde o fator n - 2 reflete o fato de que, por serem os dois parâmetros y_1 e y_2 determinados pelas n observações, os graus de liberdade de s^2 são $\nu = n - 2$ (ver G.3.3).

H.3.3 Cálculo dos resultados

Os dados a serem ajustados são fornecidos na segunda e na terceira colunas da tabela H.6. Tomando t_0 = 20ºC como a temperatura de referência, a aplicação das equações (H.13a) a (H.13g) fornece:

$$\begin{array}{llll} y_1 = -0{,}1712\ °C & s(y_1) = 0{,}0029\ °C \\ y_2 = 0{,}002\,18 & s(y_2) = 0{,}000\,67 \\ r(y_1, y_2) = -0{,}930 & s = 0{,}0035\ °C \end{array}$$

O fato da inclinação y_2 ser mais de três vezes maior do que a sua incerteza padrão fornece alguma indicação de que uma curva de calibração, e não uma correção média fixa, seja requerida.

A curva de calibração pode, então, ser escrita como:

$$b(t) = -0{,}1712(29)°C + 0{,}002\,18(67)(t - 20\ °C) \qquad \text{(H.14)}$$

Tabela H.6 - Dados usados para se obter uma curva linear de calibração para um termômetro pelo método dos mínimos quadrados

Nº da leituta k	Leitura do termômetro t_k (ºC)	Correção observada b_k=$t_{R,k}$-t_k (ºC)	Correção prevista $b(t_k)$ (ºC)	Diferença entre a correção observada e a prevista b_k -$b(t_k)$ (ºC)
1	21,521	-0,171	-0,1679	-0,0031
2	22,012	-0,169	-0,1668	-0,0022
3	22,512	-0,166	-0,1657	-0,0003
4	23,003	-0159	-0,1646	+0,0056
5	23,507	-0,164	-0,1635	-0,0005
6	23,999	-0,165	-0,1625	-0,0025
7	24,513	-0,156	-0,1614	+0,0054
8	25,002	-0,157	-0,1603	+0,0033
9	25,503	-0,159	-0,1592	+0,0002
10	26,010	-0,161	-0,1581	-0,0029
11	26,511	-0,160	-0,1570	-0,0030

onde os números entre parênteses são os valores numéricos das incertezas padrão correspondentes aos últimos dígitos dos resultados citados para o intercepto e a inclinação (ver 7.2.2). Esta equação fornece o valor previsto da correção b(t) em qualquer temperatura *t* e, em particular, o valor $b(t_k)$ em t=t_k. Estes valores são dados na quarta coluna da tabela, enquanto que a última coluna fornece as diferenças entre os valores medidos e previstos, b_k - $b(t_k)$. Uma análise dessas diferenças pode ser utilizada para verificar a validade do modelo linear; testes formais existem (ver referência [8]), porém não são considerados neste exemplo.

H.3.4 Incerteza de um valor previsto

A expressão para a incerteza padrão combinada do valor previsto de uma correção pode ser prontamente obtido, aplicando-se a lei de propagação de incerteza, equação (16) em 5.2.2, à equação (H.12). Notando-se que $b(t) = f(y_1,y_2)$ e escrevendo $u(y_1) = s(y_1)$ e $u(y_2) = s(y_2)$, obtém-se:

$$u_c^2[b(t)] = u^2(y_1) + (t - t_0)^2 u^2(y_2) + 2(t - t_0)u(y_1)u(y_2)r(y_1, y_2) \qquad \text{(H.15)}$$

A variância estimada $u_c^2[b(t)]$ é mínima em $t_{\min} = t_0 - u(y_1)r(y_1, y_2)/u(y_2)$, e no presente caso, é $t_{\min}$ = 24,0085ºC.

Como um exemplo do uso da equação (H.15), considere que se requeira uma correção no termômetro e sua incerteza em t = 30 ºC, que está fora da faixa de temperatura na qual o termômetro foi realmente calibrado. Substituindo t = 30 ºC na equação (H.14), resulta:

$$B(30\ ºC) = -0{,}1494\ ºC$$

enquanto que a equação (H.15) se torna:

$$u_c^2[b(30\ °C)] = (0{,}0029\ °C)^2 + (10\ °C)^2(0{,}000\ 67)^2 + $$
$$+2(10°C)(0{,}0029°C)(0{,}00067°C)(-0{,}930) = 17{,}1\times10^{-6}\ °C^2$$

ou:

$$u_c[b(30\ °C)] = 0{,}0041\ °C$$

Assim, a correção em 30 ºC é -0,1494 ºC, com uma incerteza padrão combinada de u_c = 0,0041ºC , e com u_c tendo $v = n - 2 = 9$ graus de liberdade.

H.3.5 Eliminação da correlação entre a inclinação e o intercepto

A equação (H.13e) para o coeficiente de correlação $r(y_1,y_2)$ implica que, se t_0 é escolhido de forma tal que $\sum_{k=1}^{n} \theta_k = \sum_{k=1}^{n} (t_k - t_0) = 0$, então $r(y_1,y_2) = 0$ e y_1 e y_2 serão não-correlacionados, simplificando, portanto, o cálculo da incerteza padrão de uma correção prevista. Uma vez que $\sum_{k=1}^{n} \theta_k = 0$, quando $t_0 = \bar{t} = (\sum_{k=1}^{n} t_k)/n$ e

$\bar{t}$ = 24,0085 ºC no presente caso, repetindo-se o ajuste de mínimos quadrados, com $t_o = \bar{t} = 24{,}0085\ °C$, levará a valores de y_1 e y_2 não-correlacionados. (A temperatura $\bar{t}$ é também a temperatura na qual $u^2[b(t)]$ é um mínimo - ver H.3.4). Entretanto, repetir o ajuste é desnecessário porque pode ser mostrado que:

$$b(t) = y_1' + y_2(t - \bar{t}) \qquad \text{(H.16a)}$$

$$u_c^2[b(t)] = u^2(y_1') + (t - \bar{t})^2 u^2(y_2) \qquad \text{(H.16b)}$$

$$r(y_1', y_2) = 0 \qquad \text{(H.16c)}$$

onde:

$$y_1' = y_1 + y_2(\bar{t} - t_0)$$

$$\bar{t} = t_0 - s(y_1)r(y_1, y_2)/s(y_2)$$

$$s^2(y_1') = s^2(y_1)[1 - r^2(y_1, y_2)]$$

e, ao escrever a equação (H.16b), as substituições $u(y_1') = s(y_1')$ e $u(y_2) = s(y_2)$ foram feitas [ver a equação (H.15)].

Aplicando essas relações aos resultados fornecidos em H.3.3, tem-se:

$$b(t) = -0{,}1625(11) \qquad \text{(H.17a)}$$

$$+ 0{,}002\,18(67)(t - 24{,}0085\ °\mathrm{C})$$

$$u_c^2[b(t)] = (0{,}0011)^2 \qquad \text{(H.17b)}$$

$$+ (t - 24{,}0085\ °\mathrm{C})^2 (0{,}000\,67)^2$$

Pode-se verificar que estas expressões fornecem os mesmos resultados que as equações (H.14) e (H.15), repetindo-se o cálculo de b(30 ºC) e $u_c[b(30\ ºC)]$. Substituindo t = 30 ºC nas equações (H.17a) e (H.17b), tem-se:

$$b(30\ ºC) = -0{,}1494\ ºC$$

$$u_c[b(30\ ºC)] = 0{,}0041\ ºC$$

que são idênticos aos resultados obtidos em H.3.4. A covariância estimada entre as duas correções previstas $b(t_1)$ e $b(t_2)$ pode ser obtida da equação (H.9), em H.2.3.

H.3.6 Outras considerações

O método dos mínimos quadrados pode ser usado para ajustar curvas de ordem superior aos pontos correspondentes aos dados, e é também aplicável aos casos em que os dados individuais têm incertezas. Textos de referência sobre o assunto devem ser consultados para maiores detalhes [8]. Entretanto, os seguintes exemplos ilustram dois casos nos quais as correções medidas b_k não são supostas como exatamente conhecidas.

1) Considere cada t_k tendo uma incerteza desprezível, considere que cada um dos n valores $t_{R,k}$ seja obtido de uma série de m leituras repetidas e considere que a estimativa agrupada de variância para tais leituras baseadas em uma grande quantidade de dados obtidos ao longo de muitos meses, seja s_p^2. Então a variância estimada de cada $t_{R,k}$ é $s_p^2/m = u_0^2$, e cada correção observada $b_k = t_{R,k} - t_k$ tem a *mesma* incerteza padrão u_0. Sob estas circunstâncias (e sob a suposição de que não existe razão para se crer que o modelo linear seja incorreto), u_0^2 substitui s^2 nas equações (H.13c) e (H.13d).

NOTA - A estimativa agrupada de variância s_p^2, baseada em N séries de observações independentes da mesma variável aleatória, é obtida de:

$$s_p^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N} \nu_i s_i^2}{\sum_{i=1}^{N} \nu_i}$$

onde s_i^2 é a variância experimental da i-ésima série de n_i observações repetidas independentes [equação (4), em 4.2.2] e tem graus de liberdade $\nu_i = n_i - 1$. Os graus de liberdade de s_p^2 são $\nu = \sum_{i=1}^{N} \nu_i$. A variância experimental s_p^2/m (e o desvio padrão experimental $s_p/\sqrt{m}$) da média aritmética de m observações independentes, caracterizada pela estimativa agrupada da variância s_p^2, também tem ν graus de liberdade.

2) Suponha que cada t_k tenha incerteza desprezível, que uma correção ε_k seja aplicada a cada um dos n valores $t_{R,k}$ e que cada correção tenha a mesma incerteza padrão u_a. Então, a incerteza padrão de cada $b_k = t_{R,k} - t_k$ é, também, u_a e $s^2(y_1)$ é substituído por $s^2(y_1) + u_a^2$ e $s^2(y'_1)$ é substituído por $s^2(y'_1) + u_a^2$.

H.4 Medição de atividade

Este exemplo é similar ao exemplo H.2, a medição simultânea de resistência e reatância, na qual os dados podem ser analisados de duas maneiras diferentes, fornecendo essencialmente os mesmos resultados numéricos. O primeiro enfoque ilustra, mais uma vez, a necessidade de se levar em conta as correlações observadas entre as grandezas de entrada.

H.4.1 O problema de medição

A concentração desconhecida de atividade do radônio (^{222}Rn), em uma amostra de água, é determinada pela contagem por cintilação líquida comparada com uma amostra padrão de radônio em água, tendo uma concentração de atividade conhecida. A concentração de atividade desconhecida é obtida, medindo-se três fontes de contagem consistindo de, aproximadamente, 5 g de água e 12 g de emulsão cintiladora orgânica em frascos de 22 ml de volume:

Fonte (a) um *padrão* consistindo de uma massa *ms* de uma solução padrão com uma concentração de atividade conhecida;

Fonte (b) uma amostra *branca* equivalente de água não contendo material radioativo, usada para obter a taxa de contagem de fundo (background);

Fonte (c) a *amostra* consistindo de uma alíquota de massa m_x com uma concentração de atividade desconhecida.

Seis ciclos de medição das três fontes de contagem são realizados nesta ordem: padrão - amostra branca - amostra; cada intervalo de contagem T_0 , corrigido para tempo morto, para cada fonte, durante todos os seis ciclos, é de 60 minutos. Embora a taxa de contagem de fundo não possa ser suposta como constante durante todo o intervalo de contagem (65 horas), supõe-se que o número de contagens obtido para cada amostra branca possa ser usado como representativo da taxa de contagem de fundo durante as medições do padrão e da amostra no mesmo ciclo. Os dados são fornecidos na Tabela H.7, onde:

t_S, t_B, t_x são os tempos desde o tempo de referência t = 0 até o ponto médio dos intervalos de contagem T_0 = 60 min, corrigidos para tempo morto para os recipientes com o padrão, a amostra branca e a amostra, respectivamente; embora t_B seja dado para a completeza, ele não é necessário à análise;

C_S, C_B, C_x são os números de contagens registrados nos intervalos de contagem T_0 = 60 min, corrigidos para tempo morto, para os recipientes com o padrão, amostra branca e amostra, respectivamente.

As contagens observadas podem ser expressas como:

$$C_S = C_B + \varepsilon A_S T_0 m_S e^{-\lambda t_S} \qquad \text{(H.18a)}$$

$$C_x = C_B + \varepsilon A_x T_0 m_x e^{-\lambda t_x} \qquad \text{(H.18b)}$$

onde:

ε é a eficiência de detecção da cintilação líquida para ^{222}Rn, para uma dada composição de fonte, suposta como sendo independente do nível de atividade;

A_S é a concentração de atividade do padrão no tempo de referência t = 0;

Tabela H.7 - Dados de contagem para determinação da concentração de atividade de uma amostra desconhecida

Ciclo	Padrão		Amostra Branca		Amostra	
k	t_S (min)	C_S (contagens)	t_B (min)	C_B (contagens)	t_x (min)	C_x (contagens)
1	243,74	15 380	305,56	4054	367,37	41 432
2	984,53	14 978	1046,10	3922	1107,66	38 706
3	1723,87	14 394	1785,43	4200	1846,99	35 860
4	2463,17	13 254	2524,73	3830	2586,28	32 238
5	3217,56	12 516	3279,12	3956	3340,68	29 640
6	3956,83	11 058	4018,38	3980	4079,94	26 356

A_x é o *mensurando* e é definido como a concentração de atividade desconhecida da amostra no tempo de referência $t = 0$;

m_S é a massa da solução padrão;

m_x é a massa da alíquota de amostra;

λ é a constante de decaimento para o ^{222}Rn: $\lambda = (\ln 2)/T_{1/2} = 1{,}258\,94 \times 10^{-4}\ \text{min}^{-1}$

($T_{1/2}$ = 5505,8 min).

As equações (H.18a) e (H.18b) indicam que nenhum dos seis valores individuais, seja de C_S ou de C_x, dados na tabela H.7, pode fornecer uma média diretamente por causa do decaimento exponencial da atividade do padrão e da amostra, e de pequenas variações na contagem de fundo de um para outro ciclo. Em vez disso, deve-se trabalhar com contagens corrigidas para o decaimento e para o fundo (ou taxas de contagem definidas como o número de contagens dividido por T_0 = 60 min). Isto sugere a combinação das equações (H.18a) e (H.18b), para obter a seguinte expressão para a concentração desconhecida em termos das grandezas conhecidas:

$$A_x = f\,(A_S,\, m_S,\, m_x,\, C_S,\, C_x,\, C_B,\, t_S,\, t_x,\, \lambda) =$$

$$= A_S \frac{m_S}{m_x} \frac{(C_x - C_B)\, e^{\lambda t_x}}{(C_S - C_B)\, e^{\lambda t_S}} \qquad \text{(H.19)}$$

$$= A_S \frac{m_S}{m_x} \frac{C_x - C_B}{C_S - C_B}\, e^{\lambda(t_x - t_S)}$$

onde $(C_x - C_B)e^{\lambda t_x}$ e $(C_S - C_B)e^{\lambda t_S}$ são, respectivamente, as contagens, corrigidas para contagens de fundo, da amostra e do padrão no tempo de referência t = 0 e para o intervalo de tempo T_0 = 60 min. Alternativamente, pode-se simplesmente escrever:

$$A_x = f(A_S, m_S, m_x, R_S, R_x)$$

$$= A_s \frac{m_S}{m_x} \frac{R_x}{R_s} \qquad \text{(H.20)}$$

onde as *taxas de contagem*, R_x e R_S, corrigidas para contagens de fundo e para decaimento, são dadas por:

$$R_x = \left[(C_x - C_B)/T_O\right] e^{\lambda t_x} \qquad \text{(H.21a)}$$

$$R_s = \left[(C_s - C_B)/T_O\right] e^{\lambda t_s} \qquad \text{(H.21b)}$$

H.4.2 Análise de dados

A tabela H.8 resume os valores das taxas de contagem R_S e R_x corrigidas para contagem de fundo e para decaimento, calculados a partir das equações (H.21a) e (H.21b), usando os dados da tabela H.7 e $\lambda = 1{,}258\,94 \times 10^{-4}\ \text{min}^{-1}$, como fornecidos anteriormente. Deve-se notar que a razão $R = R_x/R_S$ é calculada, de forma mais simples, pela expressão:

$$[(C_x - C_B)/(C_S - C_B)]\mathrm{e}^{\lambda(t_x - t_S)}$$

As médias aritméticas $\overline{R}_S$, $\overline{R}_x$ e $\overline{R}$, e seus desvios padrão experimentais $s(\overline{R}_S)$, $s(\overline{R}_x)$ e $s(\overline{R})$ são calculados do modo usual [equações (3) e (5), em 4.2]. O coeficiente de correlação $r(\overline{R}_x, \overline{R}_S)$ é calculado pela equação (17), em 5.2.3, e pela equação (14), em 5.2.2.

Em vista da variabilidade comparativamente pequena dos valores de R_x e de R_S, a razão das médias $\overline{R}_x / \overline{R}_S$ e sua incerteza padrão $u(\overline{R}_x / \overline{R}_S)$ são, respectivamente, quase as mesmas que a razão média $\overline{R}$ e seu desvio padrão experimental $s(\overline{R})$, tais como listados na última coluna da tabela H.8 [ver H.2.4 e a equação (H.10)]. Entretanto, ao calcular a incerteza padrão $u(\overline{R}_x / \overline{R}_S)$, a correlação entre R_x e R_S, como representada pelo coeficiente de correlação $r(\overline{R}_x, \overline{R}_S)$, deve ser levada em conta, usando a equação (16), em 5.2.2. [Essa equação fornece, para a variância relativa estimada de $\overline{R}_x / \overline{R}_S$, os últimos três termos da equação (H.22b)].

Deve-se reconhecer que os respectivos desvios padrão experimentais de R_x e de R_S, $\sqrt{6}\, s(\overline{R}_x)$ e $\sqrt{6}\, s(\overline{R}_S)$ indicam uma variabilidade nessas grandezas, que é duas a três vezes maior do que a variabilidade deduzida pela estatística de Poisson do processo de contagem, sendo que a última é incluída na variabilidade observada de contagem e não precisa ser contabilizada separadamente.

H.4.3 Cálculo dos resultados finais

Para obter a concentração de atividade desconhecida A_x e sua incerteza padrão combinada $u_c(A_x)$, pela equação (H.20) são requeridas, A_S, m_x e m_S e suas incertezas padrão. Sendo dadas como:

A_S = 0,1368 Bq/g
$u(A_S)$ = 0,0018 Bq/g; $u(A_S)/A_S = 1{,}32 \times 10^{-2}$

m_S = 5,0192 g
$u(m_S)$ = 0,005 g; $u(m_S)/m_S = 0{,}10 \times 10^{-2}$

Tabela H.8 - Cálculo das taxas de contagem corrigidas para contagem de fundo e para decaimento

Ciclo k	R_x (min^{-1})	R_s (min^{-1})	t_x - t_s (min)	$R = R_x / R_s$
1	652,46	194,65	123,63	3,3520
2	666,48	208,58	123,13	3,1953
3	665,80	211,08	123,12	3,1543
4	655,68	214,17	123,11	3,0615
5	651,87	213,92	123,12	3,0473
6	623,31	194,13	123,11	3,2107
	$\overline{R}_x = 652{,}60$	$\overline{R}_S = 206{,}09$		$\overline{R} = 3{,}170$
	$s(\overline{R}_x) = 6{,}42$	$s(\overline{R}_S) = 3{,}79$		$s(\overline{R}) = 0{,}046$
	$s(\overline{R}_x) / \overline{R}_x = 0{,}98 \times 10^{-2}$	$s(\overline{R}_S) / \overline{R}_S = 1{,}84 \times 10^{-2}$		$s(\overline{R}) / \overline{R} = 1{,}44 \times 10^{-2}$
	$\overline{R}_x / \overline{R}_S = 3{,}167$			
	$u(\overline{R}_x / \overline{R}_S) = 0{,}045$			
	$u(\overline{R}_x / \overline{R}_S) / (\overline{R}_x / \overline{R}_S) = 1{,}42 \times 10^{-2}$			
Coeficiente de correlação $r(\overline{R}_x, \overline{R}_S) = 0{,}646$				

$m_x = 5{,}0571$ g
$u(m_x) = 0{,}0010$ g; $u(m_x)/m_x = 0{,}02 \times 10^{-2}$

Outras possíveis fontes de incerteza são avaliadas como sendo desprezíveis:

- incertezas padrão dos tempos de decaimento, $u(t_{S,k})$ e $u(t_{x,k})$;
- incerteza padrão da constante de decaimento do ^{222}Rn, $u(\lambda) = 1 \times 10^{-7}$ min^{-1}. (A grandeza significativa é o fator de decaimento $\exp[\lambda(t_x - t_S)]$, que varia de 1,015 63, para ciclos $k = 4$ e $k = 6$ até 1,015 70, para o ciclo $k = 1$. A incerteza padrão desses valores é $u = 1{,}2 \times 10^{-5}$);
- incerteza associada com a possível dependência da eficiência de detecção do contador de cintilação da fonte utilizada (padrão, amostra branca e amostra);
- incerteza da correção para o tempo morto do contador e da correção para a dependência da eficiência de contagem do nível de atividade.

H.4.3.1 Resultados: enfoque 1

Como indicado anteriormente, A_x e $u_c(A_x)$ podem ser obtidos de dois modos diferentes a partir da equação (H.20). No primeiro enfoque, A_x é calculado, usando as médias aritméticas $\overline{R}_x$ e $\overline{R}_S$, o que leva a:

$$A_x = A_S \frac{m_S}{m_x} \frac{\overline{R}_x}{\overline{R}_S} = 0{,}4300 \text{ Bq/g} \tag{H.22a}$$

A aplicação da equação (16), em 5.2.2, a esta expressão resulta para a variância combinada $u_c^2(A_x)$:

$$\frac{u_c^2(A_x)}{A_x^2} = \frac{u^2(A_S)}{A_S^2} + \frac{u^2(m_S)}{m_S^2} + \frac{u^2(m_x)}{m_x^2} + \frac{u^2(\overline{R}_x)}{\overline{R}_x^2} + \frac{u^2(\overline{R}_S)}{\overline{R}_S^2} - 2\, r(\overline{R}_x, \overline{R}_S) \frac{u(\overline{R}_x)\, u(\overline{R}_S)}{\overline{R}_x\, \overline{R}_S} \tag{H.22b}$$

onde, como observado em H.4.2, os últimos três termos fornecem $u^2(\overline{R}_x / \overline{R}_S) / (\overline{R}_x / \overline{R}_S)^2$, que é a variância relativa estimada de $\overline{R}_x / \overline{R}_S$. Consistente com a discussão de H.2.4, os resultados na Tabela H.8 mostram que $\overline{R}$ não é exatamente igual a $\overline{R}_x / \overline{R}_S$; e que a incerteza padrão $u(\overline{R}_x / \overline{R}_S)$ de $\overline{R}_x / \overline{R}_S$ não é exatamente igual à incerteza padrão $s(\overline{R})$ de $\overline{R}$.

A substituição dos valores das grandezas relevantes nas equações (H.22a) e (H.22b) fornece:

$$u_c(A_x)/A_x = 1{,}93 \times 10^{-2}$$

$$u_c(A_x) = 0{,}0083 \text{ Bq/g}$$

O resultado da medição pode, então, ser declarado como:

A_x = 0,4300 Bq/g, com uma incerteza padrão combinada de u_c = 0,0083 Bq/g.

H.4.3.2 Resultados: enfoque 2

No segundo enfoque, que evita a correlação entre $\overline{R}_x$ e $\overline{R}_S$, A_x é calculada usando a média aritmética $\overline{R}$. Assim:

$$A_x = A_s\,(m_s\,/\,m_x)\,\overline{R} = 0{,}4304\ \text{Bq/g} \qquad \text{(H.23a)}$$

A expressão para $u_c^2\,(A_x)$ é, simplesmente:

$$\frac{u_c^2\,(A_x)}{A_x^2} = \frac{u^2\,(A_S)}{A_S^2} + \frac{u^2\,(m_S)}{m_S^2} + \frac{u^2\,(m_x)}{m_x^2} + \frac{u^2\,(\overline{R})}{\overline{R}^2} \qquad \text{(H.23b)}$$

que fornece:

$$\frac{u_c(A_x)}{A_x} = 1{,}95 \times 10^{-2}$$

$$u_c\,(A_x) = 0{,}0084\ \text{Bq/g}$$

O resultado da medição pode, então, ser declarado como:

A_x = 0,4304 Bq/g, com uma incerteza padrão combinada de u_c = 0,0084 Bq/g.

Os graus de liberdade efetivos de u_c podem ser avaliados, usando-se a fórmula Welch-Satterthwaite, como ilustrado em H.1.6.

Como em H.2, dos dois resultados, prefere-se o segundo, porque ele evita a aproximação da média de uma razão de duas grandezas pela razão das médias das duas grandezas; e ele reflete melhor o procedimento de medição utilizado - os dados foram, de fato, coletados em ciclos separados.

Todavia, a diferença entre os valores de A_x, resultantes dos dois enfoques, é claramente pequena comparada com a incerteza padrão atribuída a cada um, e a diferença entre as duas incertezas padrão é totalmente desprezível. Tal concordância entre os resultados demonstra que os dois enfoques são equivalentes quando as correlações observadas são apropriadamente incluídas.

H.5 Análise de variância

Este exemplo fornece uma breve introdução aos métodos de análise de variância (ANOVA). Estas técnicas estatísticas são utilizadas para identificar e quantificar *efeitos aleatórios* individuais em uma medição, de modo que possam ser apropriadamente levados em conta quando se avalia a incerteza do resultado da medição. Embora os métodos ANOVA sejam aplicáveis a uma ampla faixa de medições, por exemplo, a calibração de padrões de referência, tais como os padrões de tensão Zener e padrões de massa, e a certificação de materiais de referência, os métodos ANOVA por si só não podem identificar efeitos sistemáticos que possam estar presentes.

Existem muitos modelos diferentes incluídos sob o nome geral de ANOVA. Por causa da sua importância, o modelo específico discutido nesse exemplo é o arranjo aninhado balanceado[1]. A ilustração numérica desse modelo envolve a calibração de um padrão de tensão Zener; a análise deve ser relevante a uma variedade de situações práticas de medição.

Métodos ANOVA são de importância especial na certificação de materiais de referência (MRs), por meio de ensaios interlaboratoriais, um tópico abrangido minuciosamente no Guia ISO 35 [19] (ver H.5.3.2 para uma breve descrição da certificação de MRs). Como muito do material contido no Guia ISO 35 é, de fato, largamente aplicável, esta publicação pode ser consultada para detalhes adicionais relativos à ANOVA, incluindo arranjos aninhados não balanceados. As referências [15] e [20] podem ser igualmente consultadas.

H.5.1 O problema de medição

Considere um padrão de tensão Zener de 10 V nominais calibrado contra uma referência de tensão estável, por um período de duas semanas. Em cada um dos J dias durante o período, k observações repetidas independentes da diferença de potencial V_s do padrão foram realizadas. Se V_{jk} denota a k-ésima observação V_s (k = 1, 2, ..., K) no j-ésimo dia (j = 1, 2, ..., J), a melhor estimativa da diferença de potencial do padrão é a média aritmética $\overline{V}$ das JK observações [ver equação (3), em 4.2.1]:

$$V_s = \frac{1}{JK} \sum_{j=1}^{J} \sum_{k=1}^{K} V_{jk} = \overline{V} \qquad \text{(H.24a)}$$

O desvio padrão experimental da média $s(\overline{V})$, que é uma medida da incerteza de $\overline{V}$, como uma estimativa da diferença de potencial do padrão, é obtido de [ver equação (5), em 4.2.3.]:

$$s^2(\overline{V}) = \frac{1}{JK(JK-1)} \sum_{j=1}^{J} \sum_{k=1}^{K} (V_{jk} - \overline{V})^2 \qquad \text{(H.24b)}$$

NOTA - Supõe-se ao longo deste exemplo que todas as correções aplicadas às observações, para compensar efeitos sistemáticos, tenham incertezas desprezíveis, ou que suas incertezas sejam tais que possam ser levadas em conta no final da análise. Uma correção nesta última categoria, e uma que pode por si mesma ser aplicada à média das observações no final da análise, é a diferença entre o valor certificado (suposto de ter uma dada incerteza) e o valor de trabalho da tensão de referência estável contra o qual o padrão de tensão Zener é calibrado. Assim, a estimativa da diferença de potencial do padrão, obtida estatisticamente a partir das observações, não é, necessariamente, o resultado final da medição; e o desvio padrão experimental da estimativa não é, necessariamente, a incerteza padrão combinada do resultado final.

O desvio padrão experimental da média $s(\overline{V})$, como obtido da equação (H.24b), é uma medida apropriada da incerteza de $\overline{V}$ somente se a variabilidade das observações dia a dia for a mesma que a variabilidade das observações realizadas em um único dia. Se existir evidência de que a variabilidade entre dias (denominada variabilidade entre-dias) seja significativamente maior do que se possa esperar da variabilidade em um mesmo dia (denominada variabilidade intra-dia), a utilização dessa expressão poderia levar a uma declaração consideravelmente incompleta da incerteza de $\overline{V}$.

Assim, duas questões surgem: como se deve decidir se a variabilidade entre dias (caracterizada por um componente entre-dias da variância) é significante em comparação à variabilidade em um mesmo dia (caracterizada por um componente intra-dia da variância), e, se isso ocorrer, como se deve avaliar a incerteza da média?

H.5.2 Um exemplo numérico

H.5.2.1 Os dados que permitem tratar as questões acima são fornecidos na tabela H.9, onde:

J = 10 é o número de dias nos quais as observações da diferença de potencial foram realizadas;

1 NT: Essa expressão corresponde, na versão original, a “balanced nested design”.

Tabela H.9 - Resumo dos dados de calibração do padrão de tensão obtidos em $J = 10$ dias, com cada média diária $\overline{V}_j$ e desvio padrão experimental $s(V_{jk})$ baseados em $K = 5$ observações repetidas e independentes

Grandeza \ Dia, j	1	2	3	4	5
$\overline{V}_j$ /V	10,000 172	10,000 116	10,000 013	10,000 144	10,000 106
$s(V_{jk})$ /μV	60	77	111	101	67
Grandeza \ Dia, j	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
$\overline{V}_j$ / V	10,000 031	10,000 060	10,000 125	10,000 163	10,000 041
$s(V_{jk})$ /μV	93	80	73	88	86
$\overline{V} = 10{,}000\ 097$ V; $s_a^2 = Ks^2(\overline{V}_j) = 5(57\ \mu\text{V})^2 = (128\ \mu\text{V})^2$			$s(\overline{V}_j) = 57\ \mu$V; $s_b^2 = \overline{s^2(V_{jk})} = (85\ \mu\text{V})^2$		

$K = 5$ é o número de observações da diferença de potencial realizadas em cada dia;

$$\overline{V}_j = \frac{1}{K}\sum_{k=1}^{K} V_{jk} \qquad \text{(H.25a)}$$

é a média aritmética das $K = 5$ observações da diferença de potencial realizadas no j-ésimo dia (existem $J = 10$ médias diárias);

$$\overline{V} = \frac{1}{J}\sum_{j=1}^{J}\overline{V}_j = \frac{1}{JK}\sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{K} V_{jk} \qquad \text{(H.25b)}$$

é a média aritmética das $J = 10$ médias diárias e, conseqüentemente, é a média global das $JK = 50$ observações;

$$s^2(V_{jk}) = \frac{1}{K-1}\sum_{k=1}^{K}(V_{jk} - \overline{V}_j)^2 \qquad \text{(H.25c)}$$

é a variância experimental das $K = 5$ observações realizadas no j-ésimo dia (existem $J = 10$ estimativas da variância);

$$s^2(\overline{V}_j) = \frac{1}{J-1}\sum_{j=1}^{J}(\overline{V}_j - \overline{V})^2 \qquad \text{(H.25d)}$$

é a variância experimental das J = 10 médias diárias (existe somente uma estimativa da variância).

H.5.2.2 A consistência da variabilidade intra-dia e a variabilidade entre-dias das observações pode ser investigada, comparando-se duas estimativas independentes de σ_W^2 , a componente intra-dia da variância (isto é, a variância das observações realizadas no mesmo dia).

A primeira estimativa de σ_W^2, denotada por s_a^2, é obtida da variação observada das médias diárias $\overline{V}_j$. Como $\overline{V}_j$ é a média de K observações, sua variância estimada $s^2(\overline{V}_j)$, sob a hipótese de que o componente entre-dias da variância seja zero, estima σ_W^2 /K. Segue, então, da equação (H.25d) que:

$$s_a^2 = K s^2(\overline{V}_j) \qquad \text{(H.26a)}$$

$$= \frac{K}{J-1}\sum_{j=1}^{J}(\overline{V}_j - \overline{V})^2$$

que é uma estimativa de σ_W^2, tendo $\nu_a = J - 1 = 9$ graus de liberdade.

A segunda estimativa de σ_W^2, denotada por s_b^2, é a estimativa agrupada da variância obtida de $J = 10$ valores individuais de $s^2(V_{jk})$, utilizando-se a equação da nota H.3.6, na qual os dez valores individuais são calculados a partir da equação (H.25c). Em razão de os graus de liberdade de cada um destes valores serem $\nu_i = k - 1$, a expressão resultante para s_b^2 é, simplesmente, sua média. Assim:

$$s_b^2 = \overline{s^2(V_{jk})} = \frac{1}{J}\sum_{j=1}^{J} s^2(V_{jk})$$

$$= \frac{1}{J\,(K-1)} \sum_{j=1}^{J} \sum_{k=1}^{K} (V_{jk} - \overline{V}_j)^2 \qquad \text{(H.26b)}$$

que é uma estimativa de σ_W^2, tendo $v_b = J\,(K-1) = 40$ graus de liberdade.

As estimativas de σ_W^2, dadas pelas equações (H.26a) e (H.26b), são $s_a^2 = (128\,\mu\,V)^2$ e $s_b^2 = (85\,\mu\,V)^2$, respectivamente (ver tabela H.9). Como a estimativa s_a^2 é baseada na variabilidade das médias diárias enquanto a estimativa s_b^2 é baseada na variabilidade de observações diárias, sua diferença indica a possível presença de um efeito que varia de um dia para outro, mas que permanece relativamente constante quando as observações são realizadas em um único dia. O teste-*F* é utilizado para verificar essa possibilidade e, conseqüentemente, a suposição de que o componente entre-dias da variância seja zero.

H.5.2.3 A distribuição-*F* é a distribuição de probabilidade da razão $F\,(v_a\,,\,v_b) = s_a^2\,(v_a)\,/\,s_b^2\,(v_b)$ de duas estimativas independentes, $s_a^2\,(v_a)$ e $s_b^2\,(v_b)$, da variância σ^2 de uma variável aleatória normalmente distribuída [15]. Os parâmetros v_a e v_b são os respectivos graus de liberdade das duas estimativas e $0 \le F\,(v_a\,,\,v_b) < \infty$. Valores de *F* são tabulados para diferentes valores de v_a e v_b e vários quantis da distribuição-*F*. Um valor de $F(v_a\,,\,v_b) > F_{0,95}$ ou $F(v_a\,,\,v_b) > F_{0,975}$ (o valor crítico) é usualmente interpretado como indicação de que $s_a^2\,(v_a)$ é maior do que $s_b^2\,(v_b)$, por uma quantidade estatisticamente significativa, e que a probabilidade de um valor de *F* tão grande quanto aquele observado, se as duas estimativas forem estimativas da mesma variância, é menor do que 0,05 ou 0,025, respectivamente. (Outros valores críticos podem também ser escolhidos, tal como $F_{0,99}$).

H.5.2.4 A aplicação do teste-*F* ao presente exemplo númerico fornece:

$$F\,(v_a\,,\,v_b) = \frac{s_a^2}{s_b^2} = \frac{K s^2\,(\overline{V_j})}{\overline{s^2\,(V_{jk})}} \qquad \text{(H.27)}$$

$$= \frac{5\,(57\,\mu\,V)^2}{(85\,\mu\,V)^2} = 2{,}25$$

com $\nu_a = J-1 = 9$ graus de liberdade no numerador e $\nu_b = J\,(K-1) = 40$ graus de liberdade no denominador. Como $F_{0,95}\,(9{,}40) = 2{,}12$ e $F_{0,975}\,(9{,}40) = 2{,}45$, conclui-se que existe um efeito entre-dias estatisticamente significativo no nível de 5 por cento de significância, mas não no nível de 2,5 por cento.

H.5.2.5 Se a existência de um efeito entre-dias é rejeitada porque a diferença entre s_a^2 e s_b^2 não é vista como estatisticamente significativa (uma decisão imprudente, pois poderia levar a uma subestimação da incerteza), a variância estimada $s^2\,(\overline{V})$ de $\overline{V}$ deve ser calculada da equação (H.24b). Esta relação é equivalente a agrupar as estimativas s_a^2 e s_b^2 (isto é, tomando-se a média ponderada de s_a^2 e s_b^2, cada uma ponderada por seus respectivos graus de liberdade ν_a e ν_b - ver nota de H.3.6) para se obter a melhor estimativa da variância das observações; e dividindo essa estimativa por *JK* (o número de observações) para obter a melhor estimativa $s^2\,(\overline{V})$ da variância da média das observações. Seguindo este procedimento, temos:

$$s^2\,(\overline{V}) = \frac{(J-1)\,s_a^2 + J\,(K-1)\,s_b^2}{JK\,(JK-1)} \qquad \text{(H.28a)}$$

$$= \frac{9\,(128\,\mu\,\text{V})^2 + 40\,(85\,\mu\,\text{V})^2}{(10)\,(5)\,(49)}$$

$$= (13\,\mu\,\text{V})^2\,,\ \text{ou}\ s\,(\overline{V}) = 13\,\mu\,\text{V} \qquad \text{(H.28b)}$$

com $s\,(\overline{V})$ tendo $JK - 1 = 49$ graus de liberdade.

Se supomos que todas as correções para os efeitos sistemáticos já tenham sido levadas em conta e todos os outros componentes da incerteza são não-significativos, então o resultado da calibração pode ser declarado como $V_s = \overline{V} = 10{,}000\ 0097$ V (ver tabela H.9), com uma incerteza padrão combinada de $s\,(\overline{V}) = u_c = 13\,\mu$ V, e com u_c tendo 49 graus de liberdade.

NOTAS

1. Na prática, haveria, muito provavelmente, componentes adicionais de incerteza que seriam significativos e, portanto, deveriam ser combinados com o componente de incerteza obtido estatisticamente a partir das observações (ver nota de H.5.1).

2. A equação (H.28a), para $s^2\,(\overline{V})$, pode ser mostrada como sendo equivalente à equação (H.24b), escrevendo-se a dupla soma, denotada por *S*, na equação como:

$$S = \sum_{j=1}^{J} \sum_{k=1}^{K} \left[(V_{jk} - \overline{V}_j) + (\overline{V}_j - \overline{V})\right]^2$$

$$= (J-1)\,s_a^2 + J\,(K-1)\,s_b^2$$

H.5.2.6 Se a existência de um efeito entre-dias é aceita (uma decisão prudente porque evita uma possível subestimação da incerteza) e supõe-se que seja aleatória, então a variância $s^2(\overline{V}_j)$, calculada a partir das J=10 médias diárias, de acordo com a equação (H.25d), não estima σ_W^2 / K, como postulado em H.5.2.2, mas $\sigma_W^2 / K + \sigma_B^2$, onde σ_B^2 é o componente aleatório entre-dias da variância. Isso implica que:

$$s^2(\overline{V}_j) = s_W^2 / K + s_B^2 \tag{H.29}$$

onde s_W^2 estima σ_W^2 e s_B^2 estima σ_B^2. Como $\overline{s^2(V_{jk})}$ calculado a partir da equação (H.26b) depende somente da variabilidade intra-dia das observações, pode-se tomar $s_W^2 = \overline{s^2(V_{jk})}$. Assim, a razão $Ks^2(\overline{V}_j) / \overline{s^2(V_{jk})}$ utilizada para o teste-F, em H.5.2.4, se torna:

$$F = \{ks^2 \frac{(\overline{V}_j)}{\overline{s^2(V_{jk})}} = \frac{s_W^2 + Ks_B^2}{s_W^2} \tag{H.30}$$

$$= \frac{5(57\mu V)^2}{(85\mu V)^2} = 2{,}25$$

o que leva a:

$$s_B^2 = \frac{K\, s^2(\overline{V}_j) - \overline{s^2(V_{jk})}}{K} \tag{H.31a}$$

$$= (43\,\mu\,V)^2, \text{ ou } s_B = 43\,\mu\,V$$

$$s_W^2 = \overline{s^2(V_{jk})} = (85\,\mu\,V)^2, \text{ ou } s_W = 85\,\mu\,V \tag{H.31b}$$

A variância estimada de $\overline{V}$ é obtida de $s^2(\overline{V}_j)$, equação (H.25d), porque $s^2(\overline{V}_j)$ reflete, apropriadamente, ambos os componentes aleatórios intra e entre-dias da variância [ver equação (H.29)]. Assim:

$$s_2(\overline{V}) = s^2(\overline{V}_j) / J \tag{H.32}$$

$$= (57\,\mu\,V)^2 / 10, \text{ ou } s(\overline{V}) = 18\,\mu\,V$$

com $s(\overline{V})$ tendo J - 1 = 9 graus de liberdade.

Os graus de liberdade de s_W^2 (e, portanto, s_W) são J (K - 1) = 40 [ver equação (H.26b)]. Os graus de liberdade de s_B^2(e, portanto, s_B) são os graus de liberdade efetivos da diferença $s_B^2 = s^2(\overline{V}_j) - \overline{s^2(V_{jk})} / K$ [equação (H.31a)], mas sua estimativa é problemática.

H.5.2.7 A melhor estimativa da diferença de potencial do padrão de tensão é, portanto, $V_s = \overline{V} = 10{,}000\ 097$ V, com $s(\overline{V}) = u_c = 18\,\mu$V, como dado pela equação (H.32). Este valor de u_c e seus 9 graus de liberdade devem ser comparados com $u_c = 13\,\mu$V e seus 49 graus de liberdade, o resultado obtido em H.5.2.5 [equação (H.28b)], quando a existência de um efeito inter- dia foi rejeitada.

Em uma medida real, um efeito entre-dias aparente deve ser mais investigado, se possível, a fim de se determinar sua causa e verificar se um efeito sistemático está presente, o que impediria o uso de métodos ANOVA. Como apontado no início deste exemplo, técnicas ANOVA são projetadas para identificar e avaliar componentes de incerteza que surgem de efeitos aleatórios; elas não fornecem informações sobre os componentes que surgem de efeitos sistemáticos.

H.5.3 O papel de ANOVA na medição

H.5.3.1 Este exemplo do padrão de tensão ilustra o que é geralmente chamado de arranjo aninhado balanceado de um estágio. É um arranjo aninhado de um estágio porque existe um nível de "aninhamento" das observações, com um fator, o dia em que as observações foram relizadas, sendo variado na medição. É balanceado (ou equilibrado), pois o mesmo número de observações é realizado a cada dia. A análise apresentada no exemplo pode ser utilizada para determinar se existe um "efeito de operador", um "efeito de instrumento", um "efeito laboratorial", um "efeito amostral", ou mesmo um "efeito metodológico" em uma determinada medição. Assim, no exemplo acima, pode-se imaginar a substituição das observações feitas em J dias diferentes por observações feitas no mesmo dia, mas por J operadores diferentes; a variância torna-se, então, um componente entre-dias da variância associado a diferentes operadores.

H.5.3.2 Como observado em H.5, métodos ANOVA são largamente utilizados na certificação de materiais de referência (MRs) por meio de ensaios inter-laboratoriais. Tal certificação, usualmente, envolve um número de laboratórios independentes, igualmente competentes, medindo amostras de um material, para a propriedade para a qual o material deverá ser certificado. Geralmente se supõe que as diferenças entre resultados individuais, tanto intra como inter-laboratórios, são de natureza estatística, independente de quais sejam as causas. A média de cada laboratório é considerada como uma estimativa não-tendenciosa da propriedade do material, e, usualmente, supõe-se a média não ponderada das médias dos laboratórios como sendo a melhor estimativa dessa propriedade.

Uma certificação de MR pode envolver I diferentes laboratórios, cada um dos quais medindo a propriedade requerida de J diferentes amostras de material, com cada medição de uma amostra consistindo de K observações repetidas e independentes. Assim, o número total de observações é IJK, e o número total de amostras é IJ. Este é um exemplo de um arranjo aninhado balanceado de dois estágios, análogo ao exemplo de um estágio do padrão de tensão dado em H.5. Nesse caso, há dois níveis de “aninhamento” das observações, com dois fatores diferentes, amostra e laboratório, sendo variados na medição. Esse arranjo é balanceado porque cada amostra é observada o mesmo número de vezes (K) em cada laboratório e cada laboratório mede o mesmo número de amostras (J). Seguindo-se a analogia com o exemplo do padrão de tensão, no caso do material de referência, o propósito da análise dos dados é investigar a possível existência de um efeito interamostras e de um efeito inter-laboratórios, e de determinar a incerteza apropriada a ser atribuída à melhor estimativa do valor da propriedade a ser certificada. Mantendo-se o desenvolvimento do parágrafo anterior, supõe-se que esta estimativa seja a média das I médias dos laboratórios, que também é a média das IJK observações.

H.5.3.3 A importância de se variar as grandezas de entrada das quais depende o resultado da medição, de forma que sua incerteza seja baseada nos dados observados avaliados estatisticamente, é ressaltada em 3.4.2. Os arranjos aninhados e a análise dos dados obtidos pela aplicação de métodos ANOVA podem ser utilizados com sucesso em muitas situações de medição encontradas na prática.

Não obstante, como indicado em 3.4.1, variar todas as grandezas de entrada é raramente possível devido à limitação de tempo e de recursos; na melhor das hipóteses, na maioria das situações práticas de medição, é possível somente avaliar alguns poucos componentes de incerteza, utilizando os métodos ANOVA. Como ressaltado em 4.3.1, muitos componentes devem ser avaliados por julgamento científico, utilizando toda a informação disponível sobre a possível variabilidade das grandezas de entrada em questão; em muitos casos, um componente de incerteza, tal como o que surge de um efeito interamostra, um efeito inter-laboratorial, um efeito inter-instrumentos ou um efeito interoperador, não pode ser avaliado pela análise estatística de uma série de observações, mas deve ser avaliado a partir do conjunto de informações disponíveis.

H.6 Medições numa escala de referência: dureza

Dureza é um exemplo de um conceito físico que não pode ser quantificado sem referência a um método de medição; não tem unidade que seja independente de tal método. A grandeza "dureza" é diferente das grandezas mensuráveis clássicas, pois não pode entrar em equações algébricas para definir outras grandezas mensuráveis (embora, às vezes, seja usada em equações empíricas que relacionam a dureza a outra propriedade para uma categoria de materiais). Sua magnitude é determinada por uma medição convencional, a de uma dimensão linear de uma impressão em um bloco do material de interesse, ou *bloco de amostra*. A medição é realizada de acordo com uma norma escrita, que inclui uma descrição do "penetrador", a construção da máquina com a qual se aplica o penetrador, e a maneira pela qual a máquina deverá ser operada. Existe mais de uma norma escrita, portanto existe mais de uma escala de dureza.

A dureza relatada é uma função (dependendo da escala) da dimensão linear que é medida. No exemplo fornecido neste item, ela é uma função linear da média aritmética ou média das profundidades de cinco penetrações repetidas, mas, para algumas outras escalas, a função é não-linear.

As realizações da máquina padrão são conservadas como padrões nacionais (não há realização de padrão internacional); uma comparação entre uma máquina em particular e a *máquina padrão nacional* é feita utilizando-se um *bloco padrão de transferência*.

H.6.1 O problema da medição

Neste exemplo, a dureza de um bloco de amostra de material é determinada na escala "Rockwell C", usando uma máquina que foi calibrada comparativamente à máquina-padrão nacional. A unidade da escala de dureza Rockwell C é 0,002 mm, com a dureza nesta escala definida como 100 x (0,002 mm) menos a média das profundidades, medidas em mm, de cinco penetrações. O valor dessa grandeza dividida pela unidade da escala Rockwell, de 0,002 mm, é chamada, de "índice de dureza HRC". Neste exemplo, a grandeza é chamada simplesmente, de "dureza", símbolo $h_{\text{Rockwell C}}$, e o valor numérico da dureza expressa em unidades Rockwell de comprimento é chamada de "índice de dureza", com símbolo $H_{\text{Rockwell C}}$.

H.6.2 Modelo matemático

À media das profundidades das penetrações, realizadas no bloco amostra pela máquina utilizada para determinar sua dureza, ou *máquina de calibração*, devem ser adicionadas correções para determinar a média das profundidades das penetrações que teriam sido obtidas no mesmo bloco pela máquina padrão nacional. Assim:

$$\begin{aligned} h_{\text{Rockwell C}} &= f(\bar{d}, \Delta_c, \Delta_b, \Delta_S) \\ &= 100(0{,}002\ \text{mm}) - \bar{d} \\ &\quad - \Delta_c - \Delta_b - \Delta_S \end{aligned} \tag{H.33a}$$

$$H_{\text{Rockwell C}} = h_{\text{Rockwell C}} / (0{,}002\ \text{mm}) \tag{H.33b}$$

onde:

$\bar{d}$ é a média das profundidades de cinco penetrações realizadas pela máquina de calibração no bloco amostra;

Δ_c é a correção obtida de uma comparação da máquina de calibração com a máquina padrão nacional, utilizando um bloco padrão de transferência, igual à média das profundidades de 5*m* penetrações realizadas pela máquina padrão nacional neste bloco, menos a média das profundidades de 5*n* penetrações realizadas no mesmo bloco pela máquina de calibração;

Δ_b é a diferença em dureza (expressa como uma diferença da profundidade média de penetração) entre as duas partes do bloco padrão de transferência utilizadas, respectivamente, para penetrações pelas duas máquinas e suposta como zero;

Δ_S é o erro devido à falta de repetitividade da máquina padrão nacional e à definição incompleta da grandeza dureza. Embora se deva supor Δ_S igual a zero, este tem uma incerteza padrão associada de $u(\Delta_S)$.

Uma vez que as derivadas parciais $\partial f / \partial \bar{d}$, $\partial f / \partial \Delta_c$, $\partial f / \partial \Delta_b$ e $\partial f / \partial \Delta_S$ da função da equação (H.33a) são todas iguais a -1, a incerteza padrão combinada $u_c^2(h)$ da dureza do bloco de amostra, tal como medida pela máquina de calibração, é dada, simplesmente, por:

$$u_c^2(h) = u^2(\bar{d}) + u^2(\Delta_c) + u^2(\Delta_b) + u^2(\Delta_S) \tag{H.34}$$

onde, por simplicidade de notação, $h \equiv h_{\text{Rockwell } C}$.

H.6.3 Variâncias contribuintes

H.6.3.1 Incerteza da profundidade média de penetração $\bar{d}$ do bloco de amostra, u($\bar{d}$)

Incerteza de observações repetidas. A repetição estrita de uma observação não é possível, porque uma nova impressão não pode ser feita no mesmo lugar de uma anterior. Uma vez que cada impressão deve ser feita em um lugar diferente, qualquer variação nos resultados inclui o efeito de variações de dureza entre lugares diferentes. Assim, $u(\bar{d})$, a incerteza padronizada da média das profundidades de cinco penetrações no bloco amostra pela máquina de calibração, é tomada como $s_p(d_k)/\sqrt{5}$, onde $s_p(d_k)$ é o desvio padrão experimental agrupado das profundidades de penetrações determinadas por medições "repetidas" em um bloco que se saiba ter uma dureza muito uniforme (ver 4.2.4).

Incerteza de indicação. Não obstante a correção para $\bar{d}$ devido ao mostrador da máquina de calibração, quando em zero, há ainda uma incerteza em $\bar{d}$ devido à incerteza da indicação de profundidade atribuível à resolução δ do mostrador, dada por $u^2(\delta) = \delta^2/12$ (ver F.2.2.1). A variância estimada de $\bar{d}$ é, portanto:

$$u^2(\bar{d}) = s^2(d_k)/5 + \delta^2/12 \qquad \text{(H.35)}$$

H.6.3.2 Incerteza da correção para a diferença entre as duas máquinas, *u*(Δ_c)

Como indicado em H.6.2, Δ_c é a correção para a diferença entre a máquina padrão nacional e a máquina de calibração. Essa correção pode ser expressa como $\Delta_c = z'_S - z'$, onde $z'_S = (\sum_{i=1}^{m} \bar{z}_{S,i})/m$ é a profundidade média de 5*m* penetrações realizadas pela máquina padrão nacional no bloco padrão de transferência; e $z' = (\sum_{i=1}^{n} \bar{z}_i)/n$ é a profundidade média de 5*n* penetrações realizadas no mesmo bloco pela máquina de calibração. Assim, supondo que, para a comparação, a incerteza devido à resolução do mostrador de cada máquina seja desprezível, a variância estimada de Δ_c é:

$$u^2(\Delta_c) = \frac{[s_{av}^2(\bar{z}_S)]}{m} + \frac{[s_{av}^2(\bar{z})]}{n} \qquad \text{(H.36)}$$

onde:

$$s_{av}^2(\bar{z}_s) = [\sum_{i=1}^{m} s^2(\bar{z}_{S,i})]/m$$

é a média das variâncias experimentais das médias de cada uma das *m* séries de penetrações $z_{s,ik}$ realizadas pela máquina padrão;

$s_{av}^2(\bar{z}) = [\sum_{i=1}^{n} s^2(\bar{z}_i)]/n$ é a média das variâncias experimentais das médias de cada uma das *n* séries de penetrações z_{ik} feitas pela máquina de calibração.

NOTA - As variâncias $s_{av}^2(\bar{z}_S)$ e $s_{av}^2(\bar{z})$ são estimativas agrupadas da variância - ver discussão da equação (H.26b) em H.5.2.2.

H.6.3.3 Incerteza da correção devido a variações na dureza do bloco padrão de transferência, *u*(Δ_b)

A Recomendação Internacional OIML R 12 *"Verification and Calibration of "Rockwell C" hardness standardized blocks" (Verificação e calibração de blocos padronizados de dureza "Rockwell C")* requer que as profundidades máxima e mínima de penetração obtidas de cinco medições no bloco padrão de transferência não sejam diferentes de mais de uma fração *x* da profundidade média de penetração, onde *x* é uma função do nível de dureza. Seja, portanto, *xz'* a diferença máxima em profundidades de penetração, abrangendo todo o bloco, onde *z'* é definido, em H.6.3.2, com *n*=5. Seja, também, a diferença máxima descrita por uma distribuição de probabilidade triangular em torno do valor médio *xz'*/2 (na suposição razoável de que os valores próximos ao valor central são mais prováveis do que os valores extremos - ver 4.3.9). Então, na equação (9b) em 4.3.9, *a*=*xz'*/2, a variância estimada da correção para a profundidade média de penetração, devido às diferenças das durezas apresentadas para a máquina padrão e a máquina de calibração, respectivamente, é:

$$u^2(\Delta_b) = (xz')^2/24 \qquad \text{(H.37)}$$

Conforme indicado em H.6.2, supõe-se que a melhor estimativa de correção Δ_b seja zero.

H.6.3.4 Incerteza da máquina padrão nacional e a definição de dureza, *u*(Δ_S)

A incerteza da máquina padrão nacional, juntamente com a incerteza devido à definição incompleta da grandeza dureza, é relatada como um desvio padrão estimado $u(\Delta_s)$ (uma grandeza de dimensão *comprimentoH.6.4A incerteza padrã*

H.6.4 A incerteza padrão combinada, $u_c(h)$

Reunindo os termos individuais discutidos de H.6.3.1 a H.6.3.4 e substituindo-os na equação (H.34), chega-se a variância estimada da medição da dureza:

$$u_c^2(h) = \frac{s^2(d_k)}{5} + \frac{\delta^2}{12} + \frac{s_{av}^2(\bar{z}_S)}{m} + \frac{s_{av}^2(\bar{z})}{n} + \frac{(xz')^2}{24} + u^2(\Delta_S) \qquad \text{(H.38)}$$

e a incerteza padrão combinada é $u_c(h)$.

H.6.5 Exemplo numérico

Os dados para este exemplo estão resumidos na Tabela H.10.

A escala é Rockwell C, designada como HRC. A unidade de escala Rockwell é 0,002 mm, e, assim, na Tabela H.10 e no que se segue, fica entendido que (por exemplo) "36,0 unidade de escala Rockwell" significam 36,0 x (0,002 mm) = 0,072 mm, simplesmente uma maneira conveniente de expressar os dados e resultados.

Se os valores para as grandezas relevantes fornecidos na Tabela H.10 são substituídos na equação (H.38), obtêm-se as duas expressões seguintes:

$$u_c^2(h) = \left[\frac{0{,}45^2}{5} + \frac{0{,}1^2}{12} + \frac{0{,}10^2}{6} + \frac{0{,}11^2}{6} + \frac{(0{,}015 \times 36{,}0)^2}{24} + 0{,}5^2\right] \text{(unidade de escala Rockwell)}^2$$

$$= \mathit{0{,}307} \text{ (unidade de escala Rockwell)}^2$$

$$u_c(h) = 0{,}55 \text{ unidade de escala Rockwell} = 0{,}0011 \text{ mm}$$

onde, para fins de cálculo da incerteza, é adequado tomar

$z' = \bar{d}$ = 36,0 unidade de escala Rockwell.

Assim, $\Delta_c = 0$, supõe-se que a dureza do bloco de amostra, seja:

> $h_{\text{Rockwell C}} = 64{,}0$ unidade de escala Rockwell ou 0,1280 mm, com uma incerteza padrão combinada de u_c = 0,55 unidade de escala Rockwell ou 0,0011 mm.

O índice de dureza do bloco é $h_{\text{Rockwell C}}$ / (0,002 mm) = (0,1280 mm)/ (0,002 mm), ou:

> $H_{\text{Rockwell C}} = 64{,}0$ HRC, com uma incerteza padrão combinada de u_c =0,55 HRC.

Além do componente de incerteza devido à máquina padrão nacional e à definição de dureza, $u(\Delta_s)$=0,5 unidade de escala Rockwell; os componentes significativos de incerteza são aqueles da repetitividade da máquina, $s_p(d_k)/\sqrt{5}$ = 0,20 unidade de escala Rockwell; e a variação da dureza do bloco padrão de

Tabela H.10 - Resumo de dados para a determinação da dureza de um bloco de amostra na escala Rockwell C

Fonte de incerteza	Valor
Profundidade média $\bar{d}$ de 5 penetrações realizadas pela máquina de calibração no bloco de amostra: 0,072mm	36,0 unidade de escala Rockwell
Índice de dureza indicado no bloco de amostra a partir de 5 penetrações: $H_{\text{Rockwell C}}=h_{\text{Rockwell C}}$ /(0,002 mm) = [100(0,002 mm) - 0,072 mm] / (0,002 mm) (ver H.6.1)	64,0 HRC
Desvio padrão experimental agrupado $s_p(d_k)$ das profundidades de penterações realizadas pela máquina de calibração em um bloco tendo dureza uniforme	0,45 unidade de escala Rockwell
Resolução δ do mostrador da máquina de calibração	0,1 unidade de escala Rockwell
$s_{av}(\bar{z}_s)$, raiz quadrada da média das variâncias experimentais das médias de *m* séries de penetrações realizadas pela máquina padrão nacional, no bloco padrão de transferência	0,10 unidade de escala Rockwell, *m*=6
$s_{av}(\bar{z})$, raiz quadrada da média das variâncias experimentais das médias de *n* séries de penetrações realizadas pela máquina de calibração no bloco padrão de transferência	0,11 unidade de escala Rockwell, *n*=6
Variação fracional permitida *x* da profundidade de penetração no bloco padrão de transferência	1,5 x 10^{-2}
Incerteza padrão $u(\Delta_S)$ da máquina padrão nacional e definição de dureza	0,5 unidade de escala Rockwell

transferência, que é $(xz')^2/24$ = 0,11 unidade de escala Rockwell. Os graus de liberdade efetivos de u_c podem ser avaliados, usando-se a de fórmula Welch-Satterthwaite, como ilustrado em H.1.6.

Anexo J
Glossário dos principais símbolos

a Semi faixa ou meia-largura de uma distribuição retangular de valores possíveis da grandeza de entrada X_i: $a = (a_+ - a_-) / 2$

a_+ Limite superior da grandeza de entrada X_i

a_- Limite inferior da grandeza de entrada X_i

b_+ Limite superior do desvio da grandeza de entrada X_i de sua estimativa x_i: $b_+ = a_+ - x_i$

b_- Limite inferior do desvio da grandeza de entrada X_i de sua estimativa x_i: $b_- = x_i - a_-$

c_i Derivada parcial ou coeficiente de sensibilidade: $c_i \equiv \frac{\partial f}{\partial x_i}$

f Relação funcional entre o mensurando Y e as grandezas de entrada X_i das quais Y depende, e entre a estimativa de saída y e as estimativas de entrada x_i das quais y depende

$\frac{\partial f}{\partial x_i}$ Derivada parcial com respeito à grandeza de entrada X_i da relação funcional f entre o mensurando Y e as grandezas de entrada X_i das quais Y depende, avaliadas com estimativas x_i para os X_i: $\partial f / \partial x_i = \partial f / \partial X_i |_{x_1, x_2 \ldots x_N}$

k Fator de abrangência usado para calcular a incerteza expandida $U = ku_c(y)$ da estimativa de saída y a partir de sua incerteza padrão combinada $u_c(y)$, onde U define um intervalo $Y = y \pm U$, tendo um alto nível da confiança.

k_p Fator de abrangência usado para calcular a incerteza expandida $U_p = k_p u_c(y)$ da estimativa de saída y a partir de sua incerteza padrão combinada $u_c(y)$, onde U_p define um intervalo $Y = y \pm U_p$, tendo um alto nível da confiança especificado p

n Número de observações repetidas

N Número de grandezas de entrada X_i das quais depende o mensurando Y

p Probabilidade; nível da confiança: $0 \leq p \leq 1$

q Grandeza que varia aleatoriamente descrita por uma distribuição de probabilidade

$\overline{q}$ Média aritmética ou média de n observações repetidas independentes q_k da grandeza aleatoriamente, variável q; estimativa da esperança ou média μ_q da distribuição de probabilidade de q

q_k k-ésima observação repetida independente da grandeza aleatoriamente variável q.

$r(x_i, x_j)$ Coeficiente de correlação estimado associado às estimativas de entrada x_i e x_j que estimam as grandezas de entrada X_i e X_j: $r(x_i, x_j) = u(x_i, x_j) / u(x_i)\, u(x_j)$

$r(\overline{X}_i, \overline{X}_j)$ Coeficiente de correlação estimado das médias de entrada $\overline{X}_i$ e $\overline{X}_j$, determinado a partir de n pares independentes de observações simultâneas repetidas $X_{i,k}$ e $X_{j,k}$ de X_i e X_j: $r(\overline{X}_i, \overline{X}_j) = s(\overline{X}_i, \overline{X}_j) / s(\overline{X}_i)\, s(\overline{X}_j)$

$r(y_i, y_j)$ Coeficiente de correlação estimado associado às estimativas de saída y_i e y_j, quando dois ou mais mensurados ou grandezas de saída são determinados na mesma medição.

${s_p}^2$ Estimativa combinada ou agrupada da variância

s_p Desvio padrão experimental, agrupado igual à raiz quadrada positiva de ${s_p}^2$

$s^2(\overline{q})$ Variância experimental da média $\overline{q}$ e estimativa da variância σ^2/n de $\overline{q}$: $s^2(\overline{q}) = s^2(q_k)/n$; variância estimada obtida de uma avaliação do tipo A

$s(\overline{q})$ Desvio padrão experimental da média $\overline{q}$, igual à raiz quadrada positiva de $s^2(\overline{q})$; $s(\overline{q})$ é um estimador tendencioso de $\sigma(\overline{q})$ (ver nota de C.2.21); incerteza padrão obtida de uma avaliação do tipo A

$s^2(q_k)$ Variância experimental determinada por n observações repetidas independentes q_k de q; estimativa da variância σ^2 da distribuição de probabilidade de q

$s(q_k)$ Desvio padrão experimental, igual à raiz quadrada positiva de $s^2(q_k)$; $s(q_k)$ é um estimador tendencioso do desvio padrão σ da distribuição de probabilidade de q

$s^2(\overline{X}_i)$ Variância experimental da média de entrada $\overline{X}_i$, determinada por n observações repetidas independentes $X_{i,k}$ de X_i; variância estimada obtida de uma avaliação do tipo A

$s(\overline{X}_i)$ Desvio padrão experimental da média de entrada $\overline{X}_i$, igual à raiz quadrada positiva de $s^2(\overline{X}_i)$; incerteza padrão obtida de uma avaliação tipo A

$s(\overline{q}, \overline{r})$ Estimativa da covariância das médias $\overline{q}$ e $\overline{r}$ que estimam as esperanças μ_q e μ_r de duas grandezas aleatoriamente variáveis q e r, determinada a partir de n pares independentes de observações simultâneas repetidas q_k e r_k de q e r; covariância estimada obtida de uma avaliação do Tipo A

$s(\overline{X}_i, \overline{X}_j)$ Estimativa da covariância das médias de entrada, $\overline{X}_i$ e $\overline{X}_j$, determinada a partir de n pares independentes de observações simultâneas repetidas $X_{i,k}$ e $X_{j,k}$ de X_i e X_j; covariância estimada obtida de uma avaliação do Tipo A

$t_p(\nu)$ Fator-t da distribuição-t para ν graus de liberdade correspondendo a uma dada probabilidade p

$t_p(\nu_{\text{eff}})$ Fator-t da distribuição-t para ν_{eff} graus de liberdade correspondendo a uma dada probalidade p, usado para calcular a incerteza expandida U_p

$u^2(x_i)$ É uma variância estimada associada à estimativa de entrada x_i que estima a grandeza de entrada X_i

NOTA- Quando x_i é determinado pela média aritmética ou média de n observações repetidas independentes, $u^2(x_i) = s^2(\overline{X}_i)$ é a variância estimada obtida de uma avaliação do Tipo A

$u(x_i)$ Incerteza padrão da estimativa de entrada x_i que estima a grandeza de entrada X_i, igual à raiz quadrada positiva de $u^2(x_i)$

NOTA - Quando x_i é determinada pela média aritmética de n observações repetidas independentes, $u(x_i) = s(\overline{X}_i)$ é uma incerteza padrão obtida de uma avaliação do Tipo A

$u(x_i, x_j)$ Covariância estimada associada a duas estimativas de entrada x_i e x_j que estimam as grandezas de entrada X_i e X_j

NOTA - Quando x_i e x_j são determinadas por n pares independentes de observações simultâneas repetidas, $u(x_i, x_j) = s(\overline{X}_i, \overline{X}_j)$ é uma covariância estimada obtida de uma avaliação do Tipo A

$u_c^2(y)$ Variância combinada associada à estimativa de saída y

$u_c(y)$ Incerteza padrão combinada da estimativa de saída y, igual à raiz quadrada positiva de $u_c^2(y)$

$u_{cA}(y)$ Incerteza padrão combinada da estimativa de saída y, determinada a partir de incertezas padrão e covariâncias estimadas obtidas unicamente das avaliações do Tipo A

$u_{cB}(y)$ Incerteza padrão combinada da estimativa de saída y, determinada a partir de incertezas padrão e covariâncias obtidas unicamente das avaliações do Tipo B

$u_c(y_i)$ Incerteza padrão combinada da estimativa de saída y_i, quando dois ou mais mensurandos ou grandezas de saída são determinadas na mesma medição

$u_i^2(y)$ Componente da variância combinada $u_c^2(y)$, associada à estimativa de saída y gerado pela variância estimada $u^2(x_i)$ associada à estimativa de entrada x_i: $u_i^2(y) \equiv [c_i u(x_i)]^2$

$u_i(y)$ Componente de incerteza padrão combinada $u_c(y)$ da estimativa de saída y, gerado pela incerteza padrão da estimativa de entrada $x_i: u_i(y) \equiv |c_i| u(x_i)$

$u(y_i, y_j)$ Covariância estimada, associada às estimativas de saída y_i e y_j determinadas na mesma de medição

$u(x_i)/|x_i|$ Incerteza padrão relativa da estimativa de entrada x_i

$u_c(y)/|y|$ Incerteza padrão combinada relativa da estimativa de saída y

$[u(x_i)/x_i]^2$ Variância relativa estimada associada à estimativa de entrada x_i

$[u_c(y)/y]^2$ Variância combinada relativa associada à estimativa de saída y

$\dfrac{u(x_i, x_j)}{|x_i x_j|}$ Covariância relativa estimada associada às estimativas de entrada x_i e x_j

U Incerteza expandida da estimativa de saída y que define um intervalo $Y = y \pm U$, tendo um alto nível da confiança igual ao fator de abrangência k vezes a incerteza padrão combinada $u_c(y)$ de y: $U = ku_c(y)$

U_p Incerteza expandida da estimativa de saída y que define um intervalo $Y = y \pm U_p$, tendo um alto nível da confianca especificado p, igual ao fator de abrangência k_p vezes a incerteza padrão combinada $u_c(y)$ de y: $U_p = k_p u_c(y)$

x_i Estimativa da grandeza de entrada X_i

NOTA - Quando x_i é determinada pela média aritmética de n observações repetidas independentes, $x_i = \overline{X}_i$

X_i i-ésima grandeza de entrada da qual depende o mensurando Y

NOTA - X_i pode ser a grandeza física ou a variável aleatória (ver 4.1.1 nota 1)

$\overline{X}_i$ Estimativa do valor da grandeza de entrada X_i, igual à média aritmética de n observações repetidas independentes $X_{i,k}$ de X_i

$X_{i,k}$ k-ésima observação repetida independente de X_i

y Estimativa do mensurando Y; resultado de uma medição; estimativa de saída

y_i Estimativa do mensurando Y_i quando dois ou mais mensurados são determinados na mesma medição

Y Um mensurando

$\dfrac{\Delta u(x_i)}{u(x_i)}$ Incerteza relativa estimada da incerteza padrão $u(x_i)$ da estimativa de entrada x_i

μ_q Esperança ou média da distribuição de probabili-dade da grandeza aleatoriamente variável q

ν Graus de liberdade (geral)

ν_i Graus de liberdade, ou graus de liberdade efetivos, da incerteza padrão $u(x_i)$ da estimativa de entrada x_i

ν_{eff} Graus de liberdade efetivos de $u_c(y)$, usados para obter $t_p(\nu_{\mathrm{eff}})$ para calcular a incerteza expandida U_p

$\nu_{\mathrm{eff}A}$ Graus de liberdade efetivos de uma incerteza padrão combinada determinada, unicamente, a partir de avaliações do Tipo A

$\nu_{\mathrm{eff}B}$ Graus de liberdade efetivos de uma incerteza padrão combinada determinada unicamente, a partir de avaliações do Tipo B

σ^2 Variância de uma distribuição de probabilidades de (por exemplo) uma grandeza q aleatoriamente variável estimada por $s^2(q_k)$

σ Desvio padrão de uma distribuição de probabilidades, igual à raiz quadrada positiva de σ^2 ; $s(q_k)$ é um estimador tendencioso de σ

$\sigma^2(\overline{q})$ Variância de $\overline{q}$, igual a σ^2/n , estimada por $s^2(\overline{q}) = s^2(q_k)/n$

$\sigma(\overline{q})$ Desvio padrão de $\overline{q}$, igual à raiz quadrada positiva de $\sigma^2(\overline{q})$; $s(\overline{q})$ é um estimador tendencioso de $\sigma(\overline{q})$

$\sigma^2[s(\overline{q})]$ Variância do desvio padrão experimental $s(\overline{q})$ de $\overline{q}$

$\sigma[s(\overline{q})]$ Desvio padrão do desvio padrão experimental $s(\overline{q})$ de $\overline{q}$, igual à raiz quadrada positiva de $\sigma^2[s(\overline{q})]$

Anexo K
Bibliografia

[1] CIPM (1980), *BIPM Proc. - Verb. Com. Int. Poids et Mesures* **48**, C1 - C30 (emFrancês); BIPM (1980), Rapport BIPM - 80/3, *Report on the BIPM Enquiry on error statements,* Bur. Intl. Poids et Mesures (Sèvres, França) [emInglês].

[2] KAARLS, R. (1981), *BIPM Proc. - Verb. Com. Int. Poids et Mesures* **49**, A1 - A12 (em Francês); Giacomo, P. (1981), *Metrologia* **17**, 73-74 (em Inglês).

NOTA - A versão em inglês da Recomendação INC - 1 (1980) dada na Introdução deste *Guia* (ver 0.7) é aquela da versão final da Recomendação e é extraída do relatório interno do BIPM. É consistente com o texto autorizado em francês da Recomendação dada no *BIPM Proc. - Verb. Int. Poids et Mesures* **49**, e reproduzido em A.1, no Anexo A deste Guia. A tradução em inglês da Recomendação INC-1 (1980) dada na *Metrologia* **17** é aquela oriunda de um rascunho e difere levemente da tradução dada no relatório interno do BIPM e, portanto, do item 0.7.

[3] CIPM (1981), *BIPM Proc. - Verb. Com. Int. Poids et Mesures* **49**, 8-9, 26 (em Francês); Giacomo, P. (1982), *Metrologia* **18**, 43-44 (em Inglês)

[4] CIPM (1986), *BIPM Proc. - Verb. Com. Int. Poids et Mesures* **54**, 14, 35 (em francês); Giacomo, P. (1987), *Metrologia* **24**, 49-50 (em inglês).

[5] ISO 5725:1986, *Precision of test methods - Determination of repeatability in reproducibility for a standard test method by inter-laboratory tests*, International Organization for Standardization (Genebra, Suiça).

NOTA - Esta norma está sendo atualmente revisada. A revisão tem um novo título, “Accuracy (trueness and precision) of measurement methods and results”, e é composta de seis partes.

[6] ISO/IEC/OIML/BIPM (1993), VIM *Vocabulary of basic and general terms in metrology*, International Organization for Standardization (Genebra, Suiça).

Publicado conjuntamente pelo International Bureau of Weigths and Measures, International Eletrotechnical Commission, International Organization for Standardization e International Organization of Legal Metrology.

(INMETRO, 1995 - Portaria 029, de 10/03/95)

NOTAS

1. Este documento está correntemente sob revisão, com o patrocínio, inclusive da International Federation of Clinical Chemistry (IFCC)e da International Union of Pure and Applied Physics (IUPAP). As definições de termos dados no Anexo B são tiradas do texto revisto em língua inglesa do VIM, na sua forma final antes da publicação.

2. Esta norma internacional está sob revisão. As definições de termos dados no anexo C são tiradas da última versão de língua inglesa da revisão, isto é, ISO (1990) Draft International Standard ISO/DIS 3534-1, *Statistics - Vocabulary and Symbols - Part 1: Probability and general statistical terms*, tal como editado antes da publicação.

3. A norma brasileira correspondente NBR 10536 “Estatística Terminologia” (1988) também foi consultada pelos revisores de tradução, que optaram pelo texto mais próximo ao original deste *Guia*.

[7] ISO 3534-1:1993, *Statistics - Vocabulary and symbols - Part 1: Probability and general statistical terms*, International Organization for Standardization (Genebra, Suiça).

[8] FULLER, W.A. (1987), *Measurement error models*, John Wiley (Nova Iorque, NY).

[9] ALLAN, D.W. (1987), *IEEE Trans. Instrum. Meas.* **IM-36**, 646-654.

[10] DIETRICH, C.F. (1991), *Uncertainty, calibration and probability*, 2ª edição, Adam-Hilger (Bristol).

[11] MÜLLER, J.W. (1979), *Nucl. Instrum. Meth.* **163**, 241-251.

[12] MÜLLER, J.W. (1984), in *Precision Measurement and Fundamental Constants* II, Taylor, B.N. e Phillips, W.D. eds., Natl. Bur Stand. (US) Spec. Publ. 617, US GPO (Washington, D.C.) 375-381.

[13] JEFFREYS,H. (1983), *Theory of probability*, 3ª edição, Oxford University Press (Oxford).

[14] PRESS, S.J. (1989), *Bayesian statistics: principles, models, and applications*, John Wiley (Nova Iorque, N.Y.).

[15] Box, G. E. P., HUNTER, W. G.,e HUNTER, J. S. (1978), *Statistics for experimenters*, John Wiley (Nova Iorque, N. Y.).

[16] WELCH, B.L. (1936), *J. R. Stat. Soc. Suppl.* **3**, 29-48; (1938) *Biometrika* **29**, 350-362; (1947) ibid.**34**, 28-35.

[17] FAIRFIELD-SMITH,H. (1936), *J. Counc. Sci. Indust. Res. (Australia)* **9** (3), 211.

[18] SATTERTHWAITE, F.E. (1941), *Psychometrika* **6**, 309-316; (1946) *Biometrics Bull*. **2**(6), 110-114.

[19] ISO Guide 35: 1989, *Certification of reference materials - General and statistical principles*, 2ª edição. International Organization for Standardization (Ge-nebra, Suiça).

[20] BARKER, T. B. (1985), *Quality by experimental design*, Marcel Dekker (Nova Iorque, N. Y.)

Índice Alfabético Bilíngüe
Inglês – Português

A

accuracy of measurement....................3.1.3, 3.4.1, B.2.14
exatidão de medição

analysis of variance.......................................*veja* ANOVA
análise de variância

ANOVA..4.2.8, H.5 *et seqq.*
ANOVA

arithmetic mean............................4.1.4 nota, 4.2.1, C.2.19
média aritmética

average...*veja* arithmetic mean
média

B

bias..3.2.3 nota
tendência

BIPM...iii, 0.5, 7.1.1, A.1, A.2
BIPM

Blunders...3.4.7
erros grosseiros

bounds on an input quantity..................4.3.7-4.3.9, 4.4.5, 4.4.6, F.2.3.3
limites para uma grandeza de entrada

Bureau International des Poids et Mesures.....*veja* BIPM
Bureau Internacional de Pesos e Medidas

C

calibration chain...4.2.8 nota
cadeia de calibração

calibration, comparison..................................F.1.2.3 nota
calibração por comparação

calibration curve..F.2.4.2, F.2.4.5
curva de calibração

calibration curve, linear.................................H.3 *et seqq.*
curva linear de calibração

Central Limit Theorem...............G.1.6, G.2, G.2.1, G.2.3, G.6.2, G.6.5, G.6.6
Teorema Central do Limite[1]

central moment of order *q*.....C.2.13, C.2.22, E.3.1 nota 1
momento central de ordem q

centred random variable..C.2.10
variável aleatória centrada

characteristic..C.2.15
característica

CIPM...........................i, v, 0.5, 6.1.1, 6.1.2, A.1, A.2, A.3
CIPM

combined standard uncertainty......................2.3.4, 3.3.6, 4.1.5, 5, 5.1.1, 5.1.3, 5.1.6, 5.2.2,6.1.1, D.6.1, E.3.6
incerteza padrão combinada

combined standard uncertainty and Comités Consultatifs..6.1.1, A.3
incerteza padrão combinada e Comitês Consultivos

1 NT: Tradução adotada para a expressão “Central Limit Theorem” que alguns entendem que deva ser traduzida como “Teorema do Limite Central”

combined standard uncertainty and international comparisons..6.1.1, A.3
incerteza padrão combinada e comparações internacionais

combined standard uncertainty from Type A components alone.................................7.2.1, G.4.1 nota 3
incerteza padrão combinada apenas dos componentes do tipo A

combined standard uncertainty from Type B components alone.................................7.2.1, G.4.1 nota 3
incerteza padrão combinada apenas dos componentes do tipo B

combined standard uncertainty, numerical calculation of...............................5.1.3 nota 2, 5.2.2 nota 3
cálculo numérico da incerteza padrão combinada

combined standard uncertainty, relative........5.1.6, 7.2.1
incerteza padrão combinada relativa

combined standard uncertainty, reporting.....7.2.1, 7.2.2
relatando a incerteza padrão combinada

Comité International des Poids et Mesures.....*veja* CIPM
Comitê Internacional de Pesos e Medidas

confidence coefficient..C.2.29
coeficiente de confiança

confidence interval...............................4.2.3 nota 1, 6.2.2, C.2.27, C.2.28, E.3.3
intervalo de confiança

confidence intervals, propagation of.........................E.3.3
propagação de intervalos de confiança

confidence level..6.2.2, C.2.29
nível de confiança

conventional true value of a quantity......................B.2.4
valor verdadeiro convencional de uma grandeza

convolution.........*veja* probability distributions, convolving
convolução...ver probabilidade, convolução das distribuições de

corrected result..........................B.2.13, D.3.1, D.3.4, D.4
resultado corrigido

correction............................3.2, 3.2.3, 3.2.4 nota 2, B.2.23
correção

correction factor..3.2.3, B.2.24
fator de correção

correction, ignoring a... 3.2.4 nota 2, 3.4.4, 6.3.1 nota, F.2.4.5
ignorando uma correção

correction, uncertainty of a.......................*veja* uncertainty of a correction
incerteza de uma correção

correlated input estimates or quantities...*veja* correlation
estimativas de entrada ou grandezas correlacionadas

correlated output estimates or quantities................3.1.7, 7.2.5, H.2.3, H.2.4, H.3.2, H.4.2
estimativas de saída ou grandezas correlacionadas

correlated random variations...................................4.2.7
variações aleatórias correlacionadas

correlation..5.1, 5.2 *et seqq*., C.2.8, F.1.2, F.1.2.1, F.1.2.4
correlação

correlation coefficient...........................5.2.2, 5.2.3, C.3.6, F.1.2.3, H.2.3, H.2.4, H.3.2, H.4.2
coeficiente de correlação

correlation coefficient matrix...............7.2.5, C.3.6 nota 2
matriz de coeficientes de correlação

correlation coefficient, significant digits for a..........7.2.6
dígitos significativos para um coeficiente de correlação

correlation, elimination of........5.2.4, 5.2.5, F.1.2.4, H.3.5
eliminação da correlação

covariance....................3.3.6, 5.2.2, C.3.4, F.1.2.1, F.1.2.4
covariância

covariance, experimental evaluation of....5.2.5, C.3.6 nota 3
avaliação experimental da covariância

covariance matrix...3.1.7, 5.2.2 nota 2, 7.2.5, C.3.5, H.2.3
matriz de covariância

covariance of related measurands.............*veja* correlated output estimates or quantities
covariância de mensurandos relacionados

covariance of two arithmetic means........................5.2.3, C.3.4, H.2.2, H.2.4, H.4.2
covariância de duas médias aritméticas

coverage factor.....................2.3.6, 3.3.7, 4.3.4 nota, 6.2.1, ...6.3 *et seqq*., G.1.3, G.2.3, G.3.4, G.6.1 *et seqq*.
fator de abrangência

coverage probability................................0.4, 2.3.5 nota 1, 3.3.7, 6.2.2, G.1.1, G.1.3, G.3.2
probabilidade de abrangência

curve, calibration.............................*veja* calibration curve
curva de calibração

D

degree of belief......................3.3.5, E.3.5, E.4.4, E.5.2 nota
grau de confiança

degrees of freedom.............................4.2.6, C.2.31, E.4.3, G, G.3, G.3.2, G.3.3, G.6.3, G.6.4
graus de liberdade

degrees of freedom, effective............................6.3.3, G.4, G.4.1, G.5.4, G.6.2 *et seqq.*
graus efetivos de liberdade

degrees of freedom, effective, of Type A components alone.................................7.2.1, G.4.1 nota 3
graus efetivos de liberdade apenas dos componentes do Tipo A

degrees of freedom, effective, of Type B components alone.................................7.2.1, G.4.1 nota 3
graus efetivos de liberdade apenas dos componentes do Tipo B

degrees of freedom of a pooled estimate of variance (or of a pooled experimental standard deviation) H.1.6, H.3.6 nota
graus de liberdade de uma estimativa agrupada de variância (ou de um desvio padrão experimental agrupado)

degrees of freedom of a Type A standard uncertainty...G.3.3, G.6.3, G.6.4
graus de liberdade de uma incerteza padrão do Tipo A

degrees of freedom of a Type B standard uncertainty................................G.4.2, G.4.3, G.6.3, G.6.4
graus de liberdade de uma incerteza padrão do Tipo B

design, balanced nested............................H.5.3.1, H.5.3.2
arranjo aninhado balanceado

distribution, *a priori*................................4.1.6, 4.3.1 nota, 4.4.4 *et seqq.,* D.6.1, E.3.4, E.3.5, G.4.2, G.4.3
distribuição *a priori*

distribution, asymmetric...................4.3.8, F.2.4.4, G.5.3
distribuição assimétrica

distribution, *F* ....*veja F*-distribution
distribuição *F*

distribution, frequency...........*veja* frequency distribution
freqüência de distribuição

distribution function..C.2.4
função distribuição

distribution, Laplace-Gauss..*veja* Laplace-Gauss distribution
distribuição de Laplace-Gauss

distribution, normal.....................*veja* normal distribution
distribuição normal

distribution, probability.........*veja* probability distribution
distribuição de probabilidade

distribution, rectangular.......................4.3.7, 4.3.9, 4.4.5, F.2.2.1, F.2.2.3, F.2.3.3, G.2.2 nota 1, G.4.3
distribuição retangular

distributions, convolving probability.......*veja* probability distributions, convolving
convolução das distribuições de probabilidade

distributions, mathematically determinate...............F.2.2
distribuições determinadas matematicamente

distribution, Student's.............*veja* Student's distribution
distribuição de Student

distribution, *t*..*veja t*-distribution
distribuição-*t*

distribution, trapezoidal...4.3.9
distribuição trapezoidal

distribution, triangular.......................4.3.9, 4.4.6, F.2.3.3
distribuição triangular

E

effect, random.......................................*veja* random effect
efeito aleatório

effect, systematic..............................*veja* systematic effect
efeito sistemático

error analysis...0.2
análise de erro

error and uncertainty, confusion between....3.2.2 nota 2, 3.2.3 nota, E.5.4
confusão entre erro e incerteza

error bound, maximum..E.4.1
máximo limite de erro

error curve of a verified instrument.......................F.2.4.2
curva de erro de um instrumento verificado

error, determining..3.4.5
determinando o erro

error, maximum permissible..................................F.2.4.2
erro máximo permissível

error of measurement...............0.2, 2.2.4, 3.2, 3.2.1 nota, 3.2.2 nota 2, 3.2.3 nota, 3.3.1 nota, 3.3.2, B.2.19, D, D.4,

D.6.1, D.6.2, E.5.1 *et seqq.*,
erro de medição

error propagation, general law of ....5.2.2 nota 1, E.3.2
lei geral de propagação de erro

error, random..*veja* random error
erro aleatório

error, relative...*veja* relative error
erro relativo

error, systematic................................*veja* systematic error
erro sistemático

estimate..3.1.2, C.2.26
estimativa

estimate, input......................................*veja* input estimate
entrada estimada

estimate, output..................................*veja* output estimate
saída estimada

estimation...C.2.24
estimação

estimator..4.2.7, C.2.25
estimador

expanded uncertainty.........................2.3.5, 3.3.7, 6, 6.2.1, 6.2.3, G.l.l, G.2.3, G.3.2, G.4.1, G.5.1, G.5.4, G.6.4, G.6.6
incerteza expandida

expanded uncertainty for an asymmetric distribution G.5.3
incerteza expandida para uma distribuição assimétrica

expanded uncertainty, relative..................................7.2.3
incerteza expandida relativa

expanded uncertainty, reporting.....................7.2.3, 7.2.4
relatando a incerteza expandida

expectation (or expected value).......................3.2.2, 3.2.3, 4.1.1 nota 3, 4.2.1, 4.3.7, 4.3.9, C.2.9, C.3.1, C.3.2
esperança (ou valor esperado)

experimental standard deviation.................*veja* standard deviation, experimental
desvio padrão experimental

F

***F*-distribution**...H.5.2.3
distribuição F

frequency...C.2.17
freqüência

frequency distribution..............3.3.5, 4.1.6, C.2.18, E.3.5
distribuição de freqüência

frequency, relative..E.3.5
freqüência relativa

***F*-test**...H.5.2.2, H.5.2.4
teste *F*

functional relationship....................................4.1.1, 4.1.2
relação funcional

functional relationship, linearization of a................5.1.5, F.2.4.4 nota, 5.1.6 nota I
linearização de uma relação funcional

functional relationship, nonlinear.....................4.1.4 nota, 5.1.2 nota, F.2.4.4 nota, G.1.5, H.1.7, H.2.4
relação funcional não-linear

H

higher order terms.........................5.1.2 nota, E.3.1, H.1.7
termos de ordem superior

histogram..4.4.3, D.6.1 nota I
histograma

I

IEC..i, iii, v, A.3, B.1
IEC

IFCC..i, iii, v, B.1
IFCC

imported input value or quantity................F.2.3, F.2.3.1
valor de entrada ou grandeza importada

independence..5.1, C.3.7
independência

independent repetitions..F.1.1.2
repetições independentes

influence quantities, random....................F.1.1.3, F.1.1.4
grandezas de influência aleatória

influence quantity............3.1.5, 3.1.6, 3.2.3, 4.2.2, B.2.10
grandeza de influência

information, pool of, for a Type B evaluation ....3.3.5 nota, 4.3.1, 4.3.2, 5.2.5
conjunto de informações, para uma avaliação de Tipo B

input estimate...4.1.4, 4.1.6, 4.2.1
estimativa de entrada

input estimates or quantities, correlated..*veja* correlation
estimativas de entrada ou grandezas correlacionadas

input quantities, categorization of............................4.1.3
categorização das grandezas de entrada

input quantity...4.1.2
grandeza de entrada

input quantity, bounds on an
veja bounds on an input quantity
limites sobre uma grandeza de entrada

input value or quantity, imported..............*veja* imported input value or quantity
valor de entrada ou grandeza importada

International Electrotechnical Commission.......*veja* IEC
Comissão Internacional de Eletrotécnica

International Federation of Clinical Chemistry...*veja* IFCC
Federação Internacional de Química Clínica

International Organization for Standardization...*veja* ISO
Organização Internacional de Normalização

International Organization of Legal Metrology
veja OIML
Organização Internacional da Metrologia Legal

International System of Units (SI)......................0.3, 3.4.6
Sistema Internacional de Unidades (SI)

International Union of Pure and Applied Chemistry
veja IUPAC
União Internacional de Química Pura e Aplicada

International Union of Pure and Applied Physics
veja IUPAP
União Internacional de Física Pura e Aplicada

International vocabulary of basic and general terms in metrology...*veja* VIM
Vocabulário Internacional de Termos Fundamentais e Gerais de Metrologia

ISO..iii, iv, vii, A.3, B.1
ISO

ISO/TAG 4...v
ISO/TAG 4

ISO/TAG 4/WG 3..v
ISO/TAG 4/WG 3

ISO/TAG 4/WG 3, terms of reference of.........................v
termos de referência da ISO/TAG 4/WG 3

ISO Technical Advisory Group on Metrology (ISO/TAG4)...v
ISO, Grupo Técnico Consultivo em Metrologia (ISO/TAG4)

ISO 3534-1..2.1, C.l
ISO 3534-1

IUPAC..iii, iv, vii, B.l
IUPAC

IUPAP..iii, iv, vii, B.l
IUPAP

L

laboratories, national metrology or standards...............v
laboratórios nacionais de metrologia ou de padrões

Laplace-Gauss distribution.....................................C.2.14
distribuição de Laplace-Gauss

least squares, method of.....4.2.5, G.3.3, H.3, H.3.1, H.3.2
método dos mínimos quadrados

legal metrology..3.4.5
metrologia legal

level of confidence.................Preâmbulo, 0.4, 2.2.3 nota 1, 2.3.5 notas 1 e 2, 3.3.7, 4.3.4, 6.2.2, 6.2.3, 6.3.1,6.3.3, G, G.1.1, G.1.3, G.2.3, G.3.2, G.3.4, G.4.1, G.6.1, G.6.4,G.6.6
nível da confiança

level of confidence, minimum.................................F.2.3.2
nível mínimo da confiança

limit, safety..*veja* safety limit
limite de segurança

limits, upper and lower, on an input quantity..*veja* bounds on an input quantity
limites superior e inferior de uma grandeza de entrada

M

maximum bounds...........*veja* bounds on an input quantity
limites máximo

maximum entropy, principle of.......................4.3.8 nota 2
princípio da entropia máxima

mean..C.2.9, C.3.1
média

mean, arithmetic...............................*veja* arithmetic mean
média aritmética

measurable quantity..B.2.1
grandeza mensurável

measurand...1.2,3.1.1, 3.1.3, B.2.19, D.1, D.1.1, D.1.2, D.3.4
mensurando

measurand, best possible measurement of the.........D.3.4
melhor medição possível do mensurando

measurand, definition or specification of the
veja measurand
definição ou especificação do mensurando

measurand, many values of the................................D.6.2
muitos valores do mensurando

measurands, covariance of related..*veja* correlated output estimates or quantities
covariância dos mensurandos relacionados

measurand, value of the...................................3.1.1, 3.1.3
valor do mensurando

measurand, uncertainty due to incomplete definition of the..............................*veja* uncertainty due to incomplete definition of the measurand
incerteza devido à definição incompleta do mensurando

measurement...3.1, 3.1.1, B.2.5
medição

measurement, accuracy of..*veja* accuracy of measurement
exatidão de medição

measurement hierarchy...7.1.1
hierarquia da medição

measurement, mathematical model of the..............3.1.6, 3.4.1, 3.4.2, 4.1, 4.1.1, 4.1.2
modelo matemático da medição

measurement, method of......*veja* method of measurement
método de medição

measurement, principle of..*veja* principle of measurement
princípio de medição

measurement procedure...........3.1.1, 7.1.2, B.2.8, F.1.1.2
procedimento de medição

measurement result and its uncertainty, availability of information describing a..................................7.1.1, 7.1.3
disponibilidade da informação descrevendo um resultado de medição e sua incerteza

measurement result and its uncertainty, formats for reporting a..7.2.2, 7.2.4
formatos para relatar um resultado de medição e sua incerteza

measurement result and its uncertainty, reporting in detail a...7.1.4, 7.2.7
relatando em detalhe um resultado de medição e sua incerteza

measurement, result of a.......*veja* result of a measurement
resultado de uma medição

measurement, role of ANOVA in.................H.5.3 *et seqq.*
papel da ANOVA na medição

measurements, spectrum of, to which the principles of the *Guide* apply..1.1
espectro de medições para as quais os princípios do Guia se aplicam

method of measurement..................................3.1.1, B.2.7
método de medição

method of measurement, uncertainty of the.................*veja* uncertainty of the method of measurement
incerteza do método de medição

method of measurement, unit dependent on the........H.6
unidade dependente do método de medição

metrology, legal..................................*veja* legal metrology
metrologia legal

minimum uncertainty.............*veja* uncertainty, minimum
incerteza mínima

model, mathematical, of the measurement................*veja* measurement, mathematical model of the
modelo matemático da medição

N

nonlinear functional relationship..............*veja* functional relationship, nonlinear
relação funcional não-linear

normal distribution......................4.2.3 nota 1, 4.3.2 nota, 4.3.4, 4.3.6, 4.3.9 nota 1, 4.4.2, 4.4.6, C.2.14, E.3.3, F.2.3.3, G.1.3, G.1.4, G.2.1, G.2.3, G.5.2 nota 2
distribuição normal

O

observations, independent pairs of simultaneous....5.2.3, C.3.4, F.1.2.2, H.2.2, H.2.4, H.4.2
pares independentes de observações simultâneas

observations, repeated................3.1.4, 3.1.6, 3.2.2, 3.3.5, 4.2.1, 4.2.3, 4.3.1, 4.4.1, 4.4.3, 5.2.3, E.4.2, E.4.3, F.1, F.1.1, F.1.1.1, F.1.1.2, G.3.2
observações repetidas

OIML..i, iii, v, A.3, B.1
OIML

one sided confidence interval.................................C.2.28
intervalo de confiança unilateral

output estimate......................................4.1.4, 4.1.5, 7.2.5
estimativa de saída

output estimates or quantities, correlated.................*veja* correlated output estimates or quantities
estimativas de saída ou grandezas correlacionadas

output quantity...4.1.2
grandeza de saída

overall uncertainty.......................*veja* uncertainty, overall
incerteza geral

P

parameter..C.2.7
parâmetro

partial derivatives...5.1.3
derivadas parciais

particular quantity...............................3.1.1, B.2.1 nota 1
grandeza específica

pooled estimate of variance.........................*veja* variance, pooled estimate of
estimativa agrupada de variância

population...C.2.16
população

precision..B.2.14 nota 2
precisão

principle of measurement...B.2.6
principio de medição

probability...3.3.5, 4.3.7, 4.3.9, C.2.1, E.3.5, E.3.6, F.2.3.3
probabilidade

probability, coverage.................*veja* coverage probability
probabilidade de abrangência

probability density function................3.3.5, 4.3.8 nota 2, 4.4.2, 4.4.5, 4.4.6, C.2.5, F.2.4.4
função densidade de probabilidade

probability distribution........................3.3.4, 4.1.1 nota 1, 4.1.6, 4.2.3 nota 1, 4.4.1, 4.4.4, C.2.3, E.4.2, G.1.4, G.1.5
distribuição de probabilidade

probability distributions, convolving............4.3.9 nota 2, G.1.4, G.1.6, G.2.2, G.6.5
convolução das distribuições de probabilidade

probability element...............................C.2.5 nota, F.2.4.4
elementos de probabilidade

probability mass function...C.2.6
função massa de probabilidade

probability, subjective....................................3.3.5, D.6.1
probabilidade subjetiva

propagation, general law of error.....................*veja* error propagation, general law of
lei geral de propagação de erro

propagation of uncertainty, law of.........*veja* uncertainty, law of propagation of
lei de propagação da incerteza

Q

quantity, controlled...F.2.4.3
grandeza controlada

quantity, influence.........................*veja* influence quantity
influência de grandeza

quantity, input....................................*veja* input quantity
grandeza de entrada

quantity, measurable..................*veja* measurable quantity
grandeza mensurável

quantity, output.................................*veja* output quantity
grandeza de saída

quantity, particular.......................*veja* particular quantity
grandeza específica

quantity, realized.................D.2, D.2.1, D.3.1, D.3.3, D.4
grandeza realizada

quantity, value of a.......................*veja* value of a quantity
valor de uma grandeza

R

random...3.3.3, E.1.3, E.3.5, E.3.7
aleatório

random effect..............3.2.2, 3.3.1, 3.3.3, 4.2.2, E.1.1, E.3
efeito aleatório

random error.......................................3.2.1, 3.2.3, B.2.21
erro aleatório

randomness......................................F.1.1, F.1.1.3, F.1.1.5
aleatoriedade

random variable...................................4.1.1 nota 1, 4.2.1, 4.2.3 nota 1, C.2.2, C.3.1, C.3.2, C.3.4, C.3.7, C.3.8, E.3.4, F.1.2.1, G.3.2
variável aleatória

random variations, correlated...................*veja* correlated random variations
variações aleatórias correlacionadas

Recommendation INC-1 (1980).....................i, v, 0.5, 0.7, 3.3.3, 6.1.1, 6.1.2, 6.3.3, A.1, A.3, E, E.2.3, E.3.7
Recomendação INC-1 (1980)

Recommendation 1 (CI-1981), CIPM..i, 0.5, 6.1.1, A.2, A.3
Recomendação 1 (CI-1981) CIPM

Recommendation 1 (CI-1986), CIPM...0.5, 6.1.1, 6.1.2, A.3
Recomendação 1 (CI-1986) CIPM

reference materials, certification of...............H.5, H.5.3.2
certificação de materiais de referência

relative error..B.2.20
erro relativo

repeatability conditions.......................3.1.4, B.2.15 nota 1
condições de repetitividade

repeatability of results of measurements................B.2.15
repetitividade dos resultados de medição

repeated observations.............*veja* observations, repeated
observações repetidas

repetitions, independent........*veja* independent repetitions
repetições independentes

reproducibility of results of measurements............B.2.16
reprodutibilidade de resultados de medições

result, corrected.................................*veja* corrected result
resultado corrigido

result of a measurement..........................1.3, 3.1.2, B.2.11
resultado de uma medição

result, uncorrected..........................*veja* uncorrected result
resultado não corrigido

S

safety limit...6.3.1 nota
limite de segurança

sample, uncertainty of the..*veja* uncertainty of the sample
incerteza da amostra

sampling, uncertainty due to limited.......*veja* uncertainty due to limited sampling
incerteza devido à amostragem limitada

sensitivity coefficients.......................................5.1.3, 5.1.4
coeficientes de sensibilidade

sensitivity coefficients, experimental determination of 5.1.4
determinação experimental dos coeficientes de sensibilida-de

standard deviation.................3.3.5, C.2.12, C.2.21, C.3.3.
desvio padrão

standard deviation, experimental.................4.2.2, B.2.17
desvio padrão experimental

standard deviation of the mean, experimental........4.2.3, B.2.17 nota 2
desvio padrão experimental da média

standard deviation of the mean, uncertainty of the experimental..........................*veja* uncertainty of the experimental standard deviation of the mean
incerteza do desvio padrão experimental da média

standard deviation, pooled experimental..................*veja* variance, pooled estimate of
desvio padrão experimental agrupado

standard deviations as measures of uncertainty........*veja* uncertainty, standard deviations as measures of
desvios padrão como medidas de incerteza

standard deviations, propagation of........E.3, E.3.1, E.3.2
propagação dos desvios padrão

standard deviations, propagation of multiples of....E.3.3
propagação de múltiplos de desvios padrão

standard uncertainty.............................2.3.1, 3.3.5, 3.3.6, 4.1.5, 4.1.6, 4.2.3, D.6.1, E.4.1
incerteza padrão

standard uncertainty, graphical illustration of evaluating 4.4 *et seqq.*
ilustração gráfica da avaliação da incerteza padrão

standard uncertainty, relative....................................5.1.6
incerteza padrão relativa

standard uncertainty, Type A evaluation of
veja Type A evaluation of uncertainty
avaliação da incerteza padrão do Tipo A

standard uncertainty, Type B evaluation of
veja Type B evaluation of uncertainty
avaliação da incerteza padrão do Tipo B

statistic..4.2.7, C.2.23
estatística

statistical control..3.4.2, 4.2.4
controle estatístico

statistical coverage interval......................................C.2.30
intervalo estatístico de abrangência

Student's distribution......................................C.3.8, G.3.2
distribuição de Student

systematic......................................3.3.3, E.1.3, E.3.4, E.3.7
sistemático

systematic effect......................................3.2.3, 3.2.4, 3.3.1, 3.3.2, 3.3.3, D.6.1, E.1.1, E.3, E.4.4
efeito sistemático

systematic error....................................3.2.1, 3.2.3, B.2.22
erro sistemático

T

Taylor series...........5.1.2, E.3.1, G.1.5, G.4.2, H.1.7, H.2.4
séries de Taylor

***t*-distribution**.......................4.2.3 nota 1, C.3.8, G.3, G.3.2, G.3.4, G.4.1, G.4.2, G.5.4, G.6.2
distribuição-*t*

***t*-distribution, quantiles of the**...........................G.3.4 nota
quantis da distribuição-*t*

***t*-factor**
E.3.3, G.3.2, G.3.4, G.4.1, G.5.4, G.6.2, G.6.4, G.6.6
fator-*t*

tolerance interval, statistical.........................C.2.30 nota 2
intervalo estatístico de tolerância

true value of a quantity............2.2.4, 3.1.1 nota, B.2.3, D, D.3, D.3.1, D.3.4, D.3.5, E.5.1, E.5.4
valor verdadeiro de uma grandeza

true value of a quantity, conventional........................*veja* conventional true value of a quantity
valor verdadeiro convencional de uma grandeza

two sided confidence interval.................................C.2.27
intervalo de confiança bilateral

Type A combined standard uncertainty
7.2.1, G.4.1 nota 3
incerteza padrão combinada do Tipo A

Type A evaluation of covariance................................5.2.3
avaliação da covariância do Tipo A

Type A evaluation of uncertainty...................2.3.2, 3.3.3, 3.3.5, 4.1.6, 4.2, 4.2.1, 4.2.8, 4.3.2, 4.4.1, 4.4.3, E.3.7, F.1, F.1.1.1, F.1.2.4
avaliação da incerteza do Tipo A

Type A standard uncertainty................3.3.5, 4.2.3, C.3.3
incerteza padrão do Tipo A

Type A variance..4.2.3
variância do Tipo A

Type B combined standard uncertainty..7.2.1, G.4.1 nota 3
incerteza padrão combinada do Tipo B

Type B evaluation of covariance................................5.2.5
avaliação da covariância do Tipo B

Type B evaluation of uncertainty.....................2.3.3, 3.3.3 3.3.5, 4.1.6, 4.3, 4.3.1 4.3.11, 4.4.4 4.4.6, E.3.7, F.2 *et seqq.*
avaliação da incerteza do Tipo B

Type B evaluations, need for.....................................F.2.1
necessidade para avaliações do Tipo B

Type B standard uncertainty.................3.3.5, 4.3.1, C.3.3
incerteza padrão do Tipo B

Type B variance..4.3.1
variância do Tipo B

U

uncertainties, rounding of...7.2.6
arredondamento de incertezas

uncertainties, significant digits for...........................7.2.6
dígitos significativos para incertezas

uncertainty, categorizing or classifying components of
3.3.3, 3.3.4, E.3.6, E.3.7
categorizando ou classificando componentes de incerteza

uncertainty, comparison of two views of........E.5 *et seqq.*
comparação de duas abordagens da incerteza

uncertainty, definition of the term..........*veja* uncertainty of measurement
definição do termo incerteza

uncertainty, doublecounting components of...........4.3.10
componentes duplamente contados da incerteza

uncertainty due to finite-precision arithmetic.......F.2.2.3
incerteza devido à aritmética de precisão-finita

uncertainty due to hysteresis..................................F.2.2.2
incerteza devido à histerese

uncertainty due to incomplete definition of the measurand 3.1.3 nota, D.1.1, D.3.4, D.6.2
incerteza devido à definição incompleta do mensurando

uncertainty due to limited sampling........4.3.2 nota, E.4.3
incerteza devido à amostragem limitada

uncertainty due to the resolution of a digital indication F.2.2.1
incerteza devido à resolução de uma indicação digital

uncertainty evaluations, justification for realistic E.2, E.2.1, E.2.3
justificativa para avaliações realísticas da incerteza

uncertainty, grouping components of 3.3.3 nota, 3.4.3, E.3.7
agrupando componentes da incerteza

uncertainty, ideal method for evaluating and expressing 0.4
método ideal para avaliar e expressar a incerteza

uncertainty, ignoring a component of.......................3.4.4
ignorando um componente da incerteza

uncertainty, internally consistent quantity for expressing 0.4
grandeza internamente consistente para expressar a incerteza

uncertainty, intrinsic...D.3.4
incerteza intrínseca

uncertainty, lack of an explicit report of..................7.1.3
falta de um registro explícito de incerteza

uncertainty, law of propagation of..........................3.3.6, 3.4.1, 5.1.2, E.3, E.3.1, E.3.2, E.3.6, G.6.6
lei de propagação da incerteza

uncertainty, maximum allowed..............................F.2.4.2
incerteza máxima permitida

uncertainty, minimum..D.3.4
incerteza mínima

uncertainty of a controlled quantity.......................F.2.4.3
incerteza de uma grandeza controlada

uncertainty of a correction................................3.2.3 nota, 3.3.1, 3.3.3, D.6.1, E.1.1, E.3
incerteza de uma correção

uncertainty of a single observation of a calibrated instrument...F.2.4.1
incerteza de uma única observação de um instrumento calibrado

uncertainty of a single observation of a verified instrument..F.2.4.2
incerteza de uma única observação de um instrumento verificado

uncertainty of measurement....................0.1, 0.2, 1.1, 2.2, 2.2.1, 2.2.4, 3.3, 3.3.1, 3.3.2, B.2.18, D, D.5, D.5.1, D.5.3, D.6.1, D.6.2
incerteza de medição

uncertainty of the experimental standard deviation of the mean...............................4.3.2 nota, E.4.3
incerteza do desvio padrão experimental da média

uncertainty of the method of measurement.F.2.5, F.2.5.1
incerteza do método de medição

uncertainty of the sample.............................F.2.6 *et seqq.*
incerteza da amostra

uncertainty, overall...2.3.5 nota 3
incerteza geral

uncertainty, quality and utility of the quoted...........3.4.8
qualidade e utilidade da incerteza avaliada

uncertainty, reporting...7 *et seqq.*
relatando a incerteza

uncertainty, safe........E.l.l, E.1.2, E.2.1, E.2.3, E.4.1, F.2.3.2
incerteza segura

uncertainty, sources of...3.3.2
fontes de incerteza

uncertainty, standard deviations as measures of....................................E.3.2, E.4, E.4.1, E.4.4
desvios padrão como medidas de incerteza

uncertainty, statistical evaluation of, by varying input quantities................3.4.1, 3.4.2, 4.2.8, F.2.1, H.5.3.3
avaliação estatística da incerteza devido à variação das grandezas de entrada

uncertainty, summary of procedure for evaluating and expressing..8
sumário do procedimento para avaliação e expressão da incerteza

uncertainty, transferable quantity for expressing.......0.4
grandeza transferível para expressar a incerteza

uncertainty, universal method for evaluating and expressing..0.4
método universal para avaliar e expressar a incerteza

uncertainty when a correction is not applied..........3.4.4, 6.3.1 nota, F.2.4.5
incerteza quando uma correção não é aplicada

uncorrected result..B.2.12
resultado não corrigido

unit, use of an adopted value of a measurement standard as a...3.4.6, 4.2.8 nota
uso de um valor adotado de um padrão de medição como uma unidade

V

value of a quantity...3.1.1, B.2.2
valor de uma grandeza

variance................3.1.7, 4.2.2, 4.2.3, C.2.11, C.2.20, C.3.2
variância

variance, Allan..4.2.7 nota
variância de Allan

variance, analysis of....................................*veja* ANOVA
análise de variância

variance, combined..3.3.6, 5.1.2
variância combinada

variance, experimental (or estimate of)..4.2.2, H.3.6 nota
variância experimental (ou estimada de)

variance of the mean......................................4.2.3, C.3.2
variância da média

variance of the mean, experimental................4.2.3, C.3.2
variância experimental da média,

variance, pooled estimate of (or pooled experimental standard deviation).....................4.2.4, 4.2.8 nota, H.1.3.2, H.3.6 nota, H.5.2.2, H.5.2.5, H.6.3.1, H.6.3.2 nota
estimativa agrupada (ou desvio padrão experimental agrupado) de variância

variance, relative..5.1.6
variância relativa

variance, relative combined.......................................5.1.6
variância relativa combinada

variate..C.2.2
variada

VIM..2.1, 2.2.3, 2.2.4, B.1
VIM

W

Welch-Satterthwaite formula...G.4.1, G.4.2, G.6.2, G.6.4
fórmula de Welch-Satterthwaite

Working Group on the Statement of Uncertainties i, v, 0.5, 3.3.3, 6.1.1, 6.1.2, A.1, A.2, A.3
Grupo de Trabalho sobre a Declaração de Incertezas

Working Group 3 (ISO/TAG 4/WG 3)............................v
Grupo de Trabalho 3 (ISO/TAG 4/WG 3)

Índice Alfabético Bilíngüe
Português – Inglês

A

abrangência, fator de...........2.3.6, 3.3.7, 4.3.4 nota, 6.2.1, 6.3 *et seqq.*, G.1.3, G.2.3, G.3.4, G.6.1 *et seqq.*
coverage factor

abrangência, probabilidade de................0.4, 2.3.5 nota 1, 3.3.7, 6.2.2, G.1.1, G.1.3, G.3.2
coverage probability

agrupada de variância, estimativa.............*veja* variância, estimativa agrupada de
pooled estimate of variance

aleatória, variável..................................4.1.1 nota 1, 4.2.1, 4.2.3 nota 1, C.2.2, C.3.1, C.3.2, C.3.4, C.3.7, C.3.8, E.3.4, F.1.2.1, G.3.2
random variable

aleatórias correlacionadas, variações
veja correlacionadas, variações aleatórias
random variations, correlated

aleatoriedade....................................F.1.1, F.1.1.3, F.1.1.5
randomness

aleatório.......................................3.3.3, E.1.3, E.3.5, E.3.7
random

aleatório, efeito............3.2.2, 3.3.1, 3.3.3, 4.2.2, E.1.1, E.3
random effect

aleatório, erro.......................................3.2.1, 3.2.3, B.2.21
random error

amostra, incerteza da.................*veja* incerteza da amostra
sample, uncertainty of the

amostragem limitada, incerteza devido à....*veja* incerteza devido a amostragem limitada
uncertainty due to limited sampling

análise de variância......................................*veja* ANOVA
analysis of variance

ANOVA..4.2.8, H.5 *et seqq.*
ANOVA

aritmética, média.............................*veja* média aritmética
arithmetic mean

arranjo aninhado balanceado..................H.5.3.1, H.5.3.2
balanced nested design

B

bilateral, intervalo de confiança.............................C.2.27
two sided confidence interval

BIPM..i, iii, v, 0.5, 7.1.1, A.1, A.2
BIPM

Bureau Internacional de Pesos e Medidas.......*veja* BIPM
Bureau International des Poids et Mesures

C

cadeia de calibração...4.2.8 nota
calibration chain

calibração por comparação............................F.1.2.3 nota
comparison calibration

calibração, cadeia de..................*veja* cadeia de calibração
calibration chain

calibração, curva de.....................*veja* curva de calibração
calibration curve

calibração, curva linear de
veja curva linear de calibração
linear calibration curve

característica..C.2.15
characteristic

centrada, variável aleatória ....*veja* variável aleatória centrada
centred random variable

central de ordem *q*, momento..........*veja* momento central de ordem *q*
central moment of order *q*

CIPM...........................i, v, 0.5, 6.1.1, 6.1.2, A.1, A.2, A.3
CIPM

combinada apenas dos componenetes do tipo A, incerteza padrão..................................*veja* incerteza padrão combinada apenas dos componentes do tipo A
components alone combined standard uncertainty from Type A

combinada apenas dos componenetes do tipo B, incerteza padrão..................................*veja* incerteza padrão combinada apenas dos componentes do tipo B
components alone combined standard uncertainty from Type B

combinada e Comitês Consultivos, incerteza padrão...............................*veja* incerteza padrão combinada e Comitês Consultivos
combined standard uncertainty and Comités Consultatifs

combinada e comparações internacionais, incerteza padrão...............................*veja* incerteza padrão combinada e comparações internacionais
combined standard uncertainty and international comparisons

combinada relativa, incerteza padrão.......................*veja* incerteza padrão combinada relativa
combined standard uncertainty, relative

combinada, cálculo numérico da incerteza padrão..5.1.3 nota 2, 5.2.2 nota 3
combined standard uncertainty, numerical calculation of

combinada, incerteza padrão......................*veja* incerteza padrão combinada
combined standard uncertainty

combinada, relatando a incerteza padrão...7.2.1, 7.2.2
combined standard uncertainty, reporting

Comissão Internacional de Eletrotécnica...........*veja* IEC
International Electrotechnical Commission

Comitê Internacional de Pesos e Medidas.......*veja* CIPM
Comité International des Poids et Mesures

confiança, nível da.................Preâmbulo, 0.4, 2.2.3 nota 1, 2.3.5 notas 1 e 2, 3.3.7, 4.3.4, 6.2.2, 6.2.3, 6.3.1,6.3.3, G, G.1.1, G.1.3, G.2.3, G.3.2, G.3.4, G.4.1, G.6.1, G.6.4, G.6.6
level of confidence

confiança, nível de..6.2.2, C.2.29
confidence level

confiança, propagação de intervalos de...................E.3.3
propagation of confidence intervals

confiança, coeficiente de..C.2.29
confidence coefficient

confiança, intervalo de.........................4.2.3 nota 1, 6.2.2, C.2.27, C.2.28, E.3.3
confidence interval

convencional de uma grandeza, valor verdadeiro...B.2.4
conventional true value of a quantity

convolução..................*veja* distribuição de probabilidades, convolução das
convolution

correção..............................3.2, 3.2.3, 3.2.4 nota 2, B.2.23
correction

correção, incerteza de uma.......*veja* incerteza da correção
uncertainty of a correction

correção, fator de..3.2.3, B.2.24
correction factor

correção, ignorando uma.....................3.2.4 nota 2, 3.4.4, 6.3.1 nota, F.2.4.5
ignoring a correction

correlação....5.1, 5.2 et seqq., C.2.8, F.1.2, F.1.2.1, F.1.2.4
correlation

correlação, coeficiente de.....................5.2.2, 5.2.3, C.3.6, F.1.2.3, H.2.3, H.2.4, H.3.2, H.4.2
correlation coefficient

correlação, dígitos significativos para um coeficiente de...7.2.6
significant digits for a correlation coefficient

correlação, eliminação da.........5.2.4, 5.2.5, F.1.2.4, H.3.5
elimination of correlation

correlação, matriz de coeficientes de..7.2.5, C.3.6 nota 2
correlation coefficient matrix

correlacionadas, estimativas de entrada ou grandezas..*veja* correlação
correlated input estimates or quantities

correlacionadas, estimativas de saída ou grandezas...........3.1.7, 7.2.5, H.2.3, H.2.4, H.3.2, H.4.2
correlated output estimates or quantities

correlacionadas, variações aleatórias........................4.2.7
correlated random variations

corrigido, resultado.....................B.2.13, D.3.1, D.3.4, D.4
corrected result

covariância....................3.3.6, 5.2.2, C.3.4, F.1.2.1, F.1.2.4
covariance

covariância de duas médias aritméticas....................5.2.3
C.3.4, H.2.2, H.2.4, H.4.2
covariance of two arithmetic means

covariância de mensurandos relacionados
veja correlacionadas, estimativa
de saída ou grandezas
covariance of related measurands

covariância, avaliação experimental da
5.2.5, C.3.6 nota 3
experimental evaluation of covariance

covariância, matriz de.................3.1.7, 5.2.2 nota 2, 7.2.5,
C.3.5, H.2.3
covariance matrix

curva de calibração....................................F.2.4.2, F.2.4.5
calibration curve

curva linear de calibração...............................H.3 *et seqq.*
linear calibration curve

D

desvio padrão experimental............................4.22, B.2.17
standard deviation experimental

distribuição *a priori*.................................4.1.6, 4.3.1 nota,
4.4.4 *et seqq.,* D.6.1, E.3.4, E.3.5, G.4.2, G.4.3
a priori distribution

distribuição *F*.......................................*veja F*, distribuição
F distribution

distribuição assimétrica.....................4.3.8, F.2.4.4, G.5.3
asymmetric distribution

distribuição de Laplace-Gauss
veja Laplace-Gauss, distribuição de
Laplace-Gauss distribution

distribuição de probabilidade
veja probabilidade, distribuição de
probability distribution

distribuição de Student.........*veja* Student, distribuição de
Student's distribution

distribuição normal....................*veja* normal, distribuição
normal distribution

distribuição retangular..........................4.3.7, 4.3.9, 4.4.5,
F.2.2.1, F.2.2.3, F.2.3.3, G.2.2 nota 1, G.4.3
rectangular distribution

distribuição trapezoidal...4.3.9
trapezoidal distribution

distribuição triangular.........................4.3.9, 4.4.6, F.2.3.3
triangular distribution

distribuição, freqüência de
veja freqüência, distribuição de
frequency distribution

distribuição, função..C.2.4
distribution function

distribuição-*t*...*veja t*, distribuição
t-distribution

distribuições de probabilidade, convolução das
veja probabilidade, convolução das distribuições das
convolving probability distributions

distribuições determinadas matematicamente.........F.2.2
mathematically determinated distributions

E

efeito aleatório....................................*veja* aleatório, efeito
random effect

efeito sistemático............................*veja* sistemático, efeito
systematic effect

elementos de probabilidade..................C.2.5 nota, F.2.4.4
probability element

entrada ou grandeza importada, valor de
veja importada, valor de entrada ou grandeza
imported input value or quantity

entrada ou grandezas correlacionadas, estimativas de..*veja* correlação
correlated input estimates or quantities

entrada, categorização das grandezas de.................4.1.3
categorization of input quantities

entrada, estimativa de............................4.1.4, 4.1.6, 4.2.1
input estimate

entrada, grandeza de..4.1.2
input quantity

entrada, limites sobre uma grandeza de
veja limites sobre uma grandeza de entrada
bounds on an input quantity

erro sistemático................................*veja* sistemático, erro
systematic error

erro aleatório..*veja* aleatório, erro
random error

erro de medição..........................0.2, 2.2.4, 3.2, 3.2.1 nota, 3.2.2 nota 2, 3.2.3 nota, 3.3.1 nota, 3.3.2, B.2.19, D, D.4, D.6.1, D.6.2, E.5.1 et seqq.,
error of measurement

erro de tendência..3.2.3 nota
bias

erro de um instrumento verificado, curva de........F.2.4.2
error curve of a verified instrument

erro e incerteza, confusão entre.....................3.2.2 nota 2, 3.2.3 nota, E.5.4
confusion between error and uncertainty

erro máximo permissível..F.2.4.2
maximum permissible error

erro relativo..*veja* relativo, erro
relative error

erro, análise de..0.2
error analysis

erro, determinando o...3.4.5
determining error

erro, lei geral de propagação de ....5.2.2 nota 1, E.3.2
general law of error propagation

erro, máximo limite de..E.4.1
maximum error bound

erros grosseiros...3.4.7
blunders

específica, grandeza..............................3.1.1, B.2.1 nota 1
particular quantity

esperança (ou valor esperado)........................3.2.2, 3.2.3, 4.1.1 nota 3, 4.2.1, 4.3.7, 4.3.9, C.2.9, C.3.1, C.3.2
expectation (or expected value)

estatística...4.2.7, C.2.23
statistic

estatístico de abrangência, intervalo......................C.2.30
statistical coverage interval

estatístico, controle...3.4.2, 4.2.4
statistical control

estimação..C.2.24
estimation

estimativa, entrada..................*veja* entrada, estimativa de
input estimate

estimativa, saída..........................*veja* saída, estimativa de
output estimate

estimador...4.2.7, C.2.25
estimator

estimativa...3.1.2, C.2.26
estimate

exatidão de medição............................3.1.3, 3.4.1, B.2.14
accuracy of measurement

expandida para uma distribuição assimétrica, incerteza G.5.3
expanded uncertainty for an asymmetric distribution

expandida relativa, incerteza....................................7.2.3
relative expanded uncertainty

expandida, relatando a incerteza...................7.2.3, 7.2.4
reporting expanded uncertainty

expandida, incerteza..........................2.3.5, 3.3.7, 6, 6.2.1 6.2.3, G.1.1, G.2.3, G.3.2, G.4.1, G.5.1, G.5.4, G.6.4, G.6.6
expanded uncertainty

experimental, desvio padrão................*veja* desvio padrão experimental
experimental standard deviation

F

***F*, distribuição**..H.5.2.3
F-distribution

***F*, teste**...H.5.2.2, H.5.2.4
F-test

Federação Internacional de Química Clínica..*veja* IFCC
International Federation of Clinical Chemistry

Freqüência...C.2.17
frequency

freqüência relativa..E.3.5
relative frequency

freqüência, distribuição de........3.3.5, 4.1.6, C.2.18, E.3.5
frequency distribution

funcional não linear, relação............................4.1.4 nota, 5.1.2 nota, F.2.4.4 nota, G.1.5, H.1.7, H.2.4
nonlinear functional relationship

funcional, linearização de uma relação...................5.1.5, F.2.4.4 nota, 5.1.6 nota I
linearization of a functional relationship

funcional, relação...4.1.1,4.1.2
functional relationship

G

geral, incerteza....................................*veja* incerteza geral
overall uncertainty

grandeza controlada...F.2.4.3
controlled quantity

grandeza de entrada..................*veja* entrada, grandeza de
input quantity

grandeza de saída..........................*veja* saída, grandeza de
output quantity

grandeza específica.....................*veja* específica, grandeza
particular quantity

grandeza mensurável...............*veja* mensurável, grandeza
measurable quantity

grandeza realizada...............D.2, D.2.1, D.3.1, D.3.3, D.4
realized quantity

grandeza, influência de..........*veja* influência, grandeza de
influence quantity

grandeza, valor de uma..........*veja* valor de uma grandeza
value of a quantity

grau de confiança................3.3.5, E.3.5, E.4.4, E.5.2 nota
degree of belief

graus de liberdade..............................4.2.6, C.2.31, E.4.3, G, G.3, G.3.2, G.3.3, G.6.3, G.6.4
degrees of freedom

graus de liberdade de uma estimativa agrupada de variância (ou de um desvio padrão experimental agrupado)
H.1.6, H.3.6 nota
degrees of freedom of a pooled estimate of variance (or of a pooled experimental standard deviation)

graus de liberdade de uma incerteza padronizada do Tipo A........................G.3.3, G.6.3, G.6.4
degrees of freedom of a Type A standard uncertainty

graus de liberdade de uma incerteza padronizada do Tipo B.............G.4.2, G.4.3, G.6.3, G.6.4
degrees of freedom of a Type B standard uncertainty

graus efetivos de liberdade................................6.3.3, G.4, G.4.1, G.5.4, G.6.2 *et seqq.*
effective degrees of freedom

graus efetivos de liberdade apenas dos componentes do Tipo A..7.2.1, G.4.1 nota 3
effective degrees of freedom of Type A components alone

graus efetivos de liberdade apenas dos componentes do Tipo B..7.2.1, G.4.1 nota 3
effective degrees of freedom of Type B components alone

Grupo de Trabalho 3 (ISO/TAG 4/WG 3)......................v
Working Group 3 (ISO/TAG 4/WG 3)

Grupo de Trabalho sobre a Declaração de Incertezas
i, v, 0.5, 3.3.3, 6.1.1, 6.1.2, A.1, A.2, A.3
Working Group on the Statement of Uncertainties

H

histograma...4.4.3, D.6.1 nota I
histogram

I

IEC..i, ii, v, A.3, B.1
IEC

IFCC...i, ii, v, B.1
IFCC

importada, valor de entrada ou grandeza..F.2.3, F.2.3.1
imported input value or quantity

incerteza intrínseca...D.3.4
intrinsic uncertainty

incerteza avaliada, qualidade e utilidade de uma....3.4.8
quality and utility of the quoted uncertainty

incerteza da amostra......................................F.2.6 *et seqq.*
uncertainty of the sample

incerteza de medição................................0.1, 0.2, 1.1, 2.2, 2.2.1, 2.2.4, 3.3, 3.3.1, 3.3.2, B.2.18, D, D.5, D.5.1, D.5.3, D.6.1, D.6.2
uncertainty of measurement

incerteza de uma correção................................3.2.3 nota, 3.3.1, 3.3.3, D.6.1, E.1.1, E.3
uncertainty of a correction

incerteza de uma grandeza controlada.................F.2.4.3
uncertainty of a controlled quantity

incerteza de uma única observação de um instrumento calibrado..F.2.4.1
uncertainty of a single observation of a calibrated instrument

incerteza de uma única observação de um instrumento verificado.....................................F.2.4.2
uncertainty of a single observation of a verified instrument

incerteza devido à amostragem limitada 4.3.2 nota, E.4.3
uncertainty due to limited sampling

incerteza devido à aritmética de precisão-finita....F.2.2.3
uncertainty due to finite-precision arithmetic

incerteza devido à definição incompleta do mensurando 3.1.3 nota, D.1.1, D.3.4, D.6.2
uncertainty due to incomplete definition of the measurand

incerteza devido à histerese....................................F.2.2.2
uncertainty due to hysteresis

incerteza devido à resolução de uma indicação digital F.2.2.1
uncertainty due to the resolution of a digital indication

incerteza devido à variação das grandezas de entrada, avaliação estatística da....3.4.1, 3.4.2, 4.2.8, F.2.1, H.5.3.3
statistical evaluation of uncertainty by varying input quantities

incerteza do desvio padrão experimental da média..4.3.2 nota, E.4.3
uncertainty of the experimental standard deviation of the mean

incerteza do método de medição..................F.2.5, F.2.5.1
uncertainty of the method of measurement

incerteza geral..2.3.5 nota 3
overall uncertainty

incerteza máxima permitida..................................F.2.4.2
maximum allowed uncertainty

incerteza mínima..D.3.4
minimum uncertainty

incerteza padrão combinada..........................2.3.4, 3.3.6, 4.1.5, 5, 5.1.1, 5.1.3, 5.1.6, 5.2.2,6.1.1, D.6.1, E.3.6
combined standard uncertainty

incerteza padrão combinada apenas dos componentes do Tipo A...7.2.1, G.4.1 nota 3
components alone combined standard uncertainty from Type A

incerteza padrão combinada apenas dos componentes do Tipo B...7.2.1, G.4.1 nota 3
components alone combined standard uncertainty from Type B

incerteza padrão combinada e Comitês Consultivos..6.1.1, A.3
combined standard uncertainty and Comités Consultatifs

incerteza padrão combinada e comparações internacionais...6.1.1, A.3
comparisons combined standard uncertainty and international

incerteza padrão combinada relativa 5.1.6, 7.2.1
combined standard uncertainty, relative

incerteza segura.....E.l.l, E.1.2, E.2.1, E.2.3, E.4.1, F.2.3.2
safe uncertainty

incerteza, agrupando componentes da 3.3.3 nota, 3.4.3, E.3.7
grouping components of uncertainty

incerteza, categorizando ou classificando componentes de............................3.3.3, 3.3.4, E.3.6, E.3.7
categorizing or classifying components of uncertainty

incerteza, comparação de duas visões da.......E.5 *et seqq.*
comparison of two views of uncertainty

incerteza, componentes duplamente contados da..4.3.10
doublecounting components of uncertainty

incerteza, definição do termo.......................*veja* incerteza de medição
definition of the term uncertainty

incerteza, desvios padrão como medidas de......................................E.3.2, E.4, E.4.1, E.4.4
standard deviations as measures of uncertainty

incerteza, falta de um registro explícito de..............7.1.3
lack of an explicit report of uncertainty

incerteza, fontes de..3.3.2
sources of uncertainty

incerteza, grandeza internamente consistente para expressar a..0.4
internally consistent quantity for expressing uncertainty

incerteza, grandeza transferível para expressar a......0.4
transferable quantity for expressing uncertainty

incerteza, ignorando um componente da.................3.4.4
ignoring a component of uncertainty

incerteza, justificativa para avaliações realisticas da
E.2, E.2.1 E.2.3
justification for realistic uncertainty evaluations

incerteza, lei de propagação da................................3.3.6, 3.4.1, 5.1.2, E.3, E.3.1, E.3.2, E.3.6, G.6.6
law of propagation of uncertainty

incerteza, método ideal para avaliar e expressar a
0.4
ideal method for evaluating and expressing uncertainty

incerteza, método universal para avaliar e expressar a..0.4
universal method for evaluating and expressing uncertainty

incerteza quando uma correção não é aplicada
3.4.4, 6.3.1 nota, F.2.4.5
uncertainty when a correction is not applied

incerteza, relatando a..7 *et seqq.*
reporting uncertainty

incerteza, sumário do procedimento para avaliação e expressão da..8
summary of procedure for evaluating and expressing uncertainty

incertezas, arredondamento de.................................7.2.6
rounding of uncertainties

incertezas, dígitos significativos para.......................7.2.6
significant digits for uncertainties

independência..5.1, C.3.7
independence

independentes, repetições.......................................F.1.1.2
independent repetitions

influência aleatória, grandezas de.............F.1.1.3, F.1.1.4
random influence quantities

influência, grandeza de....3.1.5, 3.1.6, 3.2.3, 4.2.2, B.2.10
influence quantity

informações, para avaliação Tipo B, conjunto de
3.3.5 nota,4.3.1, 4.3.2, 5.2.5
pool of information for a Type B evaluation

ISO...i, ii, v, A.3, B.1
ISO

ISO 3534-1..2.1, C.l
ISO 3534-1

ISO, Grupo Técnico Consultivo em Metrologia (ISO/TAG4)..v
ISO Technical Advisory Group on Metrology (ISO/TAG 4)

ISO/TAG 4..v
ISO/TAG 4

ISO/TAG 4/WG 3...v
ISO/TAG 4/WG 3

ISO/TAG 4/WG 3, **termos de referência da**...................v
ISO/TAG 4/WG 3**,** terms of reference of

IUPAC...i, ii, v, B.l
IUPAC

IUPAP..i, ii, v, B.l
IUPAP

L

laboratórios nacionais de metrologia ou de padrões......v
laboratories, national metrology or standards

Laplace-Gauss, distribuição de..............................C.2.14
Laplace-Gauss distribution

legal, metrologia..3.4.5
legal metrology

limite de segurança.....................*veja* segurança, limite de
safety limit

limites para uma grandeza de entrada.4.3.7, 4.3.9, 4.4.5, 4.4.6, F.2.3.3
bounds on an input quantity

limites, superior e inferior, sobre uma grandeza de entrada..*veja* limites sobre uma grandeza de entrada
upper and lower limits, on an input quantity

M

máxima, princípio da entropia........................4.3.8 nota 2
principle of maximum entropy

máximo, limites de..................................*veja* limites sobre uma grandeza de entrada
maximum bounds

média..*veja* média aritmética
average

média..C.2.9, C.3.1
mean

média aritmética...........................4.1.4 nota, 4.2.1, C.2.19
arithmetic mean

medição..3.1, 3.1.1, B.2.5
measurement

medição e sua incerteza, formatos para relatar um resultado de...................................7.2.2, 7.2.4
measurement result and its uncertainty, formats

disponibilidade de informação da descrição do resultado de uma medição e sua incerteza..................7.1.1, 7.1.3
measurement result and its uncertainty, availability of information describing a

medição e sua incerteza, relatando em detalhe um resultado de...7.1.4, 7.2.7
reporting in detail a measurement result and its uncertainty

medição, exatidão de.................*veja* exatidão de medição
accuracy of measurement

medição, hierarquia da..7.1.1
measurement hierarchy

medição, método de....................*veja* método de medição
method of measurement

medição, modelo matemático da..............................3.1.6, 3.4.1, 3.4.2, 4.1, 4.1.1, 4.1.2
mathematical model of the measurement

medição, papel da ANOVA na.....................H.5.3 *et seqq.*
role of ANOVA in measurement

medição, princípio de................*veja* princípio de medição
principle of measurement

medição, procedimento de........3.1.1, 7.1.2, B.2.8, F.1.1.2
measurement procedure

medição, resultado de uma....*veja* resultado de uma medição
result of a measurement

medições, para as quais os princípios do *Guia* se aplicam, espectro de...1.1
spectrum of measurements to which the principles of the Guide apply

mensurando..1.2,3.1.1, 3.1.3, B.2.19, D.1, D.1.1, D.1.2, D.3.4
measurand

mensurando, definição ou especificação do
veja mensurando
definition or specification of the measurand

mensurando, incerteza devido à definição incompleta do.................*veja* incerteza devido a definição incompleta do mensurando
uncertainty due to incomplete definition of the measurand

mensurando, melhor medição possível do...............D.3.4
best possible measurement of the measurand

mensurando, muitos valores do................................D.6.2
many values of the measurand

mensurando, valor do.....................................3.1.1 3.1.3
value of the measurand

mensurandos relacionados, covariância dos
veja correlacionadas, estimativa de saída ou grandezas
covariance of related measurands

mensurável, grandeza..B.2.1
measurable quantity

método de medição..3.1.1, B.2.7
method of measurement

método de medição, incerteza do...................*veja* incerteza do método de medição
uncertainty of the method of measurement

método de medição, unidade dependente do.............H.6
unit dependent on the method of measurement

metrologia legal................................*veja* legal, metrologia
legal metrology

mínima, incerteza............................*veja* incerteza mínima
minimum uncertainty

mínimos quadrados, método dos
4.2.5, G.3.3, H.3, H.3.1, H.3.2
method of least squares

modelo matemático da medição.................................*veja* medição, modelo matemático da
mathematical model of the measurement

momento central de ordem *q* C.2.13, C.2.22, E.3.1 nota 1
central moment of order q

N

não linear, relação funcional.....................*veja* funcional não linear, relação
nonlinear functional relationship

não corrigido, resultado..B.2.12
uncorrected result

nível da confiança.................Preâmbulo, 0.4, 2.2.3 nota 1, 2.3.5 notas 1 e 2, 3.3.7, 4.3.4, 6.2.2, 6.2.3, 6.3.1,6.3.3, G, G.1.1, G.1.3, G.2.3, G.3.2, G.3.4, G.4.1, G.6.1, G.6.4, G.6.6
level of confidence

nível mínimo da confiança......................................F.2.3.2
minimum level of confidence

normal, distribuição.....................4.2.3 nota 1, 4.3.2 nota, 4.3.4 4.3.6, 4.3.9 nota 1, 4.4.2, 4.4.6, C.2.14, E.3.3, F.2.3.3, G.1.3, G.1.4, G.2.1 G.2.3, G.5.2 nota 2
normal distribution

O

observações repetidas..................3.1.4 3.1.6, 3.2.2, 3.3.5, 4.2.1, 4.2.3, 4.3.1, 4.4.1, 4.4.3, 5.2.3, E.4.2, E.4.3, F.1, F.1.1, F.1.1.1, F.1.1.2, G.3.2
repeated observations

observações simultâneas, pares independentes de..5.2.3, C.3.4, F.1.2.2, H.2.2, H.2.4, H.4.2
independent pairs of simultaneous observations

OIML..i, ii, v, A.3, B.1
OIML

Organização Internacional da Metrologia Legal *veja* OIML
International Organization of Legal Metrology

Organização Internacional de Normalização.....*veja* ISO
International Organization for Standardization

P

padrão como medidas de incerteza, desvios..............*veja* incerteza, desvios padrão como medidas de
standard deviations as measures of uncertainty

padrão experimental agrupado, desvio.....................*veja* variância, estimativa agrupada de
pooled experimental standard deviation

padrão experimental da média, desvio....................4.2.3, B.2.17 nota 2
experimental standard deviation of the mean

padrão experimental da média, incerteza do desvio *veja* incerteza do desvio padrão experimental da média
uncertainty of the experimental standard deviation of the mean

padrão experimental, desvio.........................4.2.2, B.2.17
experimental standard deviation

padrão, desvio........................3.3.5, C.2.12, C.2.21, C.3.3.
standard deviation

padrão, propagação dos desvios............E.3, E.3.1, E.3.2
propagation of standard deviations

padrão, propagação de múltiplos de desvios............E.3.3
propagation of multiples of standard deviations

padrão relativa, incerteza...5.1.6
relative standard uncertainty

padrão, avaliação Tipo A da incerteza *veja* Tipo A, da incerteza, avaliação
Type A evaluation of standard uncertainty

padrão, avaliação Tipo B da incerteza *veja* Tipo B, da incerteza, avaliação
Type B evaluation of standard uncertainty

padrão, ilustração gráfica da avaliação da incerteza..4.4 *et seqq.*
graphical illustration of evaluating standard uncertainty

padrão, incerteza...................................2.3.1, 3.3.5, 3.3.6 4.1.5, 4.1.6, 4.2.3, D.6.1, E.4.1
standard uncertainty

parâmetro..C.2.7
parameter

parciais, derivadas..5.1.3
partial derivatives

população...C.2.16
population

precisão...B.2.14 nota 2
precision

princípio de medição...B.2.6
principle of measurement

probabilidade...3.3.5, 4.3.7 4.3.9, C.2.1, E.3.5, E.3.6, F.2.3.3
probability

probabilidade de abrangência...............*veja* abrangência, probabilidade de
coverage probability

probabilidade subjetiva..................................3.3.5, D.6.1
subjective probability

probabilidade, convolução das distribuições de 4.3.9 nota 2,G.1.4 G.1.6, G.2.2, G.6.5
convolving probability distributions

probabilidade, distribuição de...........3.3.4, 4.1.1 nota 1, 4.1.6, 4.2.3 nota 1, 4.4.1, 4.4.4, C.2.3, E.4.2, G.1.4, G.1.5
probability distribution

probabilidade, função densidade de....3.3.5, 4.3.8 nota 2, 4.4.2, 4.4.5, 4.4.6, C.2.5, F.2.4.4
probability density function

probabilidade, função massa de................................C.2.6
probability mass function

propagação da incerteza, lei de..................*veja* incerteza, lei de propagação da
law of propagation of uncertainty

propagação de erro, lei geral de.........................*veja* erro, lei geral de propagação de
general law of error propagation

R

Recomendação INC-1 (1980)........................i, v, 0.5, 0.7, 3.33, 6.1.1, 6.1.2, 6.3.3, A.1, A.3, E, E.2.3, E.3.7
Recommendation INC-1 (1980)

Recomendação-1 (CI-1981) CIPM...i, 0.5, 6.1.1, A.2, A.3
Recommendation 1 (CI-1981), CIPM

Recomendação-1 (CI-1986) CIPM....0.5, 6.1.1, 6.1.2, A.3
Recommendation 1 (CI-1986), CIPM

referência, certificação de materiais de.........H.5, H.5.3.2
certification of reference materials

relativo, erro..B.2.20
relative error

repetições independentes....*veja* independentes, repetições
independent repetitions

repetidas, observações............*veja* observações repetidas
repeated observations

repetitividade de resultados de medições..............B.2.15
repeatability of results of measurement

repetitividade, condições de................3.1.4, B.2.15 nota 1
repeatability conditions

reprodutibilidade dos resultados de medição........B.2.16
reproducibility of results of measurements

resultado de uma medição......................1.3, 3.1.2, B.2.11
result of a measurement

resultado não corrigido.........*veja* não corrigido, resultado
uncorrected result

resultado corrigido......................*veja* corrigido, resultado
corrected result

S

saída ou grandezas correlacionadas, estimativas de..*veja* correlacionadas, estimativas de saída ou grandezas
correlated output estimates or quantities

saída, estimativa de................................4.1.4, 4.1.5, 7.2.5
output estimate

saída, grandeza de..4.1.2
output quantity

segurança, limite de..6.3.1 nota
safety limit

sensibilidade, determinação experimental dos coeficientes de...5.1.4
experimental determination of sensitivity coefficients

sensibilidade, coeficientes de...........................5.1.3, 5.1.4
sensitivity coefficients

Sistema Internacional de Unidades (SI).............0.3, 3.4.6
International System of Units (SI)

sistemático...................................3.3.3, E.1.3, E.3.4 E.3.7
systematic

sistemático, efeito..................................3.2.3, 3.2.4, 3.3.1, 3.3.2, 3.3.3, D.6.1, E.1.1, E.3, E.4.4
systematic effect

sistemático, erro..................................3.2.1, 3.2.3, B.2.22
systematic error

Student, distribuição de................................C.3.8, G.3.2
Student's distribution

superior, termos de ordem............5.1.2 nota, E.3.1, H.1.7
higher order terms

T

***t*, distribuição**......................4.2.3 nota 1, C.3.8, G.3, G.3.2, G.3.4, G.4.1, G.4.2, G.5.4, G.6.2
t-distribution

***t*, fator-**
E.3.3, G.3.2, G.3.4, G.4.1, G.5.4, G.6.2, G.6.4, G.6.6
t-factor

***t*, quantis da distribuição**...................................G.3.4 nota
quantiles of the *t*-distribution

Taylor, séries de.....5.1.2, E.3.1, G.1.5, G.4.2, H.1.7, H.2.4
Taylor series

Teorema Central do Limite........G.1.6, G.2, G.2.1, G.2.3, G.6.2, G.6.5, G.6.6
Central Limit Theorem

avaliação Tipo A da covariância................................5.2.3
Type A evaluation of covariance

avaliação Tipo A (da incerteza)......................2.3.2, 3.3.3, 3.3.5, 4.1.6, 4.2, 4.2.1, 4.2.8, 4.3.2, 4.4.1, 4.4.3, E.3.7, F.1, F.1.1.1, F.1.2.4
Type A evaluation (of uncertainty)

Tipo A, incerteza padrão......................3.3.5, 4.2.3, C.3.3
Type A standard uncertainty

Tipo A, incerteza padrão combinada
7.2.1, G.4.1 nota 3
Type A combined standard uncertainty

Tipo A, variância...4.2.3
Type A variance

Avaliação Tipo B (da incerteza).......................2.3.3, 3.3.3 3.3.5, 4.1.6, 4.3, 4.3.1, 4.3.11, 4.4.4, 4.4.6, E.3.7, F.2 *et seqq.*
Type B evaluation (of uncertainty)

Tipo B, incerteza padrão........................3.3.5, 4.3.1, C.3.3
Type B standard uncertainty

Tipo B, incerteza padrão combinada
7.2.1, G.4.1 nota 3
Type B combined standard uncertainty

Tipo B, necessidade para avaliações do....................F.2.1
Type B evaluations, need for

Tipo B, variância...4.3.1
Type B variance

Tipo B da covariância, avaliação..............................5.2.5
Type B evaluation of covariance

tolerância, intervalo estatístico de................C.2.30 nota 2
statistical tolerance interval

U

União Internacional de Física Pura e Aplicada
veja IUPAP
International Union of Pure and Applied Physics

União Internacional de Química Pura e Aplicada
veja IUPAC
International Union of Pure and Applied Chemistry

unidade, uso de um valor adotado de um padrão de medição como uma..............................3.4.6, 4.2.8 nota
use of an adopted value of a measurement standard as a unit

unilateral, intervalo de confiança............................C.2.28
one sided confidence interval

V

valor de uma grandeza....................................3.1.1, B.2.2
value of a quantity

variância..............3.1.7, 4.2.2, 4.2.3, C.2.11, C.2.20, C.3.2
variance

variância combinada..3.3.6, 5.1.2
combined variance

variância da média..4.2.3, C.3.2
variance of the mean

variância de Allan...4.2.7 nota
Allan variance

variância experimental (ou estimada de)
4.2.2, H.3.6 nota
experimental variance (or estimate of)

variância experimental da média,..................4.2.3, C.3.2
experimental variance of the mean

variância relativa..5.1.6
relative variance

variância relativa combinada....................................5.1.6
relative combined variance

variância, análise de.....................................*veja* ANOVA
analysis of variance

variância, estimativa agrupada de (ou desvio padrão experimental agrupado)............4.2.4, 4.2.8 nota, H.1.3.2, H.3.6 nota, H.5.2.2, H.5.2.5, H.6.3.1, H.6.3.2 nota pooled estimate of variance (or pooled experimental standard deviation)

variada...C.2.2
variate

variável aleatória centrada C.2.10
centred random variable

verdadeiro convencional de uma grandeza, valor.....*veja* convencional de uma grandeza, valor verdadeiro
conventional true value of a quantity

verdadeiro de uma grandeza, valor
2.2.4, 3.1.1 nota, B.2.3, D, D.3, D.3.1, D.3.4, D.3.5, E.5.1, E.5.4
true value of a quantity

VIM...2.1, 2.2.3, 2.2.4, B.1
VIM

Vocabulário Internacional de Termos Fundamentais e Gerais de Metrologia...*veja* VIM
International vocabulary of basic and general terms in metrology

W

Welch-Satterthwaite, fórmula de
G.4.1, G.4.2, G.6.2, G.6.4
Welch-Satterthwaite formula