MAE0221 - Probabilidade
Décima segunda lista de exercícios

1. Lança-se uma moeda equilibrada até observar 100 caras. Determine a probabilidade de que sejam necessários, no mínimo, 226 lançamentos.

2. Seja X_n uma variável aleatória com função densidade de probabilidade

$$f_n(t) = \frac{n}{4(n-1)} 1_{(-1,\frac{-1}{n})}(x) + \frac{3n}{4(n-1)} 1_{(\frac{1}{n},1)}(x).$$

   a) Obtenha a função característica de X_n, $\psi_n(t)$.

   b) Calcule $\lim \psi_n(t)$. O limite é uma função característica? Justifique.

3. Seja $(X_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuidas. Qual o limite em distribuição de

$$\sqrt{n}(\frac{\overline{X}_n - \mu}{S_n}),$$

   onde $\overline{X}_n = \frac{\sum_{k=1}^n X_k}{n}$ e $S_n^2 = \frac{\sum_{k=1}^n (X_i - \overline{X}_n)^2}{n}$.

4. Sejam $(X_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias i.i.d. com $E[X_1] = \mu_X$ e $Var(X_1) = \sigma_X^2$ e $(Y_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias i.i.d. com $E[Y_1] = \mu_Y$ e $Var(Y_1) = \sigma_Y^2$. Suponha que os X_j e os Y_k sejam independentes e que $\mu_X \neq 0$. Qual o limite em distribuição de

$$Z_n = \sqrt{n}(\frac{\overline{Y}_n}{\overline{X}_n} - \frac{\mu_Y}{\mu_X}).$$

   Obs: $Z_n = \sqrt{n}(\frac{\mu_X \overline{Y}_n - \mu_Y \overline{X}_n}{\mu_X \overline{X}_n})$.

5. Sejam $(X_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias i.i.d. com $E[X_1] = 0$ e $Var(X_1) = \sigma^2$ e $(Y_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias i.i.d. com $E[Y_1] = \mu$.

   Use o Teorema de Slutsky para provar que

$$\overline{Y}_n + \sqrt{n}\overline{X}_n \to^D N(\mu, \sigma^2).$$