MAE0221 - Probabilidade
Décima primeira lista de exercícios

1. Verifique, nos casos abaixo, se a sequência de variáveis aleatórias $(X_n)_{n\geq 1}$ converge em distribuição. Em caso afirmativo, qual a distribuição limite: a) $X_n \sim U(0,n)$. b) X_n t́al que

   $F_{X_n}(x) = 0, \quad se \quad x < \frac{1}{n};$
   $F_{X_n}(x) = \frac{1}{2}(x+1-\frac{1}{n}), \quad se \quad \frac{1}{n} \leq x < 1+\frac{1}{n};$
   $F_{X_n}(x) = 1, \quad se \quad x \geq 1+\frac{1}{n}.$

2. Seja $(X_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias com distribuições geométricas de parâmetros $\frac{\lambda}{n}, \lambda > 0$. Seja $Y_n = \frac{X_n}{n}$. Prove que a sequência $(Y_n)_{n\geq 1}$ converge em distribuição. Qual o limite?

3. Seja $(X_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias com

   $$P(X_n = k) = \frac{2(k+1)}{(n+1)(n+2)}, \quad k \in \{0,1,...,n\}.$$

   Prove que $\frac{X_n}{n}$ converge em distribuição para X,onde

   $$F_X(x) = x^2 \quad se \quad 0 \leq x < 1 \quad e \quad 0 \quad c.c..$$

4. Seja $(X_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias i.i.d com distribuição uniforme no intervalo $(0,1)$. Defina $Y_n = \min\{X_1,...,X_n\}$, $Z_n = \max\{X_1,...,X_n\}$, $U_n = nY_n$ e $V_n = n(1-Z_n)$. Prove que:

   a) $Y_n \rightarrow^P 0$ e $Z_n \rightarrow^P 1$.

   b) $U_n \rightarrow^D W$ e $V_n \rightarrow^D W$ onde W tem distribuição exponencial padrão.