ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA METALÚRGICA E DE MATERIAIS

INTRODUÇÃO À CIÊNCIA DOS MATERIAIS PARA ENGENHARIA

PMT3110

DISTRIBUIÇÃO DE WEIBULL

(Texto extraído do livro: Ciência e Engenharia dos Materiais, Donald R. Askeland e Pradeep P. Phulé – Tradução da 4ª ed. Americana, Cengage Learning, São Paulo, 2008, páginas 190-196)

7-5 Distribuição de Weibull para Análise de Resistência à Fratura

Para se avaliar a resistência dos materiais cerâmicos com confiabilidade, é preciso empregar uma abordagem estatística. A resistência mecânica de cerâmicas e vidros depende do tamanho e da distribuição de tamanhos das descontinuidades, como poros e microtrincas, principalmente se ocorrem na superfície. Em tais materiais, as descontinuidades são geradas durante o processamento, quando as cerâmicas estão sendo produzidas. Elas podem também resultar das operações de acabamento, como usinagem, esmerilhamento etc. Os vidros desenvolvem microtrincas como resultado da interação com o vapor d'água presente no ar. Se a alumina ou outras cerâmicas forem testadas com diferentes tamanhos e geometrias, será encontrada uma grande dispersão dos valores medidos, ainda que a composição nominal seja a mesma. De maneira semelhante, se a resistência mecânica das fibras de vidro de uma determinada composição for ensaiada, será possível constatar que, na média, as fibras curtas são mais resistentes que as fibras longas. A resistência mecânica de cerâmicas e vidros depende da probabilidade de se encontrar descontinuidades que ultrapassem o tamanho crítico. Assim, essa probabilidade aumenta no caso de componentes ou fibras maiores. Como resultado, a resistência de componentes ou fibras maiores tende a ser menor que a de componentes menores ou de fibras mais curtas. Em materiais metálicos ou poliméricos, que apresentam grandes deformações plásticas, o efeito das descontinuidades e da distribuição de seus tamanhos não é sentido com a mesma intensidade existente para as cerâmicas e os vidros. Nesses materiais, as trincas iniciadas a partir de descontinuidades são atenuadas pela deformação plástica. Nos materiais dúcteis, portanto, a dispersão estatística da resistência mecânica é pequena e obedece a uma distribuição gaussiana. Por outro lado, a resistência de cerâmicas e vidros varia bastante. Desse modo, se testarmos muitas amostras idênticas de vidro de sílica ou cerâmica de alumina, os dados apresentarão um grande espalhamento, em razão das variações na distribuição de tamanho e localização das descontinuidades que podem levar à fratura. Por isso, a resistência de materiais frágeis, como cerâmicas e vidros, não é gaussiana, mas dada pela **distribuição estatística de Weibull**. Trata-se de uma distribuição estatística que modela melhor a dispersão da resistência nos materiais frágeis, resultante da aleatoriedade dos tamanhos de descontinuidades. Esse comportamento decorre da existência de defeitos com tamanho crítico suficiente para fraturar a peça, tal como o elo mais fraco de uma corrente.

A distribuição de Weibull da Figura 7-11 descreve a fração das amostras que fraturam em diferentes tensões aplicadas. Sob baixas tensões, apenas uma pequena parte das amostras contém defeitos grandes o suficiente para fraturar. Assim, a maioria fratura com uma tensão intermediária. Por outro lado, algumas amostras contêm apenas descontinuidades muito pequenas e só fraturam com uma grande tensão aplicada. De todo modo, é sempre preferível uma distribuição estatística bastante estreita, a fim de se obter mais confiança do comportamento esperado.

Vamos considerar um corpo-de-prova com volume V, que apresenta uma distribuição de descontinuidades e está submetido a uma tensão σ. Além disso, considere que esse volume V contém n elementos com volume V_0 e que cada elemento possui a mesma distribuição de defeitos. Pode-se mostrar que a probabilidade de sobrevivência dos corpos-de-prova $P(V_0)$, ou seja, a probabilidade de que um material frágil não frature sob a tensão aplicada σ é dada por:

$$P(V_0) = \exp\left[-\left(\frac{\sigma - \sigma_u}{\sigma_0}\right)^m\right] \tag{7-6}$$

A probabilidade de falha $F(V_0)$, que é o complemento da probabilidade de sobrevivência, pode ser expressa da seguinte forma:

$$F(V_0) = 1 - P(V_0) = 1 - \exp\left[-\left(\frac{\sigma - \sigma_u}{\sigma_0}\right)^m\right] \tag{7-7}$$

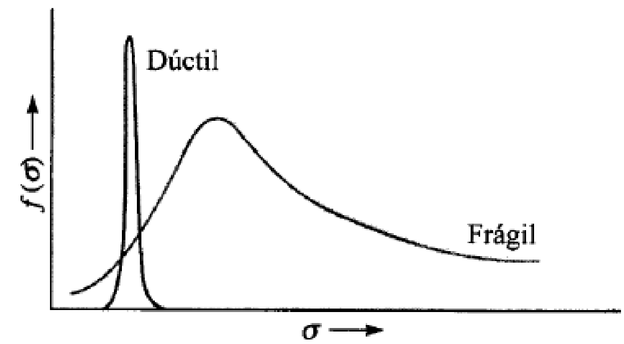

Figura 7-11 Distribuição de Weibull de amostras que fraturam sob ação da tensão aplicada.

Nas Equações 7-6 e 7-7, σ é a tensão aplicada, σ_0 é a resistência característica (geralmente considerada equivalente à resistência média), e σ_u é a tensão na qual a probabilidade de falha é nula, ou seja, a probabilidade de sobrevivência é 1,0. Nessas equações, m é o módulo de Weibull. Em teoria, os valores desse módulo podem variar de 0 a ∞. O **módulo de Weibull** (m) é uma medida da dispersão do parâmetro medido de um material, que, neste caso, é a resistência mecânica. Nos metais e ligas, esse módulo é aproximadamente 100, enquanto nas cerâmicas tradicionais, como tijolos e xícaras, ele é inferior a 3. As cerâmicas avançadas, cujo processamento é bastante rigoroso e, por conseguinte, resulta num número de descontinuidades menor, têm um módulo de Weibull maior, entre 5 e 10.

No caso das cerâmicas e outros sólidos frágeis, podemos adotar que $\sigma_u = 0$. Isso porque não há um valor de tensão, ainda que pequeno, no qual pode-se afirmar que o material frágil estará, estatisticamente, imune à fratura. No caso de *materiais frágeis*, portanto, as Equações 7-6 e 7-7 podem ser reescritas da seguinte forma:

$$P(V_0) = \exp\left[-\left(\frac{\sigma}{\sigma_0}\right)^m\right] \tag{7-8}$$

e

$$F(V_0) = 1 - P(V_0) = 1 - \exp\left[-\left(\frac{\sigma}{\sigma_0}\right)^m\right] \tag{7-9}$$

Assim, a partir da Equação 7-8, apenas para uma tensão aplicada σ nula, a probabilidade de sobrevivência será de 100%. Com o aumento da tensão aplicada σ, a probabilidade de sobrevivência $P(V_0)$ diminui, chegando próximo de zero para valores elevados da tensão aplicada. Podemos também descrever outro significado do parâmetro σ_0. Na Equação 7-8, quando $\sigma = \sigma_0$, a probabilidade de sobrevivência torna-se $1/e \cong 0{,}37$. Assim, em materiais frágeis σ_0 é a tensão em que a probabilidade de sobrevivência é de 0,37 ou 37%, ou, equivalentemente, em que a probabilidade de falha é de 0,63 ou 63%.

É possível ajustar as Equações 7-8 e 7-9 para levar em conta o efeito do tamanho das amostras. De fato, pode-se demonstrar que para uma mesma probabilidade de sobrevivência, amostra de tamanho maior requer uma tensão aplicada menor, ou seja, é menos resistente. Isso corresponde ao já descrito para o caso das fibras de vidro longas, que são menos resistentes que as fibras de vidro curtas.

Os exemplos a seguir ilustram como utilizar as curvas de sobrevivência de Weibull na análise de propriedades mecânicas dos materiais e no projeto de componentes.

EXEMPLO 7-7 *Módulo de Weibull do Aço e da Cerâmica de Alumina*

A Figura 7-12 mostra as probabilidades acumuladas de falha em escala bilogarítmica e a resistência de um aço-carbono comum com 0,2%C e de duas cerâmicas de alumina. A alumina foi preparada por processamento convencional de pós, com compactação em prensa e sinterização a altas temperaturas. Foi incluído também o gráfico de uma cerâmica de alumina preparada com técnicas especiais, que gera uma distribuição estatística com menor dispersão devido a um tamanho de partículas mais uniforme, motivo pelo qual ocorre aumento da resistência. As amostras foram identificadas como tamanho de partícula controlado (CPS, *controlled particle size*). Comente as curvas de probabilidade apresentadas.

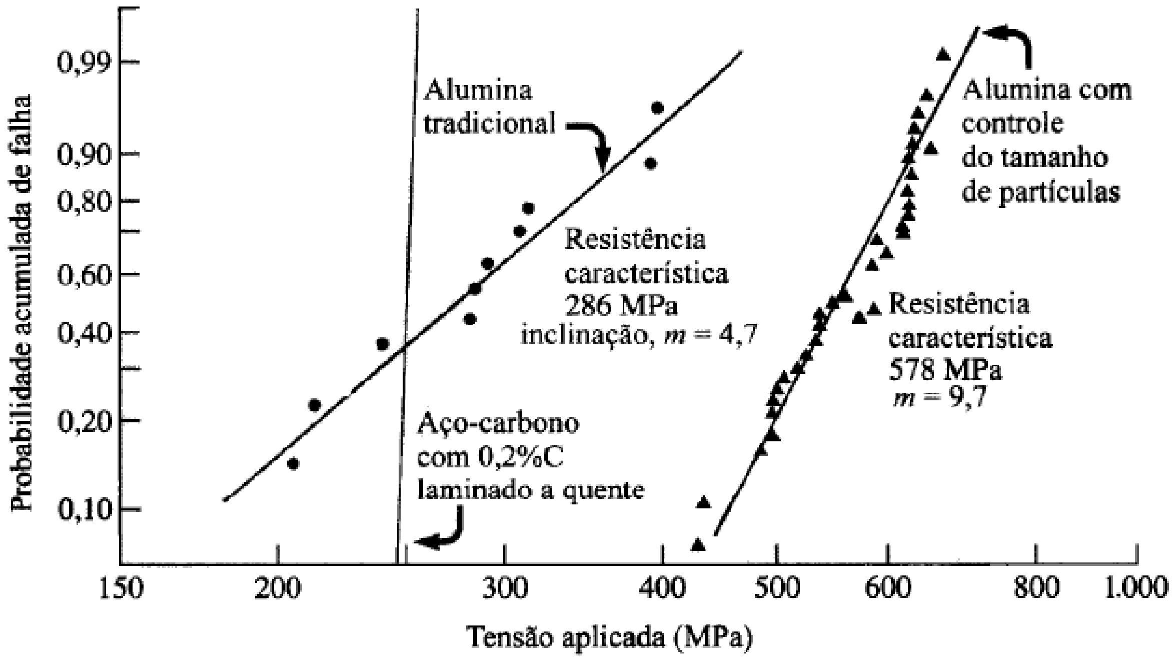

Figura 7-12 Probabilidade acumulada de falha de amostras sob tensão ajustada com a distribuição de Weibull. Os materiais são duas aluminas produzidas por dois métodos e um aço de baixo teor de carbono. Obtém-se uma boa confiabilidade de projeto com módulos de Weibull elevados, pois indicam menor dispersão e maior confiabilidade. (*Fonte:* Mechanical Behavior of Materials, *de M.A. Meyers e K.K. Chawla, 1999. Copyright © 1999 Prentice-Hall. Reproduzida com permissão da Pearson Education, Inc., Upper Saddle River, NJ*)

SOLUÇÃO

A probabilidade acumulada teórica de falha em função da tensão aplicada numa escala bilogarítmica resulta numa reta. A inclinação da reta fornece a medida da dispersão, ou seja, o módulo de Weibull.

No caso do aço-carbono comum, a linha é quase vertical, pois o valor de m é elevado. Isso significa que há pouca dispersão dos resultados, entre 5% e 10%, na resistência oferecida pelas amostras do aço-carbono com 0,2% de carbono.

No caso da cerâmica de alumina preparada com o processamento tradicional, a dispersão é elevada pois o valor de m é baixo, em torno de 4,7.

A cerâmica preparada com técnicas de processamento avançadas tem o valor de m mais elevado (próximo de 9,7) que o da cerâmica tradicional. Esse comportamento indica uma distribuição de ocorrência de fratura mais uniforme. A resistência característica (σ_0) é também mais elevada (cerca de 578 MPa), indicando a necessidade de tensão mais elevada para fraturar essa cerâmica.

EXEMPLO 7-8 *Resistência da Cerâmica e Probabilidade de Falha*

Uma cerâmica avançada produzida em laboratório possui um módulo de Weibull $m = 9$. Sua resistência à flexão é de 250 MPa, e a probabilidade acumulada de falha é $F = 0{,}4$ para este valor do carregamento. Qual será a resistência flexural, caso a probabilidade de falha seja de 0,1?

SOLUÇÃO

Como assumimos que todas as amostras testadas têm o mesmo tamanho, as equações são as mesmas, pois não há efeito de tamanho a considerar neste caso. Podemos utilizar então o símbolo V para o volume das amostras, em vez de V_0. Vamos começar com a Equação 7-9, já que estamos lidando com um material frágil:

$$F(V) = 1 - P(V) = 1 - \exp\left[-\left(\frac{\sigma}{\sigma_0}\right)^m\right]$$

ou

$$1 - F(V) = \exp\left[-\left(\frac{\sigma}{\sigma_0}\right)^m\right]$$

Aplicando o logaritmo nos dois lados da equação para obter

$$\ln[1 - F(V)] = \left[-\left(\frac{\sigma}{\sigma_0}\right)^m\right]$$

Aplicando novamente o logaritmo em ambos os lados,

$$\ln\{\ln[1 - F(V)]\} = -m(\ln\sigma - \ln\sigma_0) \qquad (7\text{-}10)$$

Podemos eliminar o sinal negativo no lado direito da Equação 7-10, reescrevendo-a da seguinte forma:

$$\ln\left[\ln\left(\frac{1}{1 - F(V)}\right)\right] = m(\ln\sigma - \ln\sigma_0) \qquad (7\text{-}11)$$

Com $F = 0{,}4$, $\sigma = 250$ MPa e $m = 9$, temos a Equação 7-12

$$\ln\left[\ln\left(\frac{1}{1 - 0{,}4}\right)\right] = 9(\ln 250 - \ln\sigma_0) \qquad (7\text{-}12)$$

Portanto, $\ln\{(\ln 1/0{,}6)\} = \ln\{(\ln 1{,}66667)\} = \ln\{0{,}510826\} = -0{,}67173 = 9(5{,}52146 - \ln\sigma_0)$.

Assim, $\ln\sigma_0 = 5{,}52146 + 0{,}07464 = 5{,}5961$, o que nos dá um valor $\sigma_0 = 269{,}4$ MPa. Essa é a resistência característica da cerâmica. Com um nível de tensão de 269,4 MPa, a probabilidade de sobrevivência é de 0,37 (ou seja, uma probabilidade de falha de 0,63). Para uma probabilidade de falha (F) menor, a tensão a que a cerâmica pode ser submetida (σ) também deve se reduzir.

Queremos agora determinar o valor de σ para $F = 0{,}1$. Sabemos que $m = 9$ e $\sigma_0 = 269{,}4$ MPa e precisamos obter o valor de σ. Vamos, então, substituir esses valores na Equação 7-11:

$$\ln\left[\ln\left(\frac{1}{1-0{,}1}\right)\right] = 9\,(\ln\sigma - \ln 269{,}4)$$

$$\ln\left[\ln\left(\frac{1}{0{,}9}\right)\right] = 9\,(\ln\sigma - \ln 269{,}4)$$

$$\ln(\ln 1{,}11111) = \ln(0{,}105361) = -2{,}25037 = 9\,(\ln\sigma - 5{,}596097)$$

$$\therefore\ -0{,}25004 = \ln\sigma - 5{,}596097 \quad \text{ou}$$

$$\ln\sigma = 5{,}346056$$

ou $\sigma = 209{,}8$ MPa. Como esperado, quando baixamos a probabilidade de falha, no caso para 0,1, reduzimos também o valor da tensão que pode ser suportado pelo material.

EXEMPLO 7-9 *Determinação do Módulo de Weibull*

Sete corpos-de-prova de carbeto de silício foram testados, e as seguintes tensões de fratura foram encontradas: 23, 49, 34, 30, 55, 43 e 40 MPa. Estime o módulo de Weibull referente a esses dados, utilizando a Equação 7-11. Discuta a confiabilidade da cerâmica.

SOLUÇÃO

Em primeiro lugar, convém ressaltar que necessitamos de um grande número de amostras para qualquer tipo de análise estatística. Assim, embora sete amostras sejam poucas em termos estatísticos, o objetivo deste exemplo é apenas ilustrar o procedimento de cálculo.

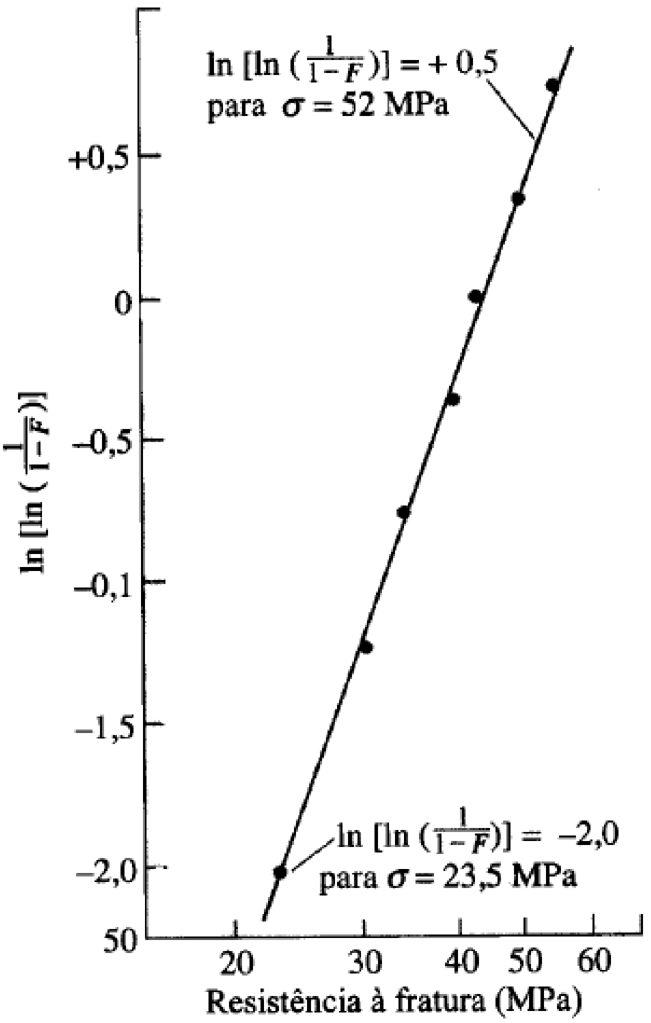

Figura 7-13 Probabilidade acumulada de falha em relação à tensão de fratura. Observe que a resistência à fratura foi traçada em uma escala logarítmica.

Um método simples para determinar o comportamento da cerâmica consiste em ordenar os resultados por valores crescentes, no caso de 1 a 7. A amostra com a menor resistência à fratura recebe o valor 1. O número total de espécimes é n (neste caso, 7). Assim, a probabilidade de falha F corresponde à classificação numérica dividida por $n + 1$. Podemos então traçar $\ln[\ln(1/1 - F(V_0))]$ em função de $\ln \sigma$. A tabela e a Figura 7-13 mostram o resultado desses cálculos. Observe que a tensão de fratura foi traçada em escala logarítmica.

Iésima Amostra	σ (MPa)	$F(V_0)$	$\ln\{\ln 1/[1 - F(V_0)]\}$
1	23	1/8 = 0,125	−2,013
2	30	2/8 = 0,250	−1,246
3	34	3/8 = 0,375	−0,755
4	40	4/8 = 0,500	−0,367
5	43	5/8 = 0,625	−0,019
6	49	6/8 = 0,750	+0,327
7	55	7/8 = 0,875	+0,732

A inclinação da reta ajustada, ou seja, o módulo de Weibull m, corresponde a (empregando os dois pontos indicados na curva):

$$m = \frac{0,5-(-2,0)}{\ln(52)-\ln(23,5)} = \frac{2,5}{3,951-3,157} = 3,15$$

O baixo valor do módulo de Weibull (3,15) indica que a cerâmica tem uma grande dispersão da resistência à fratura, dificultando a utilização confiável em aplicações de grande responsabilidade.