4300373 - Laboratório de Eletromagnetismo

Apêndice 2

CURVAS CARACTERÍSTICAS

Este texto foi extraído da apostila de
COMPLEMENTOS DE FÍSICA EXPERIMENTAL (1ª PARTE)
de J. H. Vuolo, 2001.

1 - Curvas características

Um gráfico da corrente elétrica *i* em função da tensão *V* é chamado curva característica do bipolo, *se este gráfico servir para caracterizar o comportamento do bipolo* sob determinadas condições ambientais. Para se obter a curva característica, aplica-se uma tensão *V* ao bipolo e mede-se a corrente *i*. Assim, do ponto de vista operacional, a tensão *V* é que deve ser considerada como variável independente e a curva característica deve ser o gráfico *i x V*; que é o gráfico geralmente apresentado em livros de eletrônica e manuais de fabricantes. Entretanto, do ponto de vista conceitual, parece preferível usar *V x* i como curva característica; como mostram as Equações 3.1 e seguintes, por exemplo. Neste texto, será sempre usado o gráfico *V x i*. Nem sempre um bipolo possui curva característica, pois o gráfico *V x i* pode não ser definido, como é mostrado a seguir. A relação entre a tensão *V* e a corrente *i* em um bipolo pode ser escrita na seguinte forma geral :

$$V = V(\ldots, \int i dt, i, \frac{di}{dt}, \ldots, \theta_1, \theta_2, \ldots) \qquad (3.1)$$

Isto é, a tensão *V* é função da corrente *i*, das derivadas e integrais da corrente, além de depender de certos parâmetros θ_1, θ_2, . . . , tais como temperatura, luminosidade, pressão e outros.
Um bipolo tem curva característica quando a relação geral 3.1 *não envolver derivadas ou integrais da corrente elétrica*. Em outras palavras, o bipolo tem curva característica se a relação entre tensão e corrente for da forma geral:

$$V = V(i, \theta_1, \theta_2 \ldots) \qquad (3.2)$$

Assim, se as condições ambientais relevantes forem fixadas, de forma que θ_1, θ_2, . . . são constantes, resulta uma relação definida entre *V* e *i*. Neste caso, existe um gráfico *V x* i bem definido que serve para caracterizar o bipolo nas condições fixadas.

Não é difícil ver que, se a relação geral 3.1 envolve derivadas e integrais da corrente, não é possível nenhum gráfico *V x i* que caracterize o bipolo. Um exemplo simples é o *indutor ideal*[1], para o qual a relação entre a tensão e a corrente é da forma:

$$V = L\frac{di}{dt} \qquad (3.3)$$

onde *L* é um parâmetro chamado *autoindutância* ou, simplesmente, *indutância*. A corrente *i* não influi diretamente na tensão. Uma corrente muito alta, mas constante (*i* = constante) resulta em tensão nula (*V* = 0). Correntes baixas, mas variando rapidamente com o tempo resultam em grandes valores de *V*. Em resumo, um gráfico de *V x i* não tem nenhum significado no sentido de caracterizar o indutor. Um outro exemplo de bipolo que não pode ter curva característica é o *capacitor*. Para um capacitor, a relação entre tensão e corrente num instante *t* é da forma:

$$V = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i\,dt$$

onde *C* é um parâmetro chamado *capacitância*. Neste caso, a tensão *V* independe do valor da corrente no instante considerado. Também neste caso, um gráfico de *V x i* não tem nenhum significado no sentido de caracterizar o capacitor.
Os chamados elementos resistivos são discutidos a seguir e são exemplos de bipolos que têm curvas características. Pilhas e baterias também são exemplos de bipolos que têm curvas características.

2 - Elementos resistivos

Um elemento resistivo é um bipolo com relação entre a tensão *V* e corrente *i* da forma geral:

$$V = Ri \qquad (3.5)$$

onde *R* é definida como resistência elétrica do bipolo. A resistência *R* pode ser função de certos parâmetros físicos $\theta_1, \theta_2, \ldots$ isto é,

$$R = R(\theta_1, \theta_2, \ldots) \qquad (3.6)$$

onde os parâmetros $\theta_1, \theta_2, \ldots$, representam fatores que afetam o valor da resistência *R*, tais como temperatura, luminosidade e outros. Em alguns casos, um desses parâmetros pode ser a própria corrente *i* ou a tensão *V*. Um dos aspectos a serem considerados é que a grande maioria dos materiais apresenta grande variação de resistência com a temperatura. O *coeficiente de temperatura* para uma resistência *R* é definido por

[1] Para indutor real *V* depende da derivada da corrente e da própria corrente.

$$\alpha = \frac{1}{R}\frac{dR}{dT} \qquad (3.7)$$

Onde T é a temperatura. Para variação ΔT não muito grande na temperatura, pode-se usar a aproximação:

$$\alpha \cong \frac{1}{R}\frac{dR}{dT} \qquad \text{ou} \qquad R = R_o(1 + \Delta T) \qquad (3.8)$$

onde R_0 é a resistência inicial. Deve ser observado que uma variação pequena na temperatura significa que o coeficiente de temperatura varia muito pouco no intervalo de temperaturas considerado.

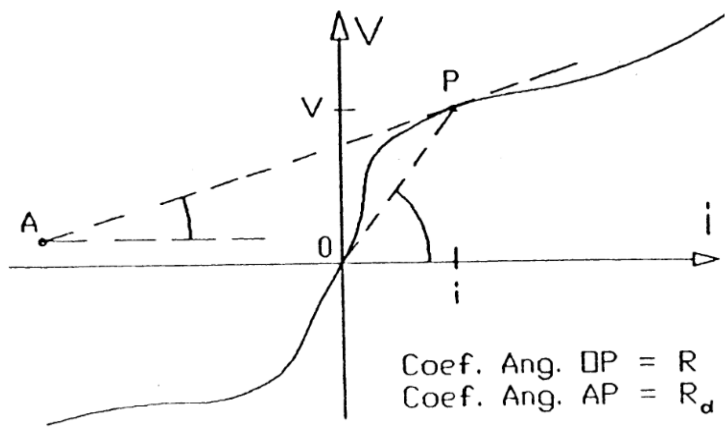


Figura 3.1: *Curva característica de um elemento resistivo hipotético*.

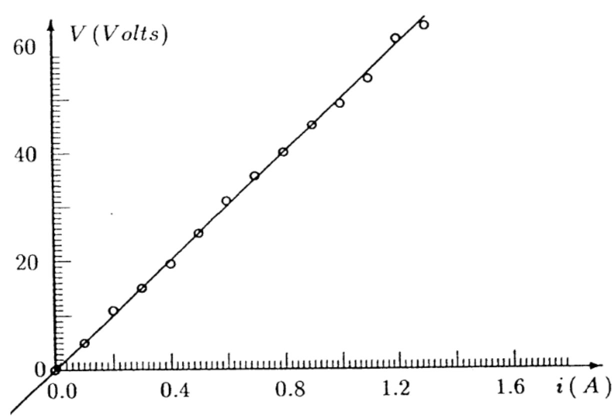


Figura 3.2: *Curva característica para um resistor*.

A definição 3.5 para elemento resistivo assegura uma propriedade importante dos elementos resistivos que é $V = 0$ quando $i = 0$. Isto é, a curva característica de um elemento resistivo, por mais complicada que seja, passa pela origem do sistema de coordenadas.
Num ponto P qualquer da curva característica a resistência R é definida pela Equação 3.9:

$$R = \frac{V}{i} \tag{3.9}$$

Assim, na Figura 3.1, R é o coeficiente angular da reta que passa pelos pontos O e P.
A *resistência dinâmica* é definida em cada ponto da curva característica por:

$$R_d = \frac{dV}{di} \tag{3.10}$$

A *resistência dinâmica* também é chamada de *resistência incremental* ou *resistência diferencial*. Na Figura 3.1, a *resistência dinâmica* é o coeficiente angular da reta tangente à curva característica no ponto P.
A *resistência dinâmica* pode ter valor positivo, negativo ou nulo.
Um bipolo é chamado *elemento resistivo linear* ou *elemento ôhmico*, quando obedece a *Lei de Ohm* em sua forma mais simples:

$$V = Ri \quad ; \text{ onde } R \text{ é uma constante} \tag{3.11}$$

Conforme a nomenclatura adotada aqui, a Equação 3.9 é apenas uma definição de resistência, enquanto que a Equação 3.11 é a *Lei de Ohm*[2]. Mas nem sempre é esta a nomenclatura usada. Às vezes, a Equação 3.9, ou uma forma equivalente[3], é que é chamada de Lei de Ohm.
Evidentemente, a curva característica de um elemento resistivo linear é uma reta passando pela origem, como mostra a Figura 3.2. O coeficiente angular da reta é a resistência R.
Quando a resistência não é constante, o elemento resistivo é chamado elemento resistivo *não linear* ou *não Ôhmico*. Alguns exemplos de elementos resistivos não lineares são discutidos a seguir.
Existem elementos resistivos que são intrinsecamente não lineares. Isto é, mesmo que todos os fatores ambientais externos sejam mantidos constantes, a resistência pode apresentar grandes variações. Isto ocorre, por exemplo, em diodos semicondutores e varistores. Entretanto, existem elementos resistivos que são usualmente considerados não lineares embora a variação da resistência seja um simples efeito de variação de condições ambientais externas. Por exemplo, um filamento metálico de uma lâmpada apresenta grande aumento na resistência por conta de um grande aumento na temperatura, quando a corrente aumenta. Por outro lado, deve ser observado que é impossível manter constante a temperatura de um filamento da lâmpada. Um *LDR* apresenta grandes variações na resistência em função de variações na luminosidade incidente.

---

[2] Esta é a nomenclatura adotada nas Referências 1, 2 e 3, por exemplo.

[3] Tal como $\vec{j} = \sigma \vec{E}$, por exemplo.

Existem ainda elementos resistivos com relação entre tensão *V* e corrente *i* bastante complicadas e não muito repetitivas de forma que é difícil falar em curva característica. Um exemplo é um tubo de descarga com gás, que pode ter comportamento pouco repetitivo, com curva característica que não volta sobre si mesma. Exemplos de tubos desde cargas são lâmpadas neon e fluorescentes.
As Figuras 3.3, 3.4, 3.5 e 3.6 mostram exemplos de elementos resistivos não lineares.

3 - Elementos resistivos Comerciais

Além de resistores, vários elementos resistivos são disponíveis comercialmente. A seguir são descritos resumidamente alguns deles. Uma descrição detalhada do princípio de funcionamento dos Componentes semicondutores é dada na Referência 5. Curvas características e especificações são dadas em manuais de fabricantes.

Resistor

Resistor ou *resistência* são construídos de forma, a obedecer a Lei de Ohm dentro de certas condições normais de utilização.
Os resistores comerciais de uso geral mais comuns são os chamados *resistores de carbono, resistores de fio e resistores de filme depositado*

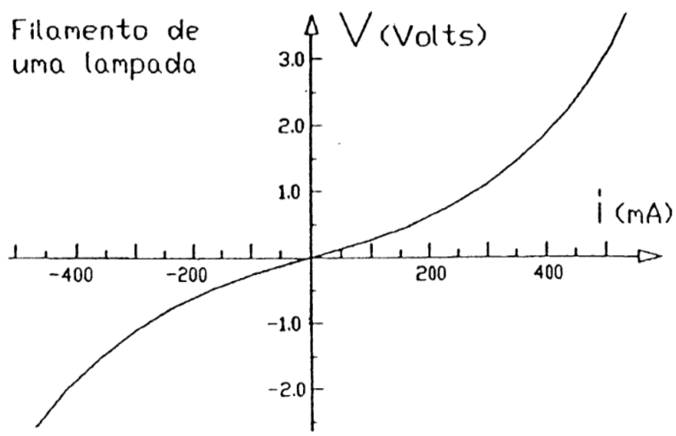


Figura 3.3: *Curva característica do filamento de uma lâmpada.*

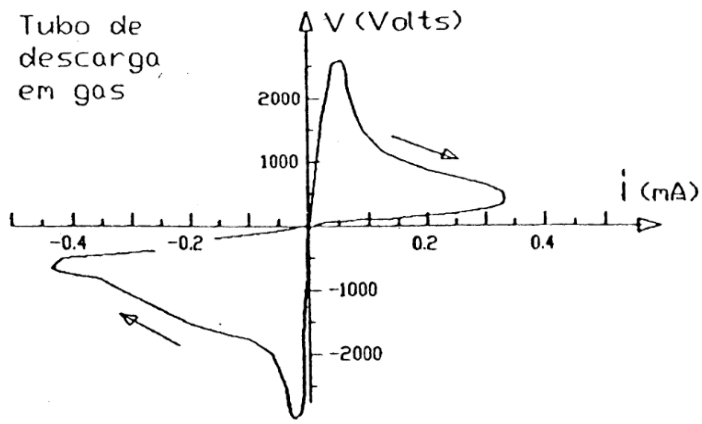


Figura 3.4: *Curva característica de um tubo de descarga a gás.*

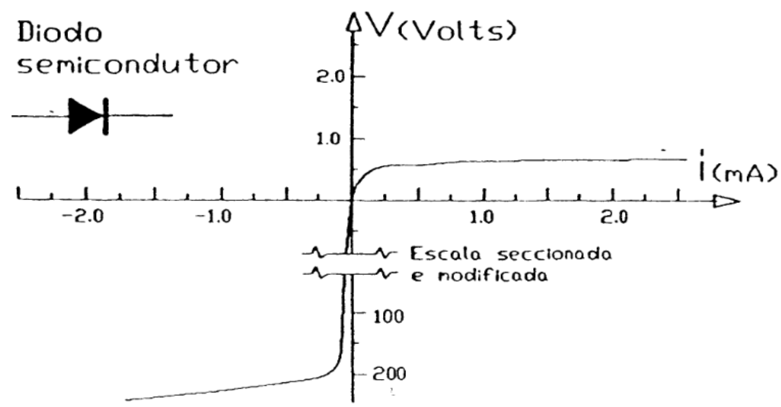


Figura 3.5: *Curva característica de um diodo semicondutor.*

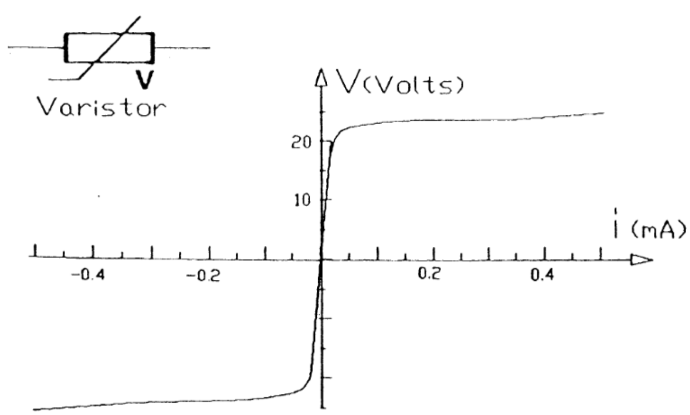


Figura 3.6: *Curva característica de um varistor.*

Os resistores de carbono são construídos de carbono e um material amalgamante, moldados na forma de uma barra cilíndrica. Os resistores de fio são construídos enrolando-se fio de liga metálica[4] sobre uma barra cerâmica. Os resistores de filme são construídos depositando-se metais, carbono ou óxidos metálicos sobre uma barra de cerâmica ou vidro. Além desses, existem muitos resistores especiais, para usos específicos e feitos de materiais diversos.
As especificações mais importantes de um resistor comercial são:

- Valor nominal *R*.

- Tolerância, expressa como percentagem sobre o valor nominal. Pode ser entendida como um *limite de erro L* do valor nominal.

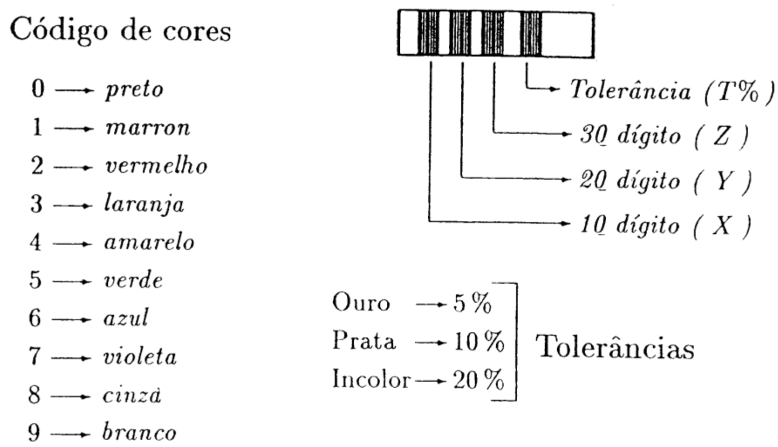
- Potência nominal, que é a máxima potência que, em certas condições normais de utilização pode ser dissipada no resistor sem provocar aquecimento excessivo.

As especificações de um resistor comercial vêm escritas diretamente no resistor (por exemplo, 47 Ω — 10% — 10 W.) ou são dadas por meio de um código de cores mostrado na Figura 3.7.
Muitas vezes, é necessário converter o *limite de erro* (tolerância) para incerteza padrão, que é a incerteza dada na forma de desvio padrão. Conforme discutido na Seção 5, para distribuição gaussiana de erros e nível de confiança de 95% para a tolerância (limite de erro), a *incerteza padrão* é dada por:

$$\sigma \cong \frac{L}{2} \tag{3.12}$$

Quanto à tolerância, deve ser sempre lembrado que, em geral, não é suficiente conhecer a resistência *R* com grande acurácia para eliminar erros. Em circuitos, os resistores podem se aquecer, dependendo das condições, e a resistência pode sofrer alterações. Por exemplo, pode ser inútil medir a resistência de um resistor comercial de 10% com precisão melhor que 1%, devido a variações com a temperatura.
Sempre deve ser lembrado que o aquecimento excessivo do resistor, mesmo quando não provoca danos, pode alterar o valor da resistência, a ponto de invalidar a tolerância especificada.

[4] Em geral, é usada uma liga de níquel e cromo, de alta resistividade.



$$R = XY \times 10^{Z} \pm T\%$$

Figura 3.7: *Código de cores para resistores comerciais.*

Além de resistores de valor fixado, existem disponíveis os *potenciômetros* e *trimpots* que são resistores de valor ajustável pelo usuário. Estes dispositivos são muito usados em controles de instrumentos e também quando é necessário ajustar o valor de uma resistência, depois que um circuito é montado.

Diodo

Um *diodo ideal* é um dispositivo que conduz perfeitamente a corrente elétrica em um sentido e não conduz no sentido inverso. No caso de corrente direta, a resistência é nula, enquanto que para corrente reversa a resistência é infinita. A maior utilidade de um diodo consiste em permitir passagem de corrente elétrica em um único sentido. Isto é, o diodo funciona como uma válvula que se abre para um determinado sentido da corrente elétrica e se fecha quando a corrente tenta fluir em sentido oposto. Um *diodo real* apresenta várias limitações, tais como,

- *Tensão direta* não nula, significando resistência não nula para corrente direta. Isto também significa que uma potência $P = Vi$ é dissipada no próprio diodo.

- *Resistência reversa* finita, significando que existe uma pequena corrente reversa.

- Existe um valor máximo para a *tensão reversa*, além do qual o diodo conduz significativamente.

A curva característica de um diodo semicondutor de silício é mostrada na Figura 3.5. Para este diodo, existe uma tensão direta de $\approx 0{,}7Volt$ quando o diodo está conduzindo uma corrente direta alta. Além disso, a máxima tensão reversa é $200V$. Existem também diodos de germânio que têm características piores que as do silício para uso geral. Entretanto, a tensão direta para um diodo de

germânio de $\approx 0{,}4 Volt$ quando o diodo está conduzindo uma corrente direta alta. Isto pode ser vantajoso para algumas aplicações.
Um exemplo de utilização do diodo é a chamada *ponte retificadora*[5],que converte uma corrente (ou tensão) de sentido qualquer em corrente (ou tensão) de sentido único.
Um outro uso de diodos é para a proteção de circuitos contra tensões elevadas na entrada de dispositivos delicados tais como o galvanômetros e entradas de amplificadores operacionais. Se dois diodos de silício invertidos são ligados paralelamente à uma entrada de um dispositivo qualquer[6], a tensão não pode exceder significativamente 2 x 0,7 Volt.
Qualquer que seja o sentido da tensão, um dos diodos entra em condução, mantendo a tensão próxima a 0,7 Volt, como mostra a Figura 3.5
O *diodo zener* ou *diodo avalanche* tem uma máxima tensão reversa melhor definida, chamada tensão *zener*. Diodos *zener*, com tensões *zener* desde alguns Volts até mais de 100 Volts são disponíveis. A curva característica é semelhante à de um diodo normal. Este componente é útil para gerar uma tensão de referência bem definida (a tensão *zener*).

LED

Um *LED* (*ligth emitting diode*) é um diodo construído de forma a emitir luz visível ou infravermelha sob tensão direta. Os *LED's* comuns emitem luz nas cores vermelha, verde e amarela[7].
A partir de *LED's*, podem ser construídos lasers *LEID*. Para isso, é necessário espelhar duas faces do cristal, de forma a se obter uma cavidade ressonante. Um dos espelhos permite uma pequena transmissão da luz para se obter um feixe de saída. Tais lasers são construídos para luz visível e infravermelha

Varistor

Um *varistor* (*variable resistor*) é um resistor cuja resistência varia com a tensão aplicada. Às vezes, são também chamados de *MOV* (*metal oxide varistor*).
A curva característica de um *varistor* é mostrada esquematicamente na Figura 3.6.
Os componentes denominados *VDR* (*voltage dependent resistor*) têm características semelhantes à do *varistor*.
Varistores são utilizados usualmente como proteção contra tensões elevadas. A curva característica mostra que o *varistor* não permite que uma tensão aplicada seja maior que $\approx V_A$. Assim, se um *varistor* é ligado em paralelo a um dispositivo qualquer, a tensão não pode exceder significativamente a tensão V_A.

---

[5] Ver Exercícios 1.Os símbolos são dados na Figura 3.10.
[6] Ver Exercício 2 e Figura 3.13.
[7] Uma Curva característica é mostrada na Figura 3.12

LDR

Um foto-resistor, também chamado *LDR* (*light dependent resistor*), é um resistor cuja resistência depende da luminosidade. Os *LDR's* são construídos a partir de semicondutores fotossensíveis tais como PbS, CdS, CdSe ou Bi_2S_3. Aproximadamente, a relação entre a resistência R e a intensidade luminosa ϕ é da forma geral:

$$R = A\phi^{-\alpha} \tag{3.12}$$

Termistor

Um *termistor* é um resistor cuja resistência é bastante dependente da temperatura. Assim, o *termistor* pode ser usado como um sensor de temperatura. Geralmente, os termistores são chamados de *PTC* ou *NTC* (*positive ou negative temperature coefficient*), conforme o resistor tenha coeficiente de temperatura positivo ou negativo. Um coeficiente de temperatura é positivo quando a resistência aumenta com a temperatura, conforme mostra a Equação 3.11.

4 - Solução de circuitos - Método gráfico

Para elemento resistivo não linear, a curva característica é, em geral, uma curva complicada que não pode ser descrita por nenhuma expressão matemática simples. Neste caso, fica difícil resolver um circuito sem usar métodos numéricos. Nos casos mais simples, pode-se usar um método gráfico, como explicado a seguir.
Uma situação típica é a do circuito mostra na Figura 3.8, Onde ε é uma *fem* conhecida, bem como o valor da resistência R. O elemento X é conhecido apenas por sua curva característica. Os ramos A e B do circuito podem ser considerados separados, cada um com sua própria curva característica (V_f x i_f e V_x x i_x, respectivamente). Quando os ramos A e B são conectados, a tensão V e a corrente i nos circuitos são iguais, de forma que esses valores devem estar na intersecção das curvas características. Isto é, se as curvas características são desenhadas em um mesmo gráfico, a solução para V e i é intersecção das curvas, como mostrado na Figura 3.9. Um exemplo de aplicação do método é explicado no Exercício3.

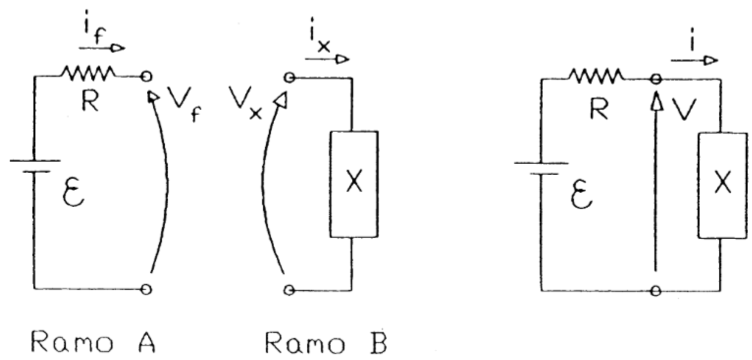


Figura 3.8: *O elemento X tem curva característica conhecida.*

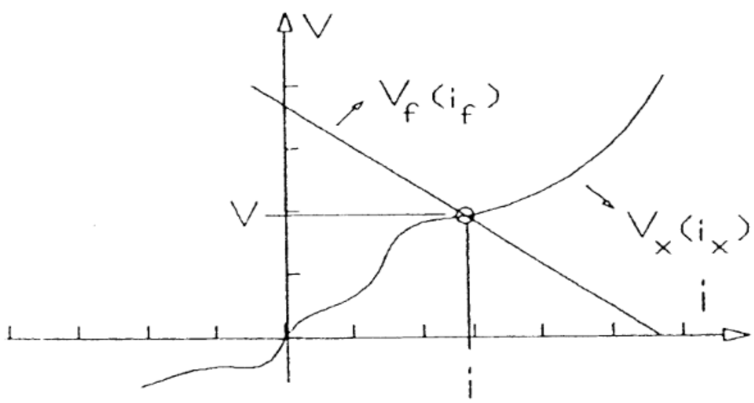


Figura 3.9: *Solução gráfica para o circuito da Figura 3.8.*

5 - COMO OBTER O DESVIO

1) Verifique no manual do aparelho qual é o erro que o Fabricante fornece. Caso não obtenha este dado, utilize a metade da menor divisão da escala do aparelho (se o mostrador for digital tomar um dígito do menos significativo que, sempre, é o do extremo direito).

2) Caso a grandeza *x* seja medida n vezes, calcule o desvio padrão através de uma calculadora ou pela fórmula:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(\bar{x} - x_i)^2}{n-1}}$$

onde $x_i\,(i = 1,2,3,...,n)$ são os valores medidos e $\bar{x}$ é a média aritmética.

3) Propagação dos desvios: se uma grandeza *G* que se quer determinar é função de outras grandezas *x,y,z*,..., independentes entre si, o desvio σ_G, deve ser determinado propagando-se os desvios $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, ...$ através de:

$$\sigma_G = \sqrt{(\frac{\partial G}{\partial x}\sigma_x)^2 + (\frac{\partial G}{\partial y}\sigma_y)^2 + (\frac{\partial G}{\partial z}\sigma_z)^2 + ...}$$

<u>Exemplos práticos:</u>

a) $G = x \pm y \rightarrow \sigma_G = \sqrt{\sigma_x{}^2 + \sigma_y{}^2}$

b) G = Cx , onde C é uma constante $\rightarrow \sigma_G = C\sigma_x$

c) $G = x^\alpha y^\beta z^\gamma$ com α, β e γ constantes positivos ou negativos

$$\sigma_G = G\sqrt{(\frac{\alpha.\sigma_x}{x})^2 + (\frac{\beta.\sigma_y}{y})^2 + }(\frac{\gamma.\sigma_z}{z})^2 +$$