

1. TÓPICO 1

1.1. Funções Características.

Se a e b são constantes reais, $z = a + ib$, onde $i = \sqrt{-1}$ define um número complexo. O conjugado de z é $\bar{z} = a - ib$. O produto $z\bar{z} = a^2 + b^2$ e $|z| = \sqrt{z\bar{z}}$ define a norma de z .

Se uma função real tem expansão em série de potência com raio de convergência positivo, podemos usar série de potência para definir uma função de variável complexa.

O desenvolvimento de Taylor, em torno de um ponto a , de uma função $g(\cdot)$ infinitamente diferenciável é

$$g(t) = \sum_{n=0}^{\infty} g^{(n)}(a) \frac{(t-a)^n}{n!}.$$

O desenvolvimento da função exponencial, $g(t) = e^t$, em torno do ponto 0 é

$$e^t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}$$

e definimos

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!},$$

para qualquer número complexo z . Temos $e^{z_1}e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$ para quaisquer números complexos z_1 e z_2 . em particular se $z = e^{it}$

$$\begin{aligned} e^{it} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(it)^n}{n!} = 1 + it - \frac{t^2}{2} - \frac{it^3}{3!} + \frac{t^4}{4!} + \frac{it^5}{5!} \dots \\ &= \left(1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{4!} - \dots\right) + i \left(t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \dots\right) = \cos(t) + i\sin(t). \end{aligned}$$

Observe que se $f(t) = \cos(t)$ então $f(0) = 1$,

$$\begin{array}{cccc} f'(t) = -\sin(t) & f''(t) = -\cos(t) & f'''(t) = \sin(t) & f^{(4)}(t) = \cos(t) \\ f'(0) = 0 & f''(0) = -1 & f'''(0) = 0 & f^{(4)}(0) = 1 \end{array}$$

e a série de Taylor em torno do ponto 0 é

$$\cos(t) = \left(1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{4!} - \dots\right)$$

assim

$$\cos(t) = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} \quad \text{e} \quad \text{sen}(t) = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}.$$

Temos também que

$$|e^{it}| = \sqrt{e^{it}e^{-it}} = \sqrt{(\cos(t) + i\text{sen}(t))(\cos(t) - i\text{sen}(t))} = \sqrt{\cos^2(t) + \text{sen}^2(t)} = 1.$$

Se $f(t)$ e $g(t)$ são funções de t a valores reais então $h(t) = f(t) + ig(t)$ define uma função complexa em t com $h'(t) = f'(t) + ig'(t)$.

Exemplo 1.1.

$$e^{zt} = e^{at+ibt}.$$

Exemplo 1.2.

$$\begin{aligned} (e^{zt})' &= (e^{at+ibt})' = (e^{at}e^{ibt})' = (e^{at}(\cos(bt) + i\text{sen}(bt)))' = (e^{at}\cos(bt) + ie^{at}\text{sen}(bt))' \\ &= (ae^{at}\cos(bt) - be^{at}\text{sen}(bt)) + i(ae^{at}\text{sen}(bt) + be^{at}\cos(bt)) \\ &= e^{at}[a(\cos(bt) + i\text{sen}(bt)) + ib(\cos(bt) + i\text{sen}(bt))] = e^{at}[(a+ib)e^{ibt}] = (a+ib)e^{at+ibt} = ze^{zt}, \end{aligned}$$

ou seja, $(e^{zt})' = ze^{zt}$.

Exemplo 1.3.

$$(e^{it})' = ie^{it}.$$

Se $\int_a^b f(t)dt$ e $\int_a^b g(t)dt$ existem, temos $\int_a^b h(t)dt = \int_a^b f(t)dt + i\int_a^b g(t)dt$.

$$\int_a^b e^{zt} dt = \frac{e^{zt}}{z} \Big|_a^b = \frac{e^{zb} - e^{za}}{z},$$

pelo teorema fundamental do cálculo. Como consequência,

$$\int_a^b e^{it} dt = \frac{e^{ib} - e^{ia}}{i}.$$

Note que

$$\begin{aligned} \int_a^b e^{it} dt &= \int_a^b \cos(t) + i\text{sen}(t) dt = \int_a^b \cos(t) dt + i \int_a^b \text{sen}(t) dt \\ &= \text{sen}(t) \Big|_a^b - i \cos(t) \Big|_a^b = (\text{sen}(b) - \text{sen}(a)) - i(\cos(b) - \cos(a)) \\ &= \frac{\cos(b) - \cos(a) + i\text{sen}(b) - i\text{sen}(a)}{i} = \frac{e^{ib} - e^{ia}}{i}. \end{aligned}$$

Se X e Y são variáveis aleatórias (reais), podemos escrever uma v.a. complexa como $Z = X + iY$.

Definição 1.4.

$$\mathbb{E}[Z] = \mathbb{E}[X] + i\mathbb{E}[Y],$$

sempre que $\mathbb{E}[X]$ e $\mathbb{E}[Y]$ estão bem definidas. Z tem esperança finita se e só se $\mathbb{E}|Z| < \infty$ e neste caso $|\mathbb{E}[Z]| \leq \mathbb{E}|Z|$.

$$\mathbb{E}[a_1Z_1 + a_2Z_2] = a_1\mathbb{E}[Z_1] + a_2\mathbb{E}[Z_2],$$

é válida onde a_1 e a_2 são números complexos e Z_1 e Z_2 são variáveis aleatórias complexas com esperanças finitas.

Definição 1.5. Seja X uma v.a. (real), $t \in \mathbb{R}$, então $|e^{itX}| = 1$ e $\varphi_X(t) = \mathbb{E}[e^{itX}]$, $-\infty < t < \infty$ existe.

Definiremos a função característica de X por $\varphi_X(t) = \mathbb{E}[e^{itX}]$.

Note que:

P1: $\varphi_X(0) = 1$.

$$|\varphi_X(t)| = |\mathbb{E}[e^{itX}]| \leq \mathbb{E}[|e^{itX}|] = \mathbb{E}[1] = 1.$$

P2: Se X é degenerada em θ , isto é, $P(X = \theta) = 1$, temos

$$\varphi_X(t) = e^{it\theta},$$

se $\theta = 0$ então $\varphi_X(t) = 1$.

P3: X é simétrica, em torno de 0, se $f(x) = f(-x)$

$$P(X \leq x) = P(X \geq -x) = P(-X \leq x) \leftrightarrow X \stackrel{D}{=} -X.$$

Então

$$\begin{aligned} \overline{\varphi_X(t)} &= \overline{\mathbb{E}[e^{itX}]} = \mathbb{E}[\cos(tX) - i\sin(tX)] = \mathbb{E}[\cos(t(-X)) + i\sin(t(-X))] \\ &= \varphi_{-X}(t) = \varphi_X(t) \leftrightarrow \text{a parte imaginária é zero.} \end{aligned}$$

Portanto X é simétrica em torno de zero se e só se $\varphi_X(t)$ é real.

P4: Se X é uma v.a. e a, b são constantes reais, então

$$\varphi_{a+bX}(t) = \mathbb{E}[e^{it(a+bX)}] = e^{ita}\mathbb{E}[e^{itbX}] = e^{ita}\varphi_X(bt)$$

Exemplo 1.6. Se $X \sim \exp(\lambda)$, então

$$\varphi_X(t) = \lambda \int_0^{\infty} e^{itx} e^{-\lambda x} dx = \lambda \int_0^{\infty} e^{-(\lambda-it)x} dx = \frac{\lambda}{\lambda-it} e^{-(\lambda-it)x} \Big|_0^{\infty} = \frac{\lambda}{\lambda-it}$$

Observe que $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-(\lambda-it)x} = 0$ pois $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-\lambda} = 0$ e e^{-itx} é limitado em x .

Exemplo 1.7. $Y \sim U(-1, 1)$

$$\varphi_Y(t) = \int_{-1}^1 \frac{e^{itx}}{2} dx = \frac{1}{2} \frac{e^{itx}}{it} \Big|_{-1}^1 = \frac{1}{2} \left(\frac{e^{it} - e^{-it}}{it} \right) = \frac{\text{sen}(t)}{t}.$$

Exemplo 1.8. $Y_1, \dots, Y_n, Y \stackrel{iid}{\sim} \text{Cauchy}$

$$\mathbb{E} [e^{itY}] = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} \cos(tx) dx = e^{-|t|}$$

e

$$\mathbb{E} \left[e^{it \frac{\sum_{i=1}^n Y_i}{n}} \right] = \mathbb{E} \left[\prod_{i=1}^n e^{i \frac{t}{n} Y_i} \right] \stackrel{ind}{=} \prod_{i=1}^n \mathbb{E} \left[e^{i \frac{t}{n} Y_i} \right] \stackrel{idt}{=} \prod_{i=1}^n e^{-|\frac{t}{n}|} = e^{-|t|}$$

então $\bar{Y}_n \sim \text{Cauchy}$ e $\bar{Y}_n \stackrel{D}{=} Y$.

Teorema 1.9. Se $\mathbb{E} [|X^k|] < \infty$, então $\varphi_X(t)$ possui n derivadas contínuas e

$$\varphi_X^{(k)}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} (ix)^k e^{itx} dF_X(x), \quad k = 1, \dots, n$$

e em particular $\varphi_X^k(0) = i^k \mathbb{E} [X^k]$

Teorema 1.10. $\varphi_X(t)$ é uniformemente contínua, isto é,

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta = \delta(\epsilon) > 0 \text{ tal que se } |t - s| < \delta \Rightarrow |\varphi_X(t) - \varphi_X(s)| < \epsilon.$$

Observação 1.11. Note que δ depende somente de ϵ . Uma função uniformemente contínua é contínua em todo ponto, mas a recíproca não vale: $f(x) = x^2$ é contínua na reta mas não é uniformemente contínua.

Teorema 1.12. Se X é uma v.a. e $Y = a + bX$, e $a, b \in \mathbb{R}$ então

$$\varphi_Y(t) = \mathbb{E} [e^{i(a+bX)t}] = \mathbb{E} [e^{iat} e^{ibXt}] = e^{iat} \mathbb{E} [e^{ibXt}] = e^{iat} \varphi_X(bt).$$

Um resultado importante é

$$\varphi_X(t) = \mathbb{E} [e^{itX}] = \mathbb{E} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(itX)^n}{n!} \right] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n \mathbb{E} [X^n] t^n}{n!}.$$

Exemplo 1.13. $X \sim N(0, \sigma^2)$, então

$$\mathbb{E}[X^{2k+1}] = 0 \quad \text{e} \quad \mathbb{E}[X^{2k}] = \frac{\sigma^{2k}(2k)!}{2^k k!}$$

$$\varphi_X(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^{2k} \mathbb{E}[X^{2k}] t^{2k}}{(2k)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\sigma^2 t^2/2)^k}{k!} = e^{-\frac{\sigma^2 t^2}{2}}.$$

Se $Y \sim N(\mu, \sigma^2)$

$$X = Y - \mu \sim N(0, \sigma^2)$$

$$Y = X + \mu$$

$$\varphi_Y(t) = e^{it\mu} \varphi_X(t) = e^{it\mu} e^{-\frac{\sigma^2 t^2}{2}} = \exp\left(it\mu - \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right)$$

Exemplo 1.14. $X \sim P(\lambda)$, logo, $\varphi_X(t) = e^{\lambda(e^{it}-1)}$

$$\varphi'_X(t) = \lambda e^{it} e^{\lambda(e^{it}-1)}$$

$$\varphi'_X(0) = \lambda i = i \mathbb{E}[X] \leftrightarrow \mathbb{E}[X] = \lambda$$

$$\varphi''_X(t) = \lambda i^2 e^{it} e^{\lambda(e^{it}-1)} + \lambda e^{it} i^2 \lambda e^{it} e^{\lambda(e^{it}-1)}$$

$$\varphi''_X(0) = \lambda i^2 + \lambda^2 i^2 = (\lambda + \lambda^2) i^2$$

$$i^2 \mathbb{E}[X^2] = (\lambda + \lambda^2) i^2 \leftrightarrow \mathbb{E}[X^2] = (\lambda + \lambda^2)$$

2. FÓRMULA DA INVERSÃO

Teorema 2.1. *Seja X uma v.a. com valores nos inteiros, ($\varphi_X(t) = \mathbb{E}[e^{itX}] = \sum_{j=-\infty}^{\infty} e^{itj} P(X=j)$). Então*

$$P(X=k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikt} \varphi_X(t) dt$$

Exemplo 2.2. Considere uma variável aleatória X com valores inteiros e com função característica $\varphi_X(t) = (pe^{it} + 1 - p)^n$. Qual a sua função de probabilidade.

Utilizando o teorema acima temos que

$$P(X=k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikt} (pe^{it} + 1 - p)^n dt =$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikt} \sum_{j=1}^n \binom{n}{j} (pe^{it})^j (1-p)^{n-j} dt =$$

$$\sum_{j=1}^n \binom{n}{j} (p)^j (1-p)^{n-j} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikt} e^{itj} dt = \binom{n}{k} (p)^k (1-p)^{n-k}.$$

Teorema 2.3. Se X e Y são independentes e $Z = X + Y$,

$$\varphi_Z(t) = \mathbb{E} [e^{it(X+Y)}] = \mathbb{E} [e^{itX}] \mathbb{E} [e^{itY}] = \varphi_X(t)\varphi_Y(t).$$

Teorema 2.4. Fórmula da Inversão

Se X é uma variável aleatória contínua com função característica $\varphi_X(t)$ integrável

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi_X(t)| dt < \infty.$$

Então sua função densidade de probabilidade é

$$f_X(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} \varphi_X(t) dt.$$

Exemplo 2.5. Seja X é uma variável aleatória com função densidade de probabilidade

$$f_X(x) = \frac{1}{2} e^{-|x|} \quad -\infty < x < \infty.$$

Estamos interessados em calcular sua função característica $\varphi_X(t)$:

$$\begin{aligned} \varphi_X(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \frac{1}{2} e^{-|x|} dx = \\ &= \int_{-\infty}^0 e^{itx} \frac{1}{2} e^x dx + \int_0^{\infty} e^{itx} \frac{1}{2} e^{-x} dx = \int_0^{\infty} e^{-itx} \frac{1}{2} e^{-x} dx + \int_0^{\infty} e^{itx} \frac{1}{2} e^{-x} dx = \\ &= \int_0^{\infty} e^{-x} \left(\frac{e^{-itx} + e^{itx}}{2} \right) dx = \int_0^{\infty} e^{-x} \cos tx dx. \end{aligned}$$

Contudo, integrando por partes obtemos

$$\int_0^{\infty} e^{-x} \cos tx dx = 1 - t^2 \int_0^{\infty} e^{-x} \cos tx dx$$

e concluímos que

$$\int_0^{\infty} e^{-x} \cos tx dx = \frac{1}{1+t^2} = \varphi_X(t).$$

Usando a fórmula da inversão, do teorema anterior, temos

$$\frac{1}{2} e^{-|x|} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} \frac{1}{1+t^2} dt.$$

$$e^{-|x|} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+t^2} dt.$$

$$e^{-|x|} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+t^2} dt.$$

e concluímos que a distribuição de Cauchy padrão tem função característica $\varphi_X(t) = e^{-|t|}$.

Exemplo 2.6. Se X é uma variável aleatória com distribuição $N(0, \sigma^2)$, a sua função característica é $\varphi_X(t) = e^{-\frac{\sigma^2 t^2}{2}}$, isto é

$$e^{-\frac{\sigma^2 t^2}{2}} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx.$$

Se, na expressão acima, substituirmos t por $-t$ e σ por $\frac{1}{\sigma}$, temos

$$e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\sigma^2 x^2}{2}} dx,$$

isto é

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} e^{-\frac{\sigma^2 x^2}{2}} dx.$$

Teorema 2.7. Teorema da Unicidade

Se duas variáveis aleatórias tem mesma função característica, então tem mesma função de distribuição.

Exemplo 2.8. Seja X uma variável aleatória com distribuição binomial de parâmetros n e p , $0 < p < 1$ e seja Y uma variável aleatória, independente de X , com distribuição binomial de parâmetros m e p , $0 < p < 1$. As funções características de X e Y são

$$\varphi_X(t) = (q + pe^{it})^n \quad e \quad \varphi_Y(t) = (q + pe^{it})^m$$

respectivamente, onde $q = 1 - p$.

Portanto $\varphi_{X+Y}(t) = (q + pe^{it})^{n+m}$ e concluímos que $X + Y$ tem distribuição binomial de parâmetros $n + m$ e p , $0 < p < 1$.

Exemplo 2.9. Se X é uma variável aleatória com função característica $\varphi_X(t) = \cos^2(t)$, qual sua função de probabilidade?

Observe que a função característica é real, isto é $\varphi_X(t) = E[\cos Xt]$.

Podemos, também, escrever que

$$\varphi_X(t) = \cos^2(t) = \frac{1 + \cos 2t}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2t.$$

Se definimos $X = 0$ com probabilidade $P(X = 0) = \frac{1}{2}$ e $X = 2$ com probabilidade $P(X = 2) = \frac{1}{2}$ obtemos, pelo teorema da unicidade, o resultado.

No que segue enunciaremos os teoremas que relacionam a convergência em distribuição com a convergência das respectivas funções características.

Teorema 2.10. Teorema de Helly-Bray

Sejam $(X_n)_{n \geq 1}$ e X variáveis aleatórias. Sejam $(F_n)_{n \geq 1}$ e F as suas respectivas funções de distribuições tais que $F_n \rightarrow^D F$. Então, para toda função g contínua e limitada temos

$$E[g(X_n)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) dF_n(x) \rightarrow_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x) dF(x) = E[g(X)].$$

Observação 2.11. Em particular, podemos aplicar o teorema acima para as funções $\cos(t)$ e $\text{sen}(t)$ que são contínuas e limitadas, obtendo

$$\begin{aligned} \varphi_{X_n}(t) &= E[e^{itX_n}] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dF_n(x) = \int_{-\infty}^{\infty} (\cos(tx) + i\text{sen}(tx)) dF_n(x) = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \cos(tx) dF_n(x) + i \int_{-\infty}^{\infty} \text{sen}(tx) dF_n(x) \rightarrow_{n \rightarrow \infty} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \cos(tx) dF(x) + i \int_{-\infty}^{\infty} \text{sen}(tx) dF(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dF(x) = \varphi_X(t). \end{aligned}$$

Exemplo 2.12. Se $f : (0, 1) \rightarrow \mathfrak{R}$ é uma função contínua e limitada, então podemos representar $f(t)$ por

$$f(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k}.$$

Claramente, a representação é resultado do teorema de Helly-Bray, quando consideramos variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com distribuição de Bernoulli de parâmetro t .

Teorema 2.13. Teorema da continuidade de Paul-Levy

Seja $(F_{X_n})_{n \geq 1}$ uma sequência de funções de distribuições e $(\varphi_{X_n})_{n \geq 1}$ a sequência de suas respectivas funções características. Se $\varphi_{X_n}(t)$ converge pontualmente para $\varphi(t)$ e φ é contínua no ponto 0, então:

a) Existe uma variável aleatória X , com função de distribuição F_X tal que $F_n \rightarrow^D F$ e

b) φ é função característica de X .

Exemplo 2.14. Seja $(X_n)_{n \geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias com $X_n \sim B(n, p)$ e tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} np = \lambda$.

A função característica de X_n é

$$\varphi_{X_n}(t) = (1 - p + pe^{it})^n = \left(1 - \frac{\lambda}{n} + \frac{\lambda}{n} e^{it}\right)^n = \left(1 - \frac{\lambda}{n}(e^{it} - 1)\right)^n$$

e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_{X_n}(t) = e^{\lambda(e^{it} - 1)} = \varphi_X(t)$$

que é contínua no ponto 0 e é a função característica de uma variável aleatória com distribuição de Poisson.

Exemplo 2.15. Seja $(X_n)_{n \geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias com $X_n \sim N(0, n)$ com função característica $\varphi_{X_n}(t) = e^{-\frac{t^2 n}{2}}$.

Assim

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_{X_n}(t) = 1 \text{ se } t = 0 \text{ e } 0 \text{ se } t \neq 0$$

que não é contínua em $t = 0$ e portanto não é função característica.

Observe que

$$P(X_n \leq x) = P\left(\frac{X_n}{\sqrt{n}} \leq \frac{x}{\sqrt{n}}\right) = P\left(Z \leq \frac{x}{\sqrt{n}}\right) \rightarrow_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2}$$

que não é função de distribuição.

Observação 2.16. Se z é um número complexo tal que $|z - 1| < 1$, podemos definir, através da série de Taylor

$$\ln z = (z - 1) - \frac{(z - 1)^2}{2} + \frac{(z - 1)^3}{3} - \dots$$

Portanto se se $|z - 1| < 1$ temos as propriedades usuais: $z = e^{\ln z}$, $\ln 1 = 0$. Se X é uma variável aleatória, a sua função característica $\varphi_X(t)$ é contínua, $\varphi_X(0) = 1$ e assim $\ln \varphi_X(t)$ é bem definida para t próximo de zero.

Se $E[X] = \mu < \infty$, então $\varphi'_X(0) = i\mu$. Portanto

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln \varphi_X(t)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln \varphi_X(t) - \ln \varphi_X(0)}{t} = \frac{d \ln \varphi_X(t)}{dt} \Big|_{t=0} = \frac{\varphi'_X(0)}{\varphi_X(0)} = i\mu.$$

Consequentemente temos

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln \varphi_X(t) - i\mu t}{t} = 0.$$

Suponha que $Var(X) = \sigma^2 < \infty$, então $\varphi''_X(0) = -E[X^2] = -(\mu^2 + \sigma^2)$.

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln \varphi_X(t) - i\mu t}{t^2} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{\varphi'_X(t)}{\varphi_X(t)} - i\mu}{2t} = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\varphi'_X(t) - i\mu \varphi_X(t)}{2t \varphi_X(t)} = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\varphi''_X(t) - i\mu \varphi'_X(t)}{2\varphi_X(t) + 2t \varphi'_X(t)} = \\ &= \frac{\varphi''_X(0) - i\mu \varphi'_X(0)}{2\varphi_X(0)} = \frac{-(\mu^2 + \sigma^2) - (i\mu)^2}{2} = -\frac{\sigma^2}{2}. \end{aligned}$$

Portanto

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln \varphi_X(t) - i\mu t}{t^2} = -\frac{\sigma^2}{2}.$$

Teorema 2.17. Teorema do Limite Central

Seja $(X_n)_{n \geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com média $E[X_1] = \mu$ e variância $\text{Var}(X_1) = \sigma^2 < \infty$. Então

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leq x\right) = P(Z \leq x), \quad -\infty < x < \infty.$$

onde $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ e Z tem distribuição normal padrão.

Demonstração. Seja $S_n^* = \frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$. então

$$\begin{aligned} \varphi_{S_n^*}(t) &= E[e^{itS_n^*}] = E\left[e^{it\left(\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\right)}\right] = \\ &= e^{-\frac{itn\mu}{\sigma\sqrt{n}}} E\left[e^{\frac{itS_n}{\sigma\sqrt{n}}}\right] = \\ &= e^{-\frac{itn\mu}{\sigma\sqrt{n}}} \left(\varphi_{X_1}\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)\right)^n. \end{aligned}$$

Portanto

$$\varphi_{S_n^*}(t) = \exp\left\{n\left[\ln \varphi_{X_1}\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right) - \frac{i\mu t}{\sigma\sqrt{n}}\right]\right\}.$$

Contudo

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} n\left[\ln \varphi_{X_1}\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right) - \frac{i\mu t}{\sigma\sqrt{n}}\right] &= \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{t^2 \ln \varphi_{X_1}\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right) - i\mu\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)}{\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)^2} &= \\ \frac{t^2}{\sigma^2} \left(-\frac{\sigma^2}{2}\right) &= -\frac{t^2}{2}. \end{aligned}$$

Concluimos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_{S_n^*}(t) = e^{-\frac{t^2}{2}} = \varphi_Z(t).$$

Pelo teorema da unicidade temos o resultado. \square

Como uma extensão do Teorema do Limite Central, pode-se provar que (ver Barri James)

Teorema 2.18. *Sejam $(Y_n)_{n \geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias tais que*

$$\sqrt{n}(Y_n - \mu) \rightarrow^D N(0, \sigma^2).$$

Se $g(y)$ é uma função derivável no ponto μ , então

$$\sqrt{n}(g(Y_n) - g(\mu)) \rightarrow^D N(0, \sigma^2(g'(\mu))^2).$$

Exemplo 2.19. Pelo Teorema do limite central temos

$$\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \rightarrow^D N(0, 1)$$

que é equivalente a

$$\frac{\bar{X}_n - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \rightarrow^D N(0, 1).$$

Pelo Teorema de Slutsky concluímos que

$$\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu) \rightarrow^D N(0, \sigma^2).$$

Pelo teorema anterior, se consideramos $g(x) = x^2$, temos

$$\sqrt{n}(\bar{X}_n^2 - \mu^2) \rightarrow^D N(0, 4\mu^2\sigma^2).$$

Se consideramos $g(x) = \frac{1}{x}$ temos, se $\mu \neq 0$

$$\sqrt{n}\left(\frac{1}{\bar{X}_n} - \frac{1}{\mu}\right) \rightarrow^D N\left(0, \frac{\sigma^2}{\mu^4}\right).$$

E-mail address: bueno@@ime.usp.br

DEPARTAMENTO DE ESTATÍSTICA, INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA,
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO, CAIXA POSTAL 66281, CEP 05311-970,
SÃO PAULO, BRAZIL