2^a Prova - Álgebra 1, Período noturno, turma 47
Licenciatura em Matemática
8 de maio de 2018

Q	N
1	
2	
3	
4	
5	
Total	

Nome : Quase Gabarito
N^{o}USP :

Prof Eduardo do Nascimento Marcos

1. A prova pode ser feita a lápis;
2. Não é permitido o uso de calculadora;
3. Celulares e outras ferramentas eletrônicas devem ser desligados;
4. Boa Prova

1^a) Questão: (Valor 2 pt)

Nesta questão você deve apenas dizer se a afirmação é verdadeira ou falsa. Não precisa justificar. Cada resposta errada anula uma correta. Sua nota nesta questão será calculada assim: Nota igual a
$Max\{0.2 \times \text{itens respondidos corretamente} - 0,2 \times \text{itens respondidos erradamente}, 0\}$

F 1. Sejam a, b, c três inteiros. Se $a \mid bc$ e $a \nmid b$ então $a \mid c$.

V 2. Sejam a e b inteiros com $a \neq 0$ existem infinitos pares (q, r) tais que $a = bq + r$.

V 3. A equação diofantina $ax + by = c$ onde $mdc(a, b) = 1$ tem sempre solução para qualquer que seja $c \in \mathbb{Z}$

F 4. Todo subconjunto não vazio do conjunto dos números inteiros tem um menor elemento.

V 5. Sabe-se que $p > 1$ e $p \mid ab$ implica que $p \mid a$ ou $p \mid b$, com essa informação podemos concluir que p é necessariamente primo.

V 6. Sabe-se que $a^5 = cb^5$ onde a, b e c são inteiros positivos, podemos concluir que $c = d^5$ para algum inteiro d? → os primos de a aparecem com potências múltiplo de 5 os de b também logo os de c tem que ap mult de 5

F 7. Se $ab \equiv 0(mod p)$ então $a \equiv 0(mod p)$ ou $b \equiv 0(mod p)$. $2.3 \equiv 0(6)$ $2 \not\equiv 0$ $3 \not\equiv 0$

F 8. Seja $\{p_1, \cdots p_n\}$ um conjunto de primos então $p_1 \times \cdots \times p_n + 1$ é primo. Tome um conj de primos ímpares, $p_1 \times \cdots p_n + 1$ é par

V 9. 11 divide $62^{10} - 1$.

V 10. A seguinte frase é verdadeira.
Se todo número inteiro é positivo então 3 é positivo.

10) (F ⇒ V) Verdad

9) $(62)^{10} - 1 \underset{11}{\equiv} (7)^{10} - 1 \underset{11}{\equiv} (7^2)^5 - 1 \underset{11}{\equiv} (5^5) - 1 \equiv (5^2)^2 \cdot 5 - 1 \underset{11}{\equiv}$

$3^2 \cdot 5 - 1 \equiv 45 - 1 = 44 \underset{0}{\equiv} 1$

1) $6 \mid 2.3$ e $6 \nmid 2$ mas $6 \nmid 3$. 2) V

3) Sim porque $1 \mid c$ para qualquer c

4) $\mathbb{Z}$ não tem um menor elemento, $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}$.

5) Suponha que p é comp então $p = a \cdot b$ $1 < a, b < b$
$p \nmid a$ e $p \nmid b$ mas $p \mid ab = p$.

2^a) Questão: Seja b um inteiro maior que 1, cuja expressão na base 10 é $b = a_n a_{n-1} ... a_0$

Prove que:

i) $4 \mid b$ se e só se $4 \mid a_1 a_0$.

ii) $11 \mid b$ se e só se $11 \mid (a_0 - a_1 + \cdots + (-1)^n a_n)$.

iii) $5 \mid b$ se e só se $5 \mid a_0$.

iv) $6 \mid b$ se e só se $3 \mid (a_0 + a_1 + \cdots + a_n)$ e $2 \mid a_0$.

a) $b = a_n 10^n + \cdots + a_2 \cdot 10^2 + a_1 10 + a_0 \underset{4}{\equiv} a_1 \cdot 10 + a_0 = a_1 a_0$

Logo $b \underset{4}{\equiv} a_1 a_0 \therefore 4 \mid b \Leftrightarrow 4 \mid a_1 a_0$.

b) $b = a_n 10^n + \cdots + a_1 10 + a_0 \underset{11}{\equiv} a_n (-1)^n + \cdots + a_1 (-1) + a_0$

Logo $11 \mid b \Leftrightarrow 11 \mid a_0 - a_1 + \cdots + (-1)^n a_n$.

a) $b = a_n 10^n + \cdots + a_1 10 + a_0 \underset{5}{\equiv} a_0$ logo

$5 \mid b \Leftrightarrow 5 \mid a_0$

c) $6 = 3 \cdot 2$ Logo $6 \mid b \Leftrightarrow 3 \mid b$ e $2 \mid b$ pois mdc$(3,2) = 1$

mas $3 \mid b \Leftrightarrow 3 \mid a_n 10^n + \cdots + a_1 10 + a_0 \Leftrightarrow$

$3 \mid a_n 1^n + \cdots + a_1 1 + a_0 = a_n + \cdots + a_1$

$2 \mid b \Leftrightarrow 2 \mid a_n 10^n + \cdots + a_1 10 + a_0 \Leftrightarrow$

$2 \mid a_n 0 + \cdots + a_1 0 + a_0 \Leftrightarrow 2 \mid a_0$.

3ª) **Questão:**(Valor 2 pt) Prove que o conjunto dos números primos é infinito.

Seja $\{p_1, \dots, p_n\}$ um conjunto de primos positivos quaisquer com $p_i \neq p_j$ para $i \neq j$

Considere o nº

$$a = p_1 + p_2 \cdots p_n$$

Existe um primo $p > 1$ tal que $p \mid a$.

Se $p = p_1$ então $p_1 \mid p_2 \cdots p_n$ logo $p_1 = p_i$ para algum i, $i \geq 2$ $\rightarrow\leftarrow$

Se $p = p_i$ para $2 \leq i \leq n$ então

$$p \mid p_1 = a - p_2 \cdots p_i \cdots p_n \rightarrow\leftarrow$$

Portanto $p \notin \{p_1, \dots, p_n\}$

Ou seja dado um cj finito de primos existe um primo que não está nesse conjunto.

Logo o cj de primos não pode ser finito

4ª) Questão:(Valor 2 pt)

Resolva as seguintes equações diofantinas.

i) $108x + 21y = 90$

* ii) $123x + 360y = 198$.

i) $mdc(108, 21) = 3$ e $3 | 90$ logo a eq tem sol

~~Ac~~chemos uma solução particular da eq aux

$108x + 21y = 3$, $x_0 = 1$, $y_0 = -5$

Logo uma solução de

$108x + 21y = 90$ é $x_0 = 30$, $y_0 = -150$

Logo a solução geral de i) é

$S = \{ (30 + 7t, -150 - 36t) : t \in \mathbb{Z} \}$.

ii) $mdc(123, 360) = 3$ $\quad 3 | 198$

	2	1	12	1	2
360	123	114	9	6	3
114	9	27	3	0	
		6			

28
13
41

Encontremos uma solução particular da eq auxil

$123x + 360y = 3$

198 | 3
18 66
0

$3 = 9 - 6 = 9 - (114 - 12 \cdot 9) = 13 \cdot 9 - 114 =$

$13(123 - 114) - 114 = 13 \cdot 123 - 14 \cdot 114 =$

$13 \cdot (123) - 14(360 - 2 \cdot 123) = 41 \cdot 123 - 14 \cdot 360$

66 × 41 = 66 + 264 = 2706 $\quad$ 14 × 66 = 66 + 84 = 924

Logo uma solução particular é $41, -14$

$\therefore$ uma sol particular de x é

$(66 \cdot 41, -14 \cdot 66) = (2706, -924)$

66 × 44 = 264 + 264 = 2904

Logo

$S = \{ (66 \cdot 41 + 120t, -14 \cdot 66 + 41t) \quad t \in \mathbb{Z} \}$

$S = \{ (66 \cdot 41 + 120t, -924 + 41t) \quad t \in \mathbb{Z} \}$

$= (2706 + 120t,$

5^a) **Questão:**(Valor 2 pt)

Determinar os restos da divisão de :

i) $2^{44} - 1$ por 89.

ii) 2^{11} por 23.

i) $2^{44} - 1 = \cancel{(128)} (2^7)^6 . 2^2 - 1 =$

$(128)^6 . 2^2 - 1 \equiv (39)^6 . 2^2 - 1 \equiv$

$((39)^2)^3 . 2^2 - 1 \equiv 8^3 . 2^2 - 1 \equiv$

$128 \,\lfloor 89$
$39 \quad 1$

$(2^3)^3 . 2^2 - 1 \equiv (2^7) . 2^4 - 1 \underset{89}{\equiv}$

$(39) . 2^4 - 1 \equiv (39) . 2 . 2^3 - 1$

$\equiv (78) 2^3 - 1 \underset{89}{\equiv} (-11) . 2^3 - 1$

$39 \times 39 = 351 + 117 = 1521$

$\equiv -88 - 1 \equiv 0$

Logo o resto é zero.

$1521 \,\lfloor 89$
$631 \quad 17$
623
8

ii) $2^{11} \equiv (2^5)^2 . 2 \underset{23}{\equiv} (32)^2 . 2 \underset{23}{\equiv} 9^2 . 2$

64×8

$81 . 2 \underset{23}{\equiv} 12 . 2 \underset{23}{\equiv} 24 \underset{23}{\equiv} 1$

Logo o resto da divisão é 1

$81 \,\lfloor 23$
$12 \quad 3$