

1. TÓPICO 3

1.1. A Lei dos Grandes Números. Consideremos a variável aleatória X que representa o valor numérico de um experimento aleatório e seja X_1, X_2, \dots, X_n uma amostra aleatória de X , isto é, cópias i.i.d. de X , de tamanho n , grande. A Lei dos Grandes Números afirma que a média aritmética dos n valores observados é aproximadamente igual à média de X , $\mu = E[X]$, quando n é grande, isto é

$$\overline{X}_n(w) = \frac{\sum_{i=1}^n X_i(w)}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mu$$

onde $w = (w_1, \dots, w_n)$, $X_n(w) = X(w_n)$, w_n são os ensaios sucessivos e w é o experimento composto.

Exemplo 1.1. Considere que nas repetições independentes de um experimento estamos interessados nas ocorrências de um evento A . Definimos a sequência de variáveis aleatórias $(X_n)_{n \geq 1}$

$$X_n = 1 \text{ se } A \text{ ocorreu na } n\text{-ésima realização; } X_n = 0 \text{ c.c.}$$

Desta maneira $P(X_n = 1) = P(A)$. Na n -ésima repetição do experimento calculamos a frequência relativa do evento A , isto é

$$F_n = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} \xrightarrow{q.c.} P(A) = E[X_n].$$

O exemplo justifica o conceito frequêntista de probabilidade.

Se a convergência é quase certa dizemos que a Lei é Forte, se a convergência é em probabilidade dizemos que a Lei é Fraca. Claramente, a Lei Forte implica a Lei Fraca dos Grandes Números.

A Lei Fraca dos Grandes Números

Para provarmos a Lei Fraca dos Grandes Números usaremos a Desigualdade de Markov:

Lema 1.2. *Seja X uma variável aleatória. Para todo ε e r , números reais positivos com $E[|X|^r] < \infty$, temos*

$$P(|X| \geq \varepsilon) \leq \frac{E[|X|^r]}{\varepsilon^r}.$$

Prova:

$$E[|X|^r] = \int_{-\infty}^{\infty} |x|^r dF(x) = \int_{\{|X| > \varepsilon\}} |x|^r dF(x) + \int_{\{|X| \leq \varepsilon\}} |x|^r dF(x) \geq$$

$$\int_{\{|X|>\varepsilon\}} |x|^r dF(x) \geq |\varepsilon|^r \int_{\{|X|>\varepsilon\}} dF(x) = |\varepsilon|^r P(|X| \geq \varepsilon).$$

Corolário 1.3. *Desigualdade de Tchebyshev.* Se X uma variável aleatória com média $E[X] = \mu$ e variância $\sigma^2 < \infty$, $\forall \varepsilon > 0$ temos

$$P(|X - \mu| \geq \varepsilon) \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}.$$

Prova: Segue da desigualdade de Markov

Teorema 1.4. *Lei Fraca dos Grandes Números de Tchebyshev*

Se $(X_n)_{n \geq 1}$ é uma sequência de variáveis aleatórias independentes com médias μ e variâncias $\sigma^2 < \infty$, comuns, então

$$\overline{X}_n = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} \xrightarrow{P} \mu.$$

Prova: Segue da desigualdade de Tchebyshev, desde que $E[\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}] = \mu$ e $Var(\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}) = \frac{\sigma^2}{n}$.

Teorema 1.5. *Lei Fraca dos Grandes Números para variáveis aleatórias não correlacionadas.*

Se $(X_n)_{n \geq 1}$ é uma sequência de variáveis aleatórias não correlacionadas, isto é, $cov(X_i, X_j) = 0, \forall i, j$, com médias μ e variâncias $\sigma^2 < \infty$, comuns, então

$$\overline{X}_n = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} \xrightarrow{P} \mu.$$

Prova:

Sabemos que $E[\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}] = \mu$.

$$Var(\overline{X}_n) = E[(\overline{X}_n - \mu)^2] = E[(\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} - \mu)^2] = E[(\frac{\sum_{i=1}^n X_i - n\mu}{n})^2] =$$

$$\frac{1}{n^2} E[(\sum_{i=1}^n X_i - n\mu)^2] = \frac{1}{n^2} E\{[\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)] \cdot [\sum_{j=1}^n (X_j - \mu)]\} =$$

$$\frac{1}{n^2} E[\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2 + \sum_{i < j} (X_i - \mu) \cdot (X_j - \mu)] = \frac{1}{n^2} \{ \sum_{i=1}^n E[(X_i - \mu)^2] +$$

$$\sum_{i < j} E[(X_i - \mu) \cdot (X_j - \mu)] \} = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \sigma^2 + 0 = \frac{\sigma^2}{n}.$$

Assim, pela Desigualdade de Tchebyshev

$$P(|\overline{X}_n - \mu| > \varepsilon) = P((\overline{X}_n - \mu)^2 > \varepsilon^2) \leq \frac{E[(\overline{X}_n - \mu)^2]}{\varepsilon^2} = \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2} \rightarrow 0$$

quando $n \rightarrow \infty$.

Observação 1.6. Na realidade, somente é necessário que os X_i 's sejam não correlacionados assintoticamente no sentido: $\lim_{|i-j| \rightarrow \infty} \text{cov}(X_i, X_j) = 0$.

Teorema 1.7. *Lei Fraca dos Grandes Números para variáveis aleatórias assintoticamente não correlacionadas.*

Seja $(X_n)_{n \geq 1}$ uma seqüência de variáveis aleatórias assintoticamente não correlacionadas, com média comum μ e variâncias $\text{Var}(X_i) = \sigma_i^2 < c$, uniformemente limitadas por uma constante c . Então

$$\overline{X}_n = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} \xrightarrow{P} \mu.$$

Teorema 1.8. *Lei Fraca dos Grandes Números de Khintchin, para variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com média finita.*

Seja $(X_n)_{n \geq 1}$ uma seqüência de variáveis aleatórias i.i.d. com $E[X_1] = \mu < \infty$. Então

$$\overline{X}_n = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} \xrightarrow{P} \mu.$$

A Lei Forte dos Grandes Números

Teorema 1.9. *Lei Forte dos Grandes Números para variáveis aleatórias independente e identicamente distribuídas com média finita e existência do quarto momento central.*

Seja $(X_n)_{n \geq 1}$ uma seqüência de variáveis aleatórias i.i.d. com $E[|X_1|] = \mu < \infty$ e $E[(X - \mu)^4] = \gamma < \infty$. Então

$$\overline{X}_n = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} \xrightarrow{qc} \mu.$$

Prova:

Observe que

$$\begin{aligned} E[(\overline{X}_n - \mu)^4] &= E\left[\frac{1}{n^4} \left(\sum_{i=1}^n X_i - n\mu\right)^4\right] = E\left[\frac{1}{n^4} \left(\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)\right)^4\right] = \\ &= \frac{1}{n^4} E\left\{ \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^4 + \sum_{i < j} (X_i - \mu)^3 \cdot (X_j - \mu) \right. \\ &+ \sum_{i < j} (X_i - \mu)^2 \cdot (X_j - \mu)^2 + \sum_{i < j < k} (X_i - \mu)^2 \cdot (X_j - \mu) \cdot (X_k - \mu) \\ &\left. + \sum_{i < j < k < l} (X_i - \mu) \cdot (X_j - \mu) \cdot (X_k - \mu) \cdot (X_l - \mu) \right\} = \end{aligned}$$

4

$$\begin{aligned} & \frac{1}{n^4} \left\{ \sum_{i=1}^n \gamma + \sum_{i<j} 0 + \sum_{i<j} \sigma^2 \sigma^2 + \sum_{i<j<k} 0 + \sum_{i<j<k<l} 0 \right\} = \\ & \frac{1}{n^4} \{n\gamma + n \cdot (n-1)\sigma^4\} = \frac{\gamma}{n^3} + \frac{(n-1)\sigma^4}{n^3} \leq \frac{\gamma}{n^3} + \frac{\sigma^4}{n^2}. \end{aligned}$$

Portanto, pela desigualdade de Markov temos

$$P(|\bar{X}_n - \mu| > \varepsilon) = P((\bar{X}_n - \mu)^4 > \varepsilon^4) \leq \frac{E[(X - \mu)^4]}{\varepsilon^4} \leq \frac{\gamma}{\varepsilon^4 n^3} + \frac{\sigma^4}{\varepsilon^4 n^2}$$

e

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(|\bar{X}_n - \mu| > \varepsilon) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\gamma}{\varepsilon^4 n^3} + \frac{\sigma^4}{\varepsilon^4 n^2} \right) < \infty.$$

Pelo Lema de Borel Cantelli concluímos que

$$\bar{X}_n = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} \xrightarrow{qc} \mu.$$

Observação 1.10. Observe que

$$(X - \mu)^4 = X^4 - 4.X^3.\mu + 6.X^2.\mu^2 - 4.X.\mu^3 + \mu^4$$

e

$$E[(X - \mu)^4] = E[X^4] - 4.\mu.E[X^3] + 6.\mu^2.E[X^2] - 4.\mu^3.E[X] + \mu^4.$$

Exemplo 1.11. Seja $(X_n)_{n \geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias i.i.d. a X . Se X é uma variável aleatória de Bernoulli com parâmetro p , $0 < p < 1$, então $E[X^k] = p$, $\forall k$ e

$$E[(X - \mu)^4] = p - 4p^2 + 6p^3 - 4p^4 + p^4 < \infty$$

e $\bar{X}_n \xrightarrow{qc} p$.

Exemplo 1.12. Seja $(X_n)_{n \geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias i.i.d. a X . Se X é uma variável aleatória com distribuição uniforme no intervalo $(0, 1)$, então

$$E[X^k] = \int_0^1 x^k dx = \frac{1}{k+1}$$

e

$$E[(X - 0,5)^4] = E[X^4] - 4.0,5.E[X^3] + 6.0,25.E[X^2] - 4.0,125.E[X] + 0,0625 =$$

$$0,2 - 0,5 + 0,5 - 0,25 + 0,0625 = 0,0125 < \infty$$

e $\bar{X}_n \xrightarrow{qc} 0,5$.

Exemplo 1.13. Seja $(X_n)_{n \geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias i.i.d. a X . Se X é uma variável aleatória com distribuição exponencial e parâmetro λ então

$$E[X^k] = \int_0^{\infty} x^k \lambda e^{-\lambda x} dx = \frac{k!}{\lambda^k} \int_0^{\infty} \frac{x^k \lambda^{k-1} e^{-\lambda x}}{k!} dx = \frac{k!}{\lambda^k}.$$

e

$$E[(X - \frac{1}{\lambda})^4] = \frac{4!}{\lambda^4} - 4 \cdot \frac{1}{\lambda} \frac{3!}{\lambda^3} + 6 \cdot (\frac{1}{\lambda})^2 \frac{2!}{\lambda^2} - 4 \cdot (\frac{1}{\lambda})^3 \cdot \frac{1}{\lambda} + (\frac{1}{\lambda})^4 = \frac{9}{\lambda^4} = \frac{9}{\lambda^4} < \infty$$

e $\overline{X_n} \xrightarrow{qc} \frac{1}{\lambda}$.

Exemplo 1.14. Seja $(X_n)_{n \geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias i.i.d. a X . Se X é uma variável aleatória com distribuição normal de média μ e variância σ^2 , então $E[(X - \mu)^{2n+1}] = 0$ e $E[(X - \mu)^{2n}] = \sigma^{2n} \cdot [(2n - 1) \cdot (2n - 3) \dots 3 \cdot 1]$. Assim $E[(X - \mu)^4] = 3 \cdot \sigma^4$ e $\overline{X_n} \xrightarrow{qc} \mu$.

Exemplo 1.15. Seja $(X_n)_{n \geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias i.i.d. a X , com $E[(X - \mu)^4] = \gamma < \infty$ e $E[(X - \mu)^2] = \sigma^2$. Então

$$S_n^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X_n})^2}{n-1} \xrightarrow{qc} \sigma^2.$$

Note que $S_n^2 = \frac{1}{n-1} (\sum_{i=1}^n X_i^2 - n \overline{X_n}^2)$.

Por outro lado, pela Lei forte dos grandes números,

$$\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n X_i^2 = \frac{n}{n-1} \frac{\sum_{i=1}^n X_i^2}{n} \xrightarrow{qc} 1 \cdot E[X^2] = \sigma^2 + \mu^2$$

e

$$\frac{n}{n-1} \overline{X_n}^2 \xrightarrow{qc} 1 \cdot \mu^2 = \mu^2$$

pois x^2 é uma função contínua de x .

Recordemos P.2 - Se $X_n \xrightarrow{qc} X$ e $Y_n \xrightarrow{qc} Y$, Então

$$X_n \pm Y_n \xrightarrow{qc} X \pm Y.$$

Portanto $S_n^2 = \frac{1}{n-1} (\sum_{i=1}^n X_i^2 - n \overline{X_n}^2) \xrightarrow{qc} (\sigma^2 + \mu^2) - \mu^2 = \sigma^2$.

Em termos estatísticos estamos provando que S_n^2 é um estimador consistente para σ^2 , pois a convergência quase certa implica a convergência em probabilidade.

No que segue as Leis Fortes de Kolmogorov são enunciadas. O leitor encontrará as provas respectivas provas no livro Probabilidade: um curso em nível intermediário; Barry, R. James.

Teorema 1.16. *Primeira Lei Forte de Kolmogorov.*

Seja $(X_n)_{n \geq 1}$ uma seqüência de variáveis aleatórias independentes e integráveis e suponha que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{Var(X_n)}{n^2} < \infty.$$

Ento

$$\frac{X_1 + \dots + X_n}{n} - \frac{E[X_1] + \dots + E[X_n]}{n} \xrightarrow{qc} 0$$

Teorema 1.17. *A Lei Forte de Kolmogorov.*

Seja $(X_n)_{n \geq 1}$ uma seqüência de variáveis aleatórias independentes, identicamente distribuídas e integráveis com $E[X_n] = \mu$. Então

$$\frac{X_1 + \dots + X_n}{n} \xrightarrow{qc} \mu.$$

Exemplo 1.18. Seja $(X_n)_{n \geq 1}$ uma seqüência de variáveis aleatórias i.i.d. com função densidade de probabilidade

$$f(x) = e^{-x+\theta} \text{ se } x \geq \theta \text{ e } 0 \text{ c.c.}$$

Prove que $\frac{X_1 + \dots + X_n}{n} \xrightarrow{P} 1 + \theta$.

Observe que

$$E[X] = \int_{\theta}^{\infty} x e^{-(x-\theta)} dx = \int_0^{\infty} (y + \theta) e^{-y} dy = 1 + \theta.$$

Pela Lei Fraca dos Grandes números concluímos o exercício.

Exemplo 1.19. Seja $(X_n)_{n \geq 1}$ uma seqüência de variáveis aleatórias i.i.d. com distribuição uniforme no intervalo $(0, 1)$. seja $Z_n = (\prod_{i=1}^n X_i)^{\frac{1}{n}}$, a média geométrica de X_1, \dots, X_n , $1 \leq n < \infty$. Mostre que $Z_n \rightarrow k$. Qual o valor de k ?

Observe que $-\ln Z_n = -\ln[(\prod_{i=1}^n X_i)^{\frac{1}{n}}] = \frac{\sum_{i=1}^n -\ln X_i}{n}$ e que $-\ln X_i$ tem distribuição exponencial padrão. Portanto, pela Lei Fraca dos Grandes Números, $-\ln Z_n \xrightarrow{P} 1$.

Como a função exponencial, a inversa da função logaritmo neperiano, é contínua, concluímos que $Z_n \xrightarrow{P} e$.

Exemplo 1.20. Seja $(X_n)_{n \geq 1}$ uma seqüência de variáveis aleatórias i.i.d., com $E[X_1] = Var(X_1) = 1$, então

$$\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{\sqrt{n \cdot \sum_{i=1}^n X_i^2}} \xrightarrow{qc} \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Observe que

$$\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{\sqrt{n \cdot \sum_{i=1}^n X_i^2}} = \frac{\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}}{\sqrt{n \cdot \frac{\sum_{i=1}^n X_i^2}{n^2}}}.$$

Pela Lei Forte dos Grandes Números temos $\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} \xrightarrow{qc} 1$ e $\frac{\sum_{i=1}^n X_i^2}{n} \xrightarrow{qc} 2$.

A convergência quase certa é fechada por quocientes (quando possível) e a raiz quadrada é função contínua.

Exemplo 1.21. Seja $(X_n)_{n \geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias i.i.d., com distribuição normal com média μ e variância σ^2 . Qual o limite quase certo de

$$\sqrt{\frac{n \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2}{(\sum_{i=1}^n X_i)^2}}?$$

E-mail address: bueno@ime.usp.br

DEPARTAMENTO DE ESTATÍSTICA, INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA,
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO, CAIXA POSTAL 66281, CEP 05311-970, SÃO
PAULO, BRAZIL