

**MAE 221- PROBABILIDADE I**  
**Oitava Lista de Exercícios**

1) Seja  $X$  uma variável aleatória absolutamente contínua com função densidade de probabilidade

$$f(x) = \exp[-(x - \theta)], \quad \text{se } x \geq \theta \quad 0 \quad \text{se } x < \theta$$

e seja  $(X_n)_{n \geq 1}$  é uma sequência de variáveis aleatórias independentes e idênticas a  $X$ , qual o limite em probabilidade de

$$\min\{X_1, \dots, X_n\} - \theta?$$

Qual o limite quase certo de  $\min\{X_1, \dots, X_n\}$ ?

2) Seja  $X$  uma variável aleatória com função de distribuição absolutamente contínua  $F$  e seja  $(X_n)_{n \geq 1}$  uma sequência de variáveis aleatórias independentes e idênticas a  $X$ . Defina  $Y_n = n[1 - F(M_n)]$ , onde  $M_n = \max\{X_1, \dots, X_n\}$ .

- a) Qual a função de distribuição  $G_n(y)$  de  $Y_n$ ?
- b) Calcule  $\lim_{n \rightarrow \infty} G_n(y)$ .

3) Seja  $(X_n)_{n \geq 1}$  uma sequência de variáveis aleatórias independentes e idênticamente distribuídas com distribuição uniforme no intervalo  $(0, \theta)$ . Prove que  $\max\{X_1, \dots, X_n\}$  converge em probabilidade para  $\theta$ .

4) Seja  $(X_n)_{n \geq 1}$  uma sequência de variáveis aleatórias independentes tais que  $P(X_n = 1) = \frac{1}{n}$  e  $P(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n}$ . Mostre que  $(X_n)_{n \geq 1}$  converge em probabilidade para 0 mas não converge quase certamente.

5) Seja  $(X_n)_{n \geq 1}$  uma sequência de variáveis aleatórias independentes tais que  $P(X_n = n^2) = \frac{1}{n^2}$  e  $P(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n^2}$ . Prove que  $(X_n)_{n \geq 1}$  converge quase certamente e ache o limite  $X$ . Mostre que  $E[X_n^k]$  não converge para  $E[X^k]$  para  $k = 1, 2, 3, \dots$