1. AULA 8

Convergência quase certa e em probabilidade.

Definição 1.1. Seja $(\Omega, \Im, P)$ um espaço de probabilidade e X uma variável aleatória definida em Ω com valores em $\Re$, isto é, para cada $w \in \Omega$, $X(w) \in \Re$, é um número real.

Seja $(X_n)_{n\geq 1}$, uma sequência de variáveis aleatórias. Para cada realização w , $(X_n(w))_{n\geq 1}$ é uma sequência de números reais que pode (ou não) convergir para um valor real $X(w)$.

Seja
$$N^c = \{w \in \Omega \ \mid \ X_n(w) \to X(w)\}.$$

Se $P(N^c) = 1$ dizemos que $(X_n)_{n\geq 1}$ converge quase certamente para X. Denotamos $X_n \to^{qc} X$.

Observe que $P(N) = 1 - P(N^c) = 0$ e também dizemos que $(X_n)_{n\geq 1}$ converge quase certamente para X a menos de um conjunto de medida nula.

Observação 1.2. O limite é único. Suponha que exista uma outra variável aleatória Y, tal que $X_n \to^{qc} Y$, isto é, existe M^c com $P(M^c) = 1$
$$M^c = \{w \in \Omega \ \mid \ X_n(w) \to Y(w)\}.$$
Mas $P(N^c \cap M^c) = 1$ e em $N^c \cap M^c$ temos $X(w) = Y(w)$.

Exemplo 1.3. Seja X uma variável aleatória com distribuição uniforme no intervalo $(0, 1)$, $X \sim U(0, 1)$.

Defina
$$X_n = \sum_{k=1}^{n} (1 - X)^{k-1}.$$

Para cada $w, 0 < X(w) < 1$, temos
$$\lim_{n\uparrow\infty} X_n(w) = \sum_{k=1}^{\infty} (1 - X(w))^{k-1} = \frac{1}{X(w)}$$
com
$$P(\lim_{n\uparrow\infty} X_n(w) = \frac{1}{X(w)}) = P(0 < X < 1) = 1$$
e $X_n \to^{qc} \frac{1}{X}$.

Defina
$$Y_n = \sum_{k=1}^{n} (\frac{5.X}{3})^k.$$

Para cada $w, 0 < X(w) < 1$, temos

$$\lim_{n\uparrow\infty} Y_n(w) = \sum_{k=1}^{\infty}(\frac{5.X(w)}{3})^k = \frac{1}{1-\frac{5.X(w)}{3}},$$

se $\frac{5.X(w)}{3} < 1$, isto é, $X(w) < \frac{3}{5}$. Então

$$P(\lim_{n\uparrow\infty} Y_n(w) = Y(w) = \frac{1}{1-\frac{5.X(w)}{3}}) = P(X < \frac{3}{5}) = \frac{3}{5}$$

e $Y_n \not\twoheadrightarrow^{qc} Y$.

Teorema 1.4. Lema de Borel Cantelli *Seja* $(A_n)_{n\geq 1}$ *uma sequência de eventos no espaço de probabilidade* $(\Omega, \Im, P)$*.Então*

I) Se $\sum P(A_n) < \infty \Rightarrow P(\limsup A_n) = P(A_n i.v.) = 0.$

II) Se $\sum P(A_n) = \infty$ *e os* A_n *são independentes,*$\Rightarrow P(\limsup A_n) = P(A_n i.v.) = 1.$

Observação 1.5. Observe que, se os eventos são independentes, $P(A_n i.v.)$ é 0 ou 1.

Exemplo 1.6. Seja $(X_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuidas com distribuição uniforme no intervalo $(0, 1)$.

Sejam $A_n = \{X_n \in (0, \frac{1}{n}]\}$ e $B_n = \{X_n \in (0, \frac{1}{n^2}]\}$. Assim $P(A_n) = \frac{1}{n}$ e $P(B_n) = \frac{1}{n^2}$.

$P(A_n iv.) = 1$ pois os A_n são indenpedentes e $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$, (série harmônica).

$P(B_n iv.) = 0$ pois os B_n são tais que $\sum_{n=1}^{\infty} P(B_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty$, (Série de Dirichlet).

Observação 1.7. Seja $(a_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de números reais. Uma condição equivalente para que $\lim_{n\uparrow\infty} a_n = a$ é

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n \in \aleph \;\; | \;\; \forall k, k \geq n, \;\; |a_k - a| < \varepsilon,$$

que, por sua vez, é equivalente a

$$\forall m \in \aleph, \exists n \in \aleph \;\; | \;\; \forall k, k \geq n, \;\; |a_k - a| < \frac{1}{m}.$$

Sejam X uma variável aleatória e $(X_n)_{n\geq 1}$, uma sequência de variáveis aleatórias tais que $X_n \to^{qc} X$. Então

$$N^c = \{w \mid \lim_{n\uparrow\infty} X_n(w) = X(w)\} =$$

$$\{w \mid \forall m \in \aleph, \exists n \in \aleph \mid \forall k, k \geq n, \quad |X_k(w) - X(w)| < \frac{1}{m}\} =$$

$$\bigcap_{m\geq 1}\bigcup_{n\geq 1}\bigcap_{k\geq n}\{w \mid |X_k(w) - X(w)| < \frac{1}{m}\}.$$

Portanto $P(N^c) = 1$ se, e somente se,

$$P(\bigcup_{n\geq 1}\bigcap_{k\geq n}\{w \mid |X_k(w) - X(w)| < \frac{1}{m}\}) = 1, \quad \forall m \geq 1$$

que é equivalente a

$$P(\liminf\{w \mid |X_k(w) - X(w)| < \frac{1}{m}\}) = 1, \quad \forall m \geq 1$$

ou

$$P(\limsup\{w \mid |X_k(w) - X(w)| > \frac{1}{m}\}) = 0, \quad \forall m \geq 1.$$

Corolário 1.8. *Sejam X uma variável aleatória e $(X_n)_{n\geq 1}$, uma sequência de variáveis aleatórias, e os eventos*

$$A_k = \{w \mid |X_k(w) - X(w)| > \frac{1}{m}\}.$$

Se $\sum_{k=1}^{\infty} P(A_k) < \infty, \quad \forall m \geq 1$, então $X_n \to^{qc} X$.
Prova: *Segue do Lema de Borel Cantelli.*

Exemplo 1.9. Seja $(X_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuidas (i.i.d) com distribuição exponencial padrão. Defina as variáveis aleatórias $Y_n = \frac{X_n}{\ln n}$ de maneira que

$$P(|Y_n| > \frac{1}{m}) = P(|\frac{X_n}{\ln n}| > \frac{1}{m}) = P(X_n > (\ln n)^{\frac{1}{m}}) = e^{-(\ln n)^{\frac{1}{m}}} = \frac{1}{n^{\frac{1}{m}}}.$$

e $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{m}}} = \infty$ se $m \geq 1$.

Concluimos, pelo lema de Borel Cantelli, que $P(\limsup |Y_n - 0| > \frac{1}{m}) = 1$ and $Y_n \nrightarrow^{qc} 0$.

Exemplo 1.10. Considere o espaço $((0,1)), \Im, P)$ onde P é uniforme no intervalo $(0,1)$.

Defina a variável aleatória

$$X_n(w) = 2^n \quad se \quad w \in (0, \frac{1}{n}) \quad e \quad 0 \quad c.c.$$

Observe que,
$P(\lim_{n\to\infty} X_n(w) = 0) = P(\bigcup_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{n}, 1)) = 1$ e $X_n \to^{qc} 0$.
Contudo

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(|X_n| > \varepsilon) = \sum_{n=1}^{\infty} P(X_n = 2^n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty.$$

mas as variáveis X_n não são independentes pois $X_n = 2^n \to X_{n-1} = 2^{n-1}$ e o Lema de Borel Cantelli não vale.

Operações com limites

P.1 - Se $X_n \to^{qc} X$ e f é uma função real contínua, então

$$f(X_n) \to^{qc} f(X).$$

Prova:
pois

$$N^c = \{w \in \Omega \mid X_n(w) \to X(w)\} = \{w \in \Omega \mid f(X_n(w)) \to f(X(w))\}$$

e $P(N^c) = 1$.
P.2 - Se $X_n \to^{qc} X$ e $Y_n \to^{qc} Y$, Então

$$X_n \pm Y_n \to^{qc} X \pm Y;$$
$$X_n.Y_n \to^{qc} X.Y;$$
$$\frac{X_n}{Y_n} \to^{qc} \frac{X}{Y}, \quad quando \quad bem \quad definida.$$

Prova:
Sejam

$$N_X^c = \{w \in \Omega \mid X_n(w) \to X(w)\} \ e \ N_Y^c = \{w \in \Omega \mid Y_n(w) \to Y(w)\}$$

, com $P(N_X^c) = 1$, $P(N_Y^c) = 1$, o que é equivalente a $P(N_X^c \bigcap N_Y^c)) = 1$.
Se $w \in N_X^c \bigcap N_Y^c)$, temos:

$$(X_n \pm Y_n)(w) \to^{qc} (X \pm Y)(w);$$
$$(X_n.Y_n)(w) \to^{qc} (X.Y)(w);$$
$$(\frac{X_n}{Y_n})(w) \to^{qc} (\frac{X}{Y})(w), \quad quando \quad bem \quad definida.$$

Convergência em probabilidade

Definição 1.11. Sejam $(X_n)_{n\geq 1}$, uma sequência de variáveis aleatórias e X uma variável aleatória definidas em um mesmo espaço de probabilidade. Considere a sequência de números $(P(|X_n - X| > \varepsilon))_{n\geq 1}$. Se $\lim_{n\uparrow\infty} P(|X_n - X| > \varepsilon) = 0$, dizemos que X_n converge em probabilidade para X e denotamos por $X_n \to^P X$.

Observação 1.12. Observe que convergência em probabilidade não é concernente à convergência pontual de $X_n(w)$ para $X(w)$. A interpretação é que, para valores grandes de n, as variáveis aleatórias X_n e X são aproximadamente iguais com probabilidade bem alta.

Observação 1.13. O limite em probabilidade é único: Sejam $(X_n)_{n\geq 1}$, uma sequência de variáveis aleatórias e X, Y variáveis aleatórias definidas em um mesmo espaço de probabilidade, tais que $X_n \to^P X$ e $X_n \to^P Y$. Observe que

$$|X - Y| = |X - X_n + X_n - Y| \leq |X_n - X| + ||X_n - Y|$$

e portanto

$$\{|X - Y| > \varepsilon\} \subset \{|X_n - X| > \frac{\varepsilon}{2}\} \bigcup \{|X_n - Y| > \frac{\varepsilon}{2}\}.$$

Temos que

$$P(|X - Y| > \varepsilon) \leq P(|X_n - X| > \frac{\varepsilon}{2}) + P(|Y_n - X| > \frac{\varepsilon}{2})$$

Então $\forall \varepsilon > 0$

$$P(|X - Y| > \varepsilon) = \lim_{n\uparrow\infty} P(|X - Y| > \varepsilon) \leq$$

$$\lim_{n\uparrow\infty} P(|X_n - X| > \frac{\varepsilon}{2}) + \lim_{n\uparrow\infty} P(|X_n - Y| > \frac{\varepsilon}{2}) = 0.$$

Portanto $\forall \varepsilon > 0$ temos $P(|X - Y| > \varepsilon) = 0$ e $P(X = Y) = 1$.

Exemplo 1.14. Seja $(X_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuidas (i.i.d) com distribuição exponencial padrão. Defina as variáveis aleatórias $Y_n = \frac{X_n}{\ln n}$ de maneira que

$$P(|Y_n| > \varepsilon) = P(|\frac{X_n}{\ln n}| > \varepsilon) = P(X_n > (\ln n)^\varepsilon) = e^{-(\ln n)^\varepsilon} = \frac{1}{n^\varepsilon}.$$

Portanto $\lim_{n\uparrow\infty} P(|Y_n| > \varepsilon) = 0$ e $Y_n \to^P 0$.
Contudo
$\sum_{n=1}^{\infty} P(|Y_n| > \varepsilon) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\varepsilon} = \infty$ se $\varepsilon \leq 1$.
Como o Y_n são independentes concluimos que pelo Lema de Borel Cantelli que

$$P(\limsup\{|Y_n| > \varepsilon\}) = 1$$

e $Y_n \to^P 0$ mas $Y_n \not\to^{qc} 0$.

Teorema 1.15. *Sejam $(X_n)_{n\geq 1}$, uma sequência de variáveis aleatórias e X uma variável aleatória tal que $X_n \to^{qc} X$. Então $X_n \to^P X$.*
Prova:

Se $X_n \rightarrow^{qc} X$, *então*

$$P(\bigcap_{n\geq 1}\bigcup_{k\geq n}\{w \ \mid \ |X_k(w) - X(w)| > \frac{1}{m}\}) = 0, \quad \forall m \geq 1 \leftrightarrow$$

$$P(\lim_{n\uparrow\infty}\bigcup_{k\geq n}\{w \ \mid \ |X_k(w) - X(w)| > \frac{1}{m}\}) = 0, \quad \forall m \geq 1 \leftrightarrow$$

$$\lim_{n\uparrow\infty} P(\bigcup_{k\geq n}\{w \ \mid \ |X_k(w) - X(w)| > \frac{1}{m}\}) = 0, \quad \forall m \geq 1.$$

Como

$$0 \leq P(|X_n - X| > \frac{1}{m}) \leq P(\bigcup_{k\geq n}\{w \ \mid \ |X_k(w) - X(w)| > \frac{1}{m}\}), \quad \forall m \geq 1$$

temos $\lim_{n\uparrow\infty} P(|X_n - X| > \frac{1}{m}) = 0 \forall m \geq 1$ *e* $X_n \rightarrow^P X$.

No exemplo 1.11 observamos que a condição suficiente do teorema não vale. Pode-se provar que se $X_n \rightarrow^P X$, existe uma subsequência de $(X_n)_{n\geq 1}$, digamos $(X_{n_k})_{k\geq 1}$ tal que $X_{n_k} \rightarrow^{qc} X$.

Exemplo 1.16. Seja $(X_n)_{n\geq 1}$, uma sequência de variáveis aleatórias com distribuição uniforme no intervalo $(0,1)$. Seja $Y_n = \min\{X_1, ..., X_n\}$. Então $Y_n \rightarrow^P 0$ pois

$$P(|Y_n| > \varepsilon) = P(\min\{X_1, ..., X_n\} > \varepsilon) = P(X_1 > \varepsilon, ..., X_n > \varepsilon) =$$
$$\pi_{i=1}^n P(X_i > \varepsilon) = \pi_{i=1}^n (1 - \varepsilon) = (1 - \varepsilon)^n \rightarrow 0$$

quando $n \rightarrow \infty$.

Operações com limites

P1 - Sejam $(X_n)_{n\geq 1}$, uma sequência de variáveis aleatórias, X uma variável aleatória tal que $X_n \rightarrow^P X$ e g uma função real contínua. Então $g(X_n) \rightarrow^P g(X)$.

P2 - Sejam $(X_n)_{n\geq 1}$ e $(Y_n)_{n\geq 1}$ sequências de variáveis aleatórias, X e Y variáveis aleatórias tais que $X_n \rightarrow^P X$ e $Y_n \rightarrow^P Y$. Então $X_n \pm Y_n \rightarrow^P X \pm Y$.

P3 - Sejam $(X_n)_{n\geq 1}$ e $(Y_n)_{n\geq 1}$ sequências de variáveis aleatórias, X e Y variáveis aleatórias tais que $X_n \rightarrow^P X$ e $Y_n \rightarrow^P Y$. Então $X_n.Y_n \rightarrow^P X.Y$.