1. **Resolução da questão 3**

3) Considere, uma amostra aleatória (cópias independentes e identicamente distribuídas) de X com função de distribuição Logística

$$F(x) = \frac{1}{1+e^{-\lambda x}},\ x \in \mathbb{R}.$$

A saber:

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21.$$

Sabe-se que

$$\sqrt{n}\left(\hat{\xi}_p - \xi_p\right) \xrightarrow{D} N\left(0, \frac{p(1-p)}{f(\xi_p)^2}\right).$$

Usando o resultado assintótico para a mediana amostral faça o teste de hipótese, para o parâmetro λ

$$H_0 : \lambda = 0,5 \text{ versus } H_1 : \lambda \neq 0,5$$

a um nível de significância de $0,1$? Justifique.

Resolução:

Note que a fdp é dada por

$$f(x) = F'(x) = \frac{\lambda e^{-\lambda x}}{\left(1+e^{-\lambda x}\right)^2},\ x \in \mathbb{R}.$$

Perceba que

$$p = F(\xi_p) \Leftrightarrow p = \frac{1}{1+e^{-\lambda \xi_p}} \Leftrightarrow p^{-1} - 1 = e^{-\lambda \xi_p} \Leftrightarrow$$

$$-\ln\left(p^{-1}-1\right)/\lambda = \xi_p \Leftrightarrow -\ln\left(\frac{1-p}{p}\right)/\lambda = \xi_p \Leftrightarrow \ln\left(\frac{p}{1-p}\right)/\lambda = \xi_p,$$

se considerarmos a mediana, $\xi_{0,5} = 0$, temos

$$f(\xi_{0,5}) = f(0) = \frac{\lambda}{2^2} = \frac{\lambda}{4}$$

e assim $f(\xi_{0,5})^2 = \frac{\lambda^2}{16}$.

Usando o resultado assintótico, obtemos

$$\sqrt{n}\left(\hat{\xi}_{0,5} - 0\right) \xrightarrow{D} N\left(0, \frac{1/4}{\lambda^2/16}\right) \Leftrightarrow \sqrt{n}\hat{\xi}_{0,5} \xrightarrow{D} N\left(0, \frac{4}{\lambda^2}\right) \Leftrightarrow \frac{\lambda}{2}\sqrt{n}\hat{\xi}_{0,5} \xrightarrow{D} N\left(0, 1\right),$$

isto é

$$P\left(z_{0,05} < \frac{\lambda}{2}\sqrt{n}\hat{\xi}_{0,5} < z_{0,95}\right) = 0,90 \Leftrightarrow P\left(z_{0,05}\frac{2}{\sqrt{n}\hat{\xi}_{0,5}} < \lambda < z_{0,95}\frac{2}{\sqrt{n}\hat{\xi}_{0,5}}\right) = 0,90$$

assim obtemos um intervalo com 90% de confiança para λ

$$IC_{90\%}(\lambda) = \left[z_{0,05}\frac{2}{\sqrt{n}\hat{\xi}_{0,5}}; z_{0,95}\frac{2}{\sqrt{n}\hat{\xi}_{0,5}}\right].$$

Agora só é necessário substituir os valores neste intervalo de confiança e verificar se $0,5$ pertence ou não ao intervalo. $n = 21$, $\sqrt{21} = 4,582576$, como a amostra já está ordenada e é ímpar então $\hat{\xi}_{0,5} = 11$, os quantis amostrais da normal padrão de ordem $0,05$, $z_{0,05}$, e $0,95$, $z_{0,95}$, são, respectivamente, -1,644854 e -1,644854.

$$IC_{90\%}(\lambda) = \left[-1,644854\frac{2}{4,582576 \cdot 11}; 1,644854\frac{2}{4,582576 \cdot 11}\right]$$

$$IC_{90\%}(\lambda) = [-0,06526118; 0,06526118]$$

Como $0,5$ está contido no intervalo então não rejeitamos a H_0 sob o nível de 10% de significância.

Observações do monitor: existem infinitos intervalos de confiança, eu optei pelo intervalo simétrico (que oferece o menor comprimento quando a distribuição da quantidade pivotal é unimodal e simétrica). Na resolução eu usei a mediana (porque os cálculos ficam mais simples), mas seria possível construir intervalos de confiança a partir de outros percentis, desde que você efetivamente obtivesse uma quantidade pivotal (uma função do parâmetro cuja distribuição não depende do parâmetro).

Observação pessoal do monitor: eu faltei à monitoria de 20/06/2018 pois não me senti bem durante o dia, me desculpem por quaisquer transtornos gerados àqueles que foram e não me encontraram lá.

E-mail address: `bueno@@ime.usp.br`

Departamento de Estatística, Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, Caixa Postal 66281, CEP 05311-970, São Paulo, Brazil