14 Derivadas Parciais

14.3 Derivadas Parciais

Derivadas Parciais

Em um dia quente, a umidade muito alta aumenta a sensação de calor, ao passo que, se o ar está muito seco, temos a sensação de temperatura mais baixa do que a indicada no termômetro. O Serviço Meteorológico do Canadá introduziu o *humidex* (ou índice de temperatura-umidade) para descrever os efeitos combinados da temperatura e umidade. O *humidex* I é a temperatura aparente do ar quando a temperatura real for T e a umidade relativa for H. Desse modo, I é uma função de T e H e podemos descrever $I = f(T, H)$.

Derivadas Parciais

A tabela de valores de *I* a seguir de *I* é a parte de uma tabela compilada pelo Serviço Meteorológico.

Umidade relativa (%)

Temperatura real (°C) — T \ H	40	45	50	55	60	65	70	75	80
26	28	28	29	31	31	32	33	34	35
28	31	32	33	34	35	36	37	38	39
30	34	35	36	37	38	40	41	42	43
32	37	38	39	41	42	43	45	46	47
34	41	42	43	45	47	48	49	51	52
36	43	45	47	48	50	51	53	54	56

Índice de calor *I* como uma função de temperatura e umidade

Tabela 1

Derivadas Parciais

Se nos concentrarmos na coluna assinalada da tabela que corresponde à umidade relativa de H = 60%, estaremos considerando o *humidex* como uma função de uma única variável T para um valor fixo de H. Vamos escrever $g(T) = f(T, 60)$. Então, $g(T)$ descreve como o humidex I aumenta à medida que a temperatura real T aumenta quando a umidade relativa é de 60%. A derivada de g quando T = 30 °C é a taxa de variação de I com relação a T quando T = 30 °C :

$$g'(30) = \lim_{h \to 0} \frac{g(30 + h) - g(30)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(30 + h, 60) - f(30, 60)}{h}$$

Derivadas Parciais

Podemos aproximar seu valor usando a Tabela 1 e tomando *h* = 2 e –2:

$$g'(30) \approx \frac{g(32) - g(30)}{2} = \frac{f(32, 60) - f(30, 60)}{2} = \frac{42 - 38}{2} = 2$$

$$g'(30) \approx \frac{g(28) - g(30)}{-2} = \frac{f(28, 60) - f(30, 60)}{-2} = \frac{35 - 38}{-2} = 1{,}5$$

Calculando a média desses valores, podemos dizer que a derivada $g'(30)$ é aproximadamente 1,75. Isso significa que, quando a temperatura real é 30 °C e a umidade relativa é de 60%, a temperatura aparente (humidex) sobe para cerca de 1,75 °C para cada grau que a temperatura real sobe.

Derivadas Parciais

Olhemos agora para a linha sombreada da Tabela 1, que corresponde à temperatura fixa de T = 30 °C.

Umidade relativa (%)

Temperatura real (°C) — T \ H	40	45	50	55	60	65	70	75	80
26	28	28	29	31	31	32	33	34	35
28	31	32	33	34	35	36	37	38	39
30	34	35	36	37	38	40	41	42	43
32	37	38	39	41	42	43	45	46	47
34	41	42	43	45	47	48	49	51	52
36	43	45	47	48	50	51	53	54	56

Índice de calor I como uma função de temperatura e umidade

Tabela 1

Derivadas Parciais

Os números nesta linha são valores da função $G(H) = f(30, H)$, que descreve como o humidex aumenta à medida que a umidade relativa H aumenta quando a temperatura real é T = 30 °C. A derivada dessa função quando H = 60% é a taxa de variação de I com relação a T quando H = 60%:

$$G'(60) = \lim_{h \to 0} \frac{G(60 + h) - G(60)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(30, 60 + h) - f(30, 60)}{h}$$

Derivadas Parciais

Tomando h = 5 e –5, aproximamos o valor $G'(60)$ usando os valores tabelados:

$$G'(60) \approx \frac{G(65) - G(60)}{5} = \frac{f(30, 65) - f(30, 60)}{5} = \frac{40 - 38}{5} = 0{,}4$$

$$G'(60) \approx \frac{G(55) - G(60)}{-5} = \frac{f(30, 55) - f(30, 60)}{-5} = \frac{37 - 38}{-5} = 0{,}2$$

Ao calcularmos a média desses valores, obtemos a estimativa $G'(60) \approx 0{,}3$. Isso nos diz que, quando a temperatura é de 30 °C e a umidade relativa é de 60%, o humidex aumenta em cerca de 0,3 °C para cada ponto porcentual que a umidade relativa aumenta.

Derivadas Parciais

Em geral, se *f* é uma função de duas variáveis *x* e *y*, suponha que deixemos somente *x* variar enquanto mantemos fixo o valor de *y*, por exemplo, fazendo $y = b$, onde *b* é uma constante. Estaremos então considerando, realmente, uma função de uma única variável *x*, a saber, $g(x) = f(x, b)$. Se *g* tem derivada em *a*, nós a chamaremos de **derivada parcial de *f* em relação a *x* em (*a*, *b*)** e o denotaremos por $f_x(a, b)$. Assim,

$$\boxed{1} \qquad \boxed{f_x(a, b) = g'(a) \qquad \text{onde} \qquad g(x) = f(x, b)}$$

Derivadas Parciais

Pela definição de derivada, temos

$$g'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{g(a + h) - g(a)}{h}$$

e assim a Equação 1 torna-se

2

$$\boxed{f_x(a, b) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h, b) - f(a, b)}{h}}$$

Derivadas Parciais

Da mesma forma, a **derivada parcial de *f* em relação a *y* em (*a*, *b*)**, denotada por $f_y(a, b)$, é obtida mantendo-se x fixo ($x = a$) e determinando-se a derivada em b da função $G(y) = f(a, y)$:

$$\boxed{3} \qquad \boxed{f_y(a, b) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a, b + h) - f(a, b)}{h}}$$

Com essa notação para derivadas parciais, podemos escrever as taxas de variação do humidex I com relação à temperatura real T e umidade relativa H quando $T = 30$ °C e $H = 60\%$ como segue:

$$f_T(30, 60) \approx 1{,}75 \qquad\qquad f_H(30, 60) \approx 0{,}3$$

Derivadas Parciais

Se agora deixamos o ponto (a, b) variar nas Equações 2 e 3, f_x e f_y se tornam funções de duas variáveis.

$\boxed{4}$ Se f é uma função de duas variáveis, suas **derivadas parciais** são as funções f_x e f_y definidas por

$$f_x(x, y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h, y) - f(x, y)}{h}$$

$$f_y(x, y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x, y + h) - f(x, y)}{h}$$

Derivadas Parciais

Existem diversas notações alternativas para derivadas parciais. Por exemplo, em vez de f_x, podemos escrever f_1 ou $D_1 f$ (para indicar a derivação em relação à *primeira* variável) ou $\partial f/\partial x$. Mas aqui, $\partial f/\partial x$ não pode ser interpretada como uma razão de diferenciais.

Notações para as Derivadas Parciais Se $z = f(x, y)$, escrevemos

$$f_x(x, y) = f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = \frac{\partial z}{\partial x} = f_1 = D_1 f = D_x f$$

$$f_y(x, y) = f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) = \frac{\partial z}{\partial y} = f_2 = D_2 f = D_y f$$

Derivadas Parciais

Para calcularmos as derivadas parciais, tudo que temos a fazer é nos lembrarmos, a partir da Equação 1, que a derivada parcial com relação a x é apenas é a derivada *ordinária* da função g de uma única variável obtida mantendo-se fixo o valor de y. Então, temos a seguinte regra.

Regra para Determinar as Parciais Derivativas de $z = f(x, y)$

1. Para determinar f_x, trate y como uma constante e derive $f(x, y)$ com relação a x.
2. Para determinar f_y, trate x como uma constante e derive $f(x, y)$ com relação a y.

Exemplo 1

Se $f(x, y) = x^3 + x^2y^3 - 2y^2$, encontre $f_x(2, 1)$ e $f_y(2, 1)$.

SOLUÇÃO: Mantendo y constante e derivando em relação a x, obtemos

$$f_x(x, y) = 3x^2 + 2xy^3$$

e, assim,

$$f_x(2, 1) = 3 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2 \cdot 1^3 = 16$$

Mantendo x constante e derivando em relação a y, obtemos

$$f_y(x, y) = 3x^2y^2 - 4y$$

$$f_y(2, 1) = 3 \cdot 2^2 \cdot 1^2 - 4 \cdot 1 = 8$$

Interpretações das Parciais Derivadas

Interpretações das Parciais Derivadas

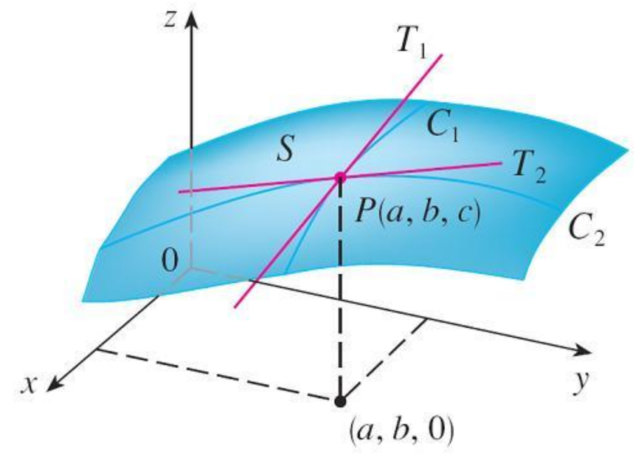
Para darmos uma interpretação geométrica para as derivadas parciais, lembremo-nos de que a equação $z = f(x, y)$ representa uma superfície S (o gráfico de f). Se $f(a, b) = c$, então o ponto $P(a, b, c)$ está em S. Ao fixar $y = b$, estamos restringindo nossa atenção à curva C_1 em que o plano vertical $y = b$ intersecciona S. (Em outras palavras, C_1 é o corte de S no plano $y = b$.)

Interpretações das Parciais Derivadas

Dessa maneira, o plano vertical $x = a$ intersecciona S em uma curva C_2. As curvas C_1 e C_2 passam pelo ponto P. (Veja a Figura 1.)

Observe que a curva C_1 é o gráfico da função $g(x) = f(x, b)$, de modo que a inclinação da tangente T_1 em P é $g'(a) = f_x(a, b)$.

A curva C_2 é o gráfico da função $G(y) = f(a, y)$, de modo que a inclinação da tangente T_2 em P é $G'(b) = f_y(a, b)$.



As derivadas parciais de f em (a, b) são as inclinações das retas tangentes a C_1 e C_2.

Figura 1

Interpretações das Parciais Derivadas

Então, as derivadas parciais $f_x(a, b)$ e $f_y(a, b)$ podem ser interpretadas geometricamente como as inclinações das retas tangentes em $P(a, b, c)$ aos cortes C_1 e C_2 de S nos planos $y = b$ e $x = a$. Como vimos no caso da função humidex, as derivadas parciais podem ser interpretadas como *taxas de variação*. Se $z = f(x, y)$, então $\partial z/\partial x$ representa a taxa de variação de z com respeito a x quando y é mantido fixo. Da mesma forma, $\partial z/\partial y$ representa a taxa de variação de z em relação a y quando x é mantido fixo.

Exemplo 2

Se $f(x, y) = 4 - x^2 - 2y^2$, determine $f_x(1, 1)$ e $f_y(1, 1)$ e interprete esses números como inclinações.

SOLUÇÃO: Temos

$$f_x(x, y) = -2x \qquad f_y(x, y) = -4y$$

$$f_x(1, 1) = -2 \qquad f_y(1, 1) = -4$$

Exemplo 2 – *Solução*

continuação

O gráfico de f é o paraboloide $z = 4 - x^2 - 2y^2$ e o plano vertical $y = 1$ intercepta-o na parábola $z = 2 - x^2$, $y = 1$. (Como na discussão anterior, rotulamos C_1 na Figura 2.) A inclinação da reta tangente a essa parábola no ponto (1, 1, 1) é $f_x(1, 1) = -2$.

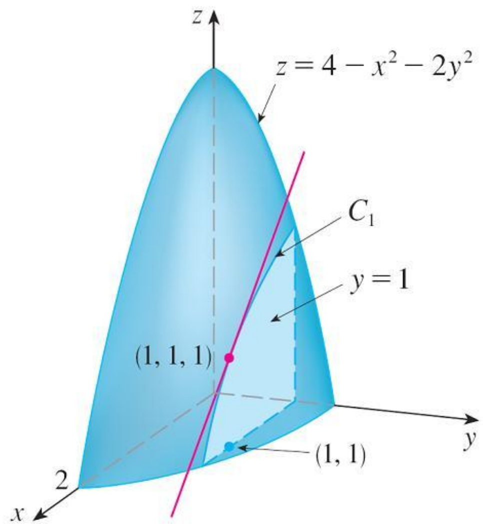


Figura 2

Exemplo 2 – *Solução*

continuação

Da mesma forma, a curva C_2 em que o plano $x = 1$ interpreta o paraboloide é a parábola $z = 3 – 2y^2$, $x = 1$, e a inclinação da reta tangente em (1, 1, 1) é $f_y(1, 1) = –4$. (Veja a Figura 3.)

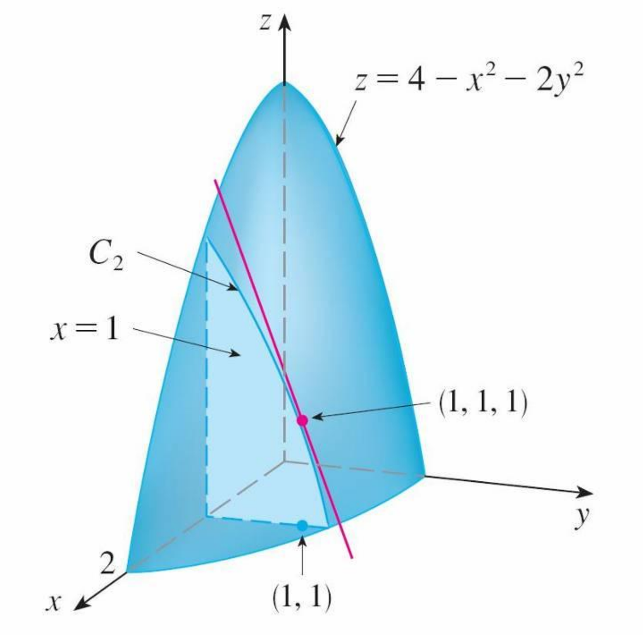


Figura 3

Funções de Mais de Duas Variáveis

Funções de Mais de Duas Variáveis

As derivadas parciais também podem ser definidas para funções de três ou mais variáveis. Por exemplo, se *f* é uma função de três variáveis *x*, *y* e *z*, então sua derivada parcial em relação a *x* é definida como

$$f_x(x, y, z) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h, y, z) - f(x, y, z)}{h}$$

e é determinada pela relação de *y* e *z* como constantes e derivando *f*(*x*, *y*, *z*) em relação a *x*.

Funções de Mais de Duas Variáveis

Se $w = f(x, y, z)$, então, $f_x = \partial w/\partial x$ pode ser interpretada como a taxa de variação de w com relação a x quando y e z são mantidos fixos. Entretanto, não podemos interpretá-la geometricamente porqur o gráfico de f pertence ao espaço de dimensão quatro.

Em geral, se u é uma função de n variáveis, $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, sua derivada parcial em relação à i-ésima variável x_i é

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i + h, x_{i+1}, \ldots, x_n) - f(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n)}{h}$$

e podemos também escrever

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} = f_{x_i} = f_i = D_i f$$

Exemplo 5

Encontre f_x, f_y e f_z se $f(x, y, z) = e^{xy} \ln z$.

SOLUÇÃO: Mantendo y e z constantes e derivando em relação a x, temos

$$f_x = ye^{xy} \ln z$$

Da mesma forma, $f_y = xe^{xy} \ln z$ e $f_z = \dfrac{e^{xy}}{z}$

Derivadas de Ordem Mais Alta

Derivadas de Ordem Mais Alta

Se f é uma função de duas variáveis, suas derivadas parciais f_x e f_y são funções de duas variáveis, de modo que podemos considerar novamente suas derivadas parciais $(f_x)_x$, $(f_x)_y$, $(f_y)_x$ e $(f_y)_y$, chamadas **derivadas parciais de segunda ordem** de f. Se $z = f(x, y)$, usamos a seguinte notação:

$$(f_x)_x = f_{xx} = f_{11} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$

$$(f_x)_y = f_{xy} = f_{12} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial y\, \partial x}$$

Derivadas de Ordem Mais Alta

$$(f_y)_x = f_{yx} = f_{21} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}$$

$$(f_y)_y = f_{yy} = f_{22} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

Portanto, a notação f_{xy} (ou $\partial^2 f/\partial y\,\partial x$) significa que primeiro derivamos com relação a x e, depois em relação a y, ao passo que no calculo de f_{yx} a ordem é invertida.

Exemplo 6

Determine as derivadas parciais de

$$f(x, y) = x^3 + x^2y^3 - 2y^2$$

SOLUÇÃO: No Exemplo 1, descobrimos que

$$f_x(x, y) = 3x^2 + 2xy^3 \qquad f_y(x, y) = 3x^2y^2 - 4y$$

Portanto,

$$f_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}(3x^2 + 2xy^3) = 6x + 2y^3 \qquad f_{xy} = \frac{\partial}{\partial x}(3x^2 + 2xy^3) = 6xy^2$$

$$f_{yx} = \frac{\partial}{\partial x}(3x^2y^2 - 4y) = 6xy^2 \qquad f_{yy} = \frac{\partial}{\partial x}(3x^2y^2 - 4y) = 6x^2y - 4$$

Derivadas de Ordem Mais Alta

Observe que $f_{xy} = f_{yx}$ no Exemplo 6. Isso não é só uma coincidência. As derivadas parciais mistas f_{xy} e f_{yx} são iguais para a maioria das funções que encontramos na prática. O próximo teorema, do matemático francês Alexis Clairaut (1713-1765), fornece condições sob as quais podemos afirmar que $f_{xy} = f_{yx}$.

Teorema de Clairaut Suponha que f seja definida em uma bola aberta D que contenha o ponto (a, b). Se as funções f_{xy} e f_{yx} forem ambas contínuas em D, então

$$f_{xy}(a, b) = f_{yx}(a, b)$$

Derivadas de Ordem Mais Alta

Derivadas parciais de ordem 3 ou maior também podem ser definidas. Por exemplo,

$$f_{xyy} = (f_{xy})_y = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x}\right) = \frac{\partial^3 f}{\partial y^2\, \partial x}$$

e usando o Teorema de Clairaut podemos mostrar que $f_{xyy} = f_{yxy} = f_{yyx}$ se essas funções forem contínuas.

Equações Diferenciais Parciais

Equações Diferenciais Parciais

As derivadas parciais ocorrem em *equações diferenciais parciais* que exprimem certas leis físicas. Por exemplo, a equação diferencial parcial

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

é denominada **equação de Laplace** em homenagem a Pierre Laplace (1749-1827). As soluções dessa equação são chamadas **funções harmônicas** e são muito importantes no estudo de condução de calor, escoamento de fluidos e potencial elétrico.

Exemplo 8

Mostre que a função $u(x, y) = e^x \operatorname{sen} y$ é solução da equação de Laplace.

SOLUÇÃO: Primeiro calcularemos as derivadas parciais necessárias de segunda ordem:

$$u_x = e^x \operatorname{sen} y \qquad\qquad u_y = e^x \cos y$$

$$u_{xx} = e^x \operatorname{sen} y \qquad\qquad u_{yy} = -e^x \operatorname{sen} y$$

Assim, $\quad u_{xx} + u_{yy} = e^x \operatorname{sen} y - e^x \operatorname{sen} y = 0$

Portanto, u satisfaz a equação de Laplace.

Equações Diferenciais Parciais

A **equação de onda**

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

descreve o movimento de uma onda, que pode ser do mar, um onda sonora, de som, luminosa ou se movendo em uma corda vibrante.

Equações Diferenciais Parciais

Por exemplo, se $u(x, t)$ representa o deslocamento da corda vibrante de violino no instante t e à distância x de uma extremidade da corda (como na Figura 8), então $u(x, t)$ satisfaz a equação de onda. A constante a depende da densidade da corda e da tensão aplicada nela.

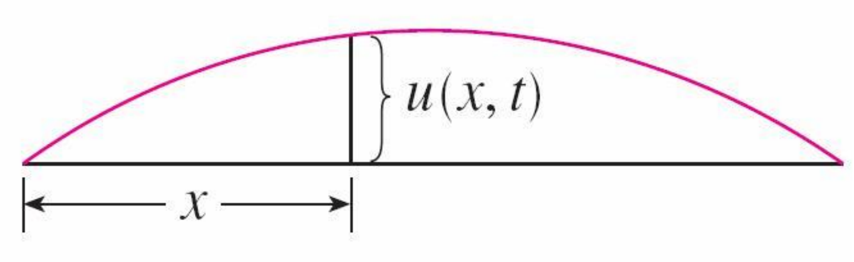


Figura 8

Equações Diferenciais Parciais

As equações diferenciais parciais que envolvem as funções de três variáveis também são muito importantes na ciência e na engenharia. A equação tridimensional de Laplace é

$$\boxed{5} \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

E um lugar em que ocorre é na geofísica. Se $u(x, y, z)$ representa a força do campo magnético na posição (x, y, z), então ela satisfaz a Equação 5. A força do campo magnético indica a distribuição de minérios ricos em ferro e reflete diferentes tipos de rochas e a localização de falhas.

A Função de Produção de Cobb-Douglas

A Função de Produção de Cobb-Douglas

Descrevemos o trabalho de Cobb e Douglas na modelagem da produção total P de um sistema econômico como função da quantidade de mão de obra L e o capital investido K. Usaremos agora as derivadas parciais para mostrar como a forma particular desse modelo deriva de certas hipóteses que eles fizeram sobre a economia.

Se a função de produção é denotada por $P = P(L, K)$, a derivada parcial $\partial P/\partial L$ é a taxa de variação da produção em relação à quantidade de trabalho. Os economistas chamam isso de produção marginal em relação ao trabalho ou **produtividade marginal do trabalho**.

A Função de Produção de Cobb-Douglas

Da mesma forma, a derivada parcial $\partial P/\partial K$ é a taxa de variação da produção em relação ao capital investido e é chamada a ***produtividade marginal do capital***. Nesses termos, as hipóteses feitas por Cobb e Douglas podem ser enunciadas da seguinte forma:

(i) Se ou a mão de obra ou o capital se anulam, o mesmo acontece com a produção.

(ii) A produtividade marginal do trabalho é proporcional à quantidade de produção por unidade de trabalho.

(iii) A produtividade marginal do capital é proporcional à quantidade de produção por unidade de capital.

A Função de Produção de Cobb-Douglas

Como a produção por unidade de trabalho é *P*/*L*, a hipótese (ii) diz

$$\frac{\partial P}{\partial L} = \alpha \frac{P}{L}$$

para alguma constante α. Se mantivermos *K* constante ($K = K_0$), então essa equação diferencial parcial se transforma na equação diferencial ordinária:

$$\boxed{6} \qquad \frac{dP}{dL} = \alpha \frac{P}{L}$$

A Função de Produção de Cobb-Douglas

Se resolvermos essa equação diferencial separável, obteremos

$$\boxed{7} \qquad P(L, K_0) = C_1(K_0)L^{\alpha}$$

Observe que escrevemos a constante C_1 como função de K_0 porque ela pode depender do valor de K_0.

Analogamente, a hipótese (iii) diz que

$$\frac{\partial P}{\partial K} = \beta \frac{P}{K}$$

e podemos resolver essa equação diferencial obtendo

$$\boxed{8} \qquad P(L_0, K) = C_2(L_0)K^{\beta}$$

A Função de Produção de Cobb-Douglas

Comparando as Equações 7 e 8, temos

$$\boxed{9} \qquad P(L, K) = bL^{\alpha}K^{\beta}$$

onde b é uma constante independente de L e K. A hipótese (i) mostra que $\alpha > 0$ e $\beta > 0$. Observe que, pela Equação 9, se a mão de obra e o capital são amabos aumentados por um fator m, temos

$$P(mL, mK) = b(mL)^{\alpha}(mK)^{\beta} = m^{\alpha+\beta}bL^{\alpha}K^{\beta} = m^{\alpha+\beta}P(L, K)$$

A Função de Produção de Cobb-Douglas

Se $\alpha + \beta = 1$, então $P(mL, mK) = mP(L, K)$, o que significa que a produção também é aumentada por um fator de m. Essa é a razão pela qual Cobb e Douglas supuseram que $\alpha + \beta = 1$ e, portanto,

$$P(L, K) = bL^{\alpha}K^{1-\alpha}$$