14 Derivadas Parciais

14.2 Limites e Continuidade

Limites e Continuidade

Vamos comparar o comportamento das funções

$$f(x, y) = \frac{\text{sen}(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} \qquad \text{e} \qquad g(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

quando *x* e *y* se aproximam de 0 [e, portanto, o ponto (*x*, *y*) se aproxima da origem].

Limites e Continuidade

As Tabelas 1 e 2 mostram valores de $f(x, y)$ e $g(x, y)$, com precisão de três casas decimais, para pontos (x, y) próximos da origem. (Observe que nenhuma das funções está definida na origem.)

x \ y	−1,0	−0,5	−0,2	0	0,2	0,5	1,0
−1,0	0,455	0,759	0,829	0,841	0,829	0,759	0,455
−0,5	0,759	0,959	0,986	0,990	0,986	0,959	0,759
−0,2	0,829	0,986	0,999	1,000	0,999	0,986	0,829
0	0,841	0,990	1,000		1,000	0,990	0,841
0,2	0,829	0,986	0,999	1,000	0,999	0,986	0,829
0,5	0,759	0,959	0,986	0,990	0,986	0,959	0,759
1,0	0,455	0,759	0,829	0,841	0,829	0,759	0,455

Valores de $f(x, y)$

Tabela 1

Limites e Continuidade

$x \backslash y$	−1,0	−0,5	−0,2	0	0,2	0,5	1,0
−1,0	0,000	0,600	0,923	1,000	0,923	0,600	0,000
−0,5	−0,600	0,000	0,724	1,000	0,724	0,000	−0,600
−0,2	−0,923	−0,724	0,000	1,000	0,000	−0,724	−0,923
0	−1,000	−1,000	−1,000		−1,000	−1,000	−1,000
0,2	−0,923	−0,724	0,000	1,000	0,000	−0,724	−0,923
0,5	−0,600	0,000	0,724	1,000	0,724	0,000	−0,600
1,0	0,000	0,600	0,923	1,000	0,923	0,600	0,000

Valores de $g(x, y)$

Tabela 2

Limites e Continuidade

Parece que, quando (x, y) se aproxima de (0, 0), os valores de $f(x, y)$ se aproximam de 1, enquantoao passo que os valores de $g(x, y)$ não se aproximam de valor algum. Essa nossa observação baseada em evidências numéricas está correta, e podemos escrevemos

$$\lim_{(x, y) \to (0, 0)} \frac{\operatorname{sen}(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} = 1 \qquad \text{e} \qquad \lim_{(x, y) \to (0, 0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \quad \text{não existe}$$

Limites e Continuidade

Em geral, usamos a notação

$$\lim_{(x,\, y) \to (a,\, b)} f(x, y) = L$$

para indicar os valores de *f*(*x*, *y*) se aproximam do número *L* à medida que o ponto (*x*, *y*) se aproxima do ponto (*a*, *b*) ao longo de qualquer caminho que esteja no domínio de *f*.

Limites e Continuidade

Em outras palavras, podemos tornar os valores de $f(x, y)$ se aproximarem a L como quisermos ao pegar o ponto (x, y) suficientemente perto do ponto (a, b), mas não igual a (a, b). Uma definição mais precisa é a seguinte:

$\boxed{1}$ **Definição** Seja f uma função de duas variáveis cujo domínio D contém pontos arbitrariamente próximos de (a, b). Dizemos que o **limite de $f(x, y)$ quando (x, y) tende (a, b)** é L e escrevemos

$$\lim_{(x, y) \to (a, b)} f(x, y) = L$$

se para todo número $\varepsilon > 0$ houver um número correspondente de $\delta > 0$ tal que

$$\text{se} \quad (x, y) \in D \quad \text{e} \quad 0 < \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2} < \delta \quad \text{então} \quad |f(x, y) - L| < \varepsilon$$

Limites e Continuidade

Outras notações para o limite da Definição 1 são

$$\lim_{\substack{x \to a \\ y \to b}} f(x, y) = L \qquad \text{e} \qquad f(x, y) \to L \text{ como } (x, y) \to (a, b)$$

Para funções de uma única variável, quando fazemos x tender a a, só existem duas direções possíveis de aproximação, pela esquerda ou pela direita. Lembremos a partir do Capítulo 2 que se $\lim_{x \to a^-} f(x) \neq \lim_{x \to a^+} f(x)$, então $\lim_{x \to a} f(x)$ não existe.

Limites e Continuidade

Já para as funções de duas variáveis essa situação não é tão simples porque porque existem infinitas maneiras de (x, y) se aproximar de (a, b) por uma quantidade infinita de direções de qualquer maneira que se queira (veja a Figura 3), bastando que (x, y) se mantenha no domínio de f.

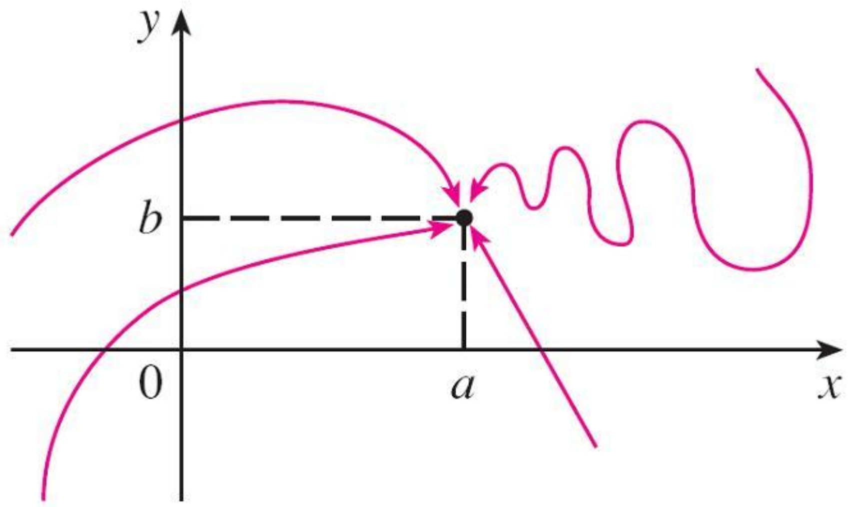

Figura 3

Limites e Continuidade

A Definição 1 diz que a distância entre $f(x, y)$ e L pode ser feita arbitrariamente pequena se tomarmos a distância de (x, y) para (a, b) suficientemente pequena (mas não nula). A definição refere-se somente à *distância* entre (x, y) e (a, b). Ela não refere-se à direção da abordagem. Portanto, se o limite existe, $f(x, y)$ deve se aproximar do mesmo valor-limite, independentemente do modo como (x, y) se aproxima de (a, b).

Limites e Continuidade

Assim, se acharmos dois caminhos diferentes de aproximação ao longo dos quais $f(x, y)$ tenha limites diferentes, segue então que $\lim_{(x,\, y) \to (a,\, b)} f(x, y)$ não existe.

Se $f(x, y) \to L_1$ quando $(x, y) \to (a, b)$ ao longo do caminho C_1 e $f(x, y) \to L_2$ quando $(x, y) \to (a, b)$ ao longo do caminho C_2, com $L_1 \neq L_2$, então $\lim_{(x,\, y) \to (a,\, b)} f(x, y)$ não existe.

Exemplo 1

Mostre que $\displaystyle\lim_{(x,\,y)\to(0,\,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ não existe.

SOLUÇÃO: Seja $f(x, y) = (x^2 - y^2)/(x^2 + y^2)$. Primeiro, vamos considerar (0, 0) ao longo do eixo x. Então, $y = 0$ dá $f(x, 0) = x^2/x^2 = 1$ para todos os $x \neq 0$, portanto

$$f(x, y) \to 1 \quad \text{quando} \quad (x, y) \to (0, 0) \quad \text{ao longo do eixo } x$$

Exemplo 1 – *Solução*

continuação

Agora, vamos fazer a abordagem ao longo do eixo y ao colocar $x = 0$. Então $f(0, y) = \dfrac{-y^2}{y^2} = -1$ para todos $y \neq 0$, portanto

$$f(x, y) \to -1 \text{ como } (x, y) \to (0, 0) \text{ ao longo do eixo } y$$

(Veja a Figura 4.)1

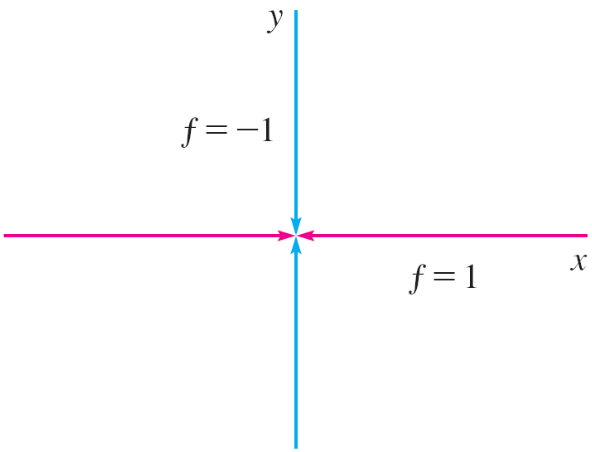

Figura 4

Exemplo 1 – *Solução*

continuação

Como *f* tem dois limites diferentes ao longo de duas retas diferentes, o limite não existe. (Isso confirma a conjectura que fizemos com base na evidência numéricas no início desta seção.)

Limites e Continuidade

Vamos agora olhar o caso em que o limite *existe*. Como para a função de uma única variável, o cálculo do limite de funções de duas variáveis pode ser muito simplificado usando-se as propriedades dos limites. As Propriedades do Limite podem ser estendidas para as funções de duas variáveis. O limite da soma é a soma dos limites; o limite do produto é o produto dos limites; e assim por diante. Em particular, as seguintes equações são verdadeiras:

$$\boxed{2} \qquad \lim_{(x,y)\to(a,b)} x = a \qquad \lim_{(x,y)\to(a,b)} y = b \qquad \lim_{(x,y)\to(a,b)} c = c$$

O Teorema do Confronto também vale.

Continuidade

Continuidade

Lembremo-nos de que o cálculo de limites de funções contínuas de uma única variável é fácil. Ele pode ser obtido por substituição direta, porque, pela definição de função contínua, $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$. Funções contínuas de duas variáveis também são definidas pela propriedade da substituição direta.

$\boxed{4}$ **Definição** Uma função f de duas variáveis é dita **contínua em** (a, b) se

$$\lim_{(x, y) \to (a, b)} f(x, y) = f(a, b)$$

Dizemos que f é **contínua em** D se f for contínua em todo ponto (a, b) de D.

Continuidade

O significado intuitivo de continuidade é que, se o ponto (x, y) varia de uma pequena quantidade, o valor de $f(x, y)$ variará de uma pequena quantidade. Isso quer dizer que a superfície que corresponde ao gráfico de uma função contínua não tem buracos ou rupturas.

Usando as propriedades de limites, podemos ver que soma, diferença, produto e quociente de funções contínuas são contínuos em seus domínios. Vamos usar esse fato para dar exemplos de funções contínuas.

Uma **função polinomial de duas variáveis** (ou simplesmente polinômio) é uma soma de termos da forma cx^my^n, onde c é uma constante e m e n são números inteiros não negativos.

Continuidade

Uma **função racional** é uma razão de polinômios. Por exemplo,

$$f(x, y) = x^4 + 5x^3y^2 + 6xy^4 - 7y + 6$$

é um polinômio, ao passo que

$$g(x, y) = \frac{2xy + 1}{x^2 + y^2}$$

é uma função racional.

Continuidade

Os limites em $\boxed{2}$ mostram que as funções $f(x, y) = x$, $g(x, y) = y$ e $h(x, y) = c$ são contínuas. Como qualquer polinômio pode ser obtido a partir das funções f, g e h por multiplicação e adição, segue que *todos os polinômios são funções contínuas em* $\mathbb{R}^2$. Da mesma forma, qualquer função racional é contínua em seu domínio, porque ela é o quociente de funções contínuas.

Exemplo 5

Calcule $\lim_{(x, y)\to(1, 2)} (x^2y^3 - x^3y^2 + 3x + 2y)$.

SOLUÇÃO: Como $f(x, y) = x^2y^3 - x^3y^2 + 3x + 2y$ é um polinômio, ela é contínua em qualquer lugar, portanto podemos calcular seu limite pela substituição direta:

$$\lim_{(x, y)\to(1, 2)} (x^2y^3 - x^3y^2 + 3x + 2y) = 1^2 \cdot 2^3 - 1^3 \cdot 2^2 + 3 \cdot 1 + 2 \cdot 2 = 11$$

Continuidade

Como para as funções de uma variável, a composição é outra maneira de combinar funções contínuas para obter outra também contínua. De fato, pode ser mostrado que, se f é uma função contínua de duas variáveis e g é uma função contínua de uma única variável definida na imagem f, a função composta $h = g \circ f$ definida por $h(x, y) =$ $(f(x, y))$ também é contínua.

Funções de Três ou Mais Variáveis

Funções de Três ou Mais Variáveis

Tudo o que fizemos até aqui pode ser estendido para as funções com três ou mais variáveis. A notação

$$\lim_{(x, y, z) \to (a, b, c)} f(x, y, z) = L$$

significa que os valores de $f(x, y, z)$ se aproximam do número L à medida que o ponto (x, y, z) se aproxima do ponto (a, b, c) ao longo de qualquer caminho que esteja no domínio de f.

Funções de Três ou Mais Variáveis

Em função da distância entre dois pontos (x, y, z) e (a, b, c) em $\mathbb{R}^3$ é dado por $\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}$, podemos escrever a definição precisa da seguinte forma: $\varepsilon > 0$ há um número correspondente $\delta > 0$ tal que

se (x, y, z) está no domínio de f e $0 < \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2} < \delta$

então $\quad |f(x, y, z) - L| < \varepsilon$

Funções de Três ou Mais Variáveis

A função f é **contínua** em (a, b, c) se

$$\lim_{(x,\, y,\, z) \to (a,\, b,\, c)} f(x, y, z) = f(a, b, c)$$

Por exemplo, a função

$$f(x, y, z) = \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2 - 1}$$

é uma função racional de três variáveis e, portanto é contínua em todo ponto de $\mathbb{R}^3$, exceto onde $x_2 + y_2 + z_2 = 1$. Em outras palavras, é descontínua na esfera com o centro da origem e o raio 1.

Funções de Três ou Mais Variáveis

Podemos escrever as definições de limite para as funções de limite para as funções de duas ou três variáveis de uma forma compacta, como a seguir.

$\boxed{5}$ Se f é definida em um subconjunto D de $\mathbb{R}^n$, então $\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = L$ significa que para todo número $\varepsilon > 0$ existe um número correspondente $\delta > 0$ tal que

$$\text{se } \mathbf{x} \in D \text{ e } 0 < |\mathbf{x} - \mathbf{a}| < \delta \text{ então } |f(\mathbf{x}) - L| < \varepsilon$$