14.1 SOLUÇÕES

Revisão técnica: Ricardo Miranda Martins – IMECC – Unicamp

1. (a) $f(2,1) = 4 - 1 + 4(2)(1) - 7(2) + 10 = 7$

(b) $f(-3,5) = 9 - 25 + 4(-3)(5) + 21 + 10 = -45$

(c) $$\begin{aligned} f(x+h,y) &= (x+h)^2 - y^2 + 4(x+h)y - 7(x+h) + 10 \\ &= x^2 + 2xh + h^2 - y^2 + 4xy + 4hy - 7x - 7h + 10 \end{aligned}$$

(d) $$\begin{aligned} f(x,y+k) &= x^2 - (y+k)^2 + 4x(y+k) - 7x + 10 \\ &= x^2 - y^2 - 2ky - k^2 + 4xy + 4xk - 7x + 10 \end{aligned}$$

(e) $f(x,x) = x^2 - x^2 + 4x^2 - 7x + 10 = 4x^2 - 7x + 10$

2. (a) $g(1,1) = \ln(1+1-1) = 0$

(b) $g(e,1) = \ln(e+1-1) = \ln e = 1$

(c) $g(x,1) = \ln(x+1-1) = \ln x$

(d) $$\begin{aligned} g(x+h,y) &= \ln((x+h)y + y - 1) \\ &= \ln(xy + hy + y - 1) \end{aligned}$$

(e) $$\begin{aligned} g(x,y+k) &= \ln(x(y+k) + (y+k) - 1) \\ &= \ln(xy + kx + y + k - 1) \end{aligned}$$

3. (a) $F(1,1) = 3(1)(1)/(1+2) = 1$

(b) $F(-1,2) = 3(-1)(2)/(1+8) = -\frac{2}{3}$

(c) $F(t,1) = \dfrac{3t}{t^2+2}$

(d) $F(-1,y) = \dfrac{3(-1)y}{1+2y^2} = -\dfrac{3y}{1+2y^2}$

(e) $F(x,x^2) = \dfrac{3xx^2}{x^2+2(x^2)^2} = \dfrac{3x^3}{x^2+2x^4} = \dfrac{3x}{1+2x^2}$

4. (a) $G\left(2,\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right) = 2 \operatorname{sen} \frac{\pi}{6} \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$

(b) $G\left(4,\frac{\pi}{4},0\right) = 4\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)(1) = 2\sqrt{2}$

(c) $G(t,t,t) = t \operatorname{sen} t \cos t$

(d) $G(u,v,0) = u \operatorname{sen} v \cos 0 = u \operatorname{sen} v$

(e) $$\begin{aligned} G(x,x+y,x) &= x \operatorname{sen}(x+y)\cos x \\ &= x \cos x\,[\operatorname{sen} x \cos y + \operatorname{sen} y \cos x] \end{aligned}$$

5. $D = \mathbb{R}^2$ e a imagem é $\mathbb{R}$.

6. $D = \{(x,y) \mid x - y \geq 0\} = \{(x,y) \mid x \geq y\}$.
A imagem é $\{z \mid z \geq 0\}$.

7. $x + y \neq 0$, então $D = \{(x,y) \mid x + y \neq 0\}$. Uma vez que $2/(x+y)$ não pode ser zero, a imagem é $\{z \mid z \neq 0\}$.

8. y/x é definida sempre que $x \neq 0$, então $D = \{(x,y) \mid x \neq 0\}$, e a imagem da função tangente inversa é $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ ou $\left\{z \mid -\frac{\pi}{2} < z < \frac{\pi}{2}\right\}$.

9. $D = \{(x,y,z) \mid yz \neq 0\}$ e a imagem é $\mathbb{R}$.

10. $D = \mathbb{R}^3$ e a imagem é $\mathbb{R}$.

11. (a) $f(2,4) = e^{2^2-4} = e^0 = 1$.

(b) A função exponencial é definida em toda parte, então, para quaisquer valores de x e y que usarmos, e^{x^2-y} é definida. Então o domínio de f é $\mathbb{R}^2$.

(c) Como a imagem de $g(x,y) = x^2 - y$ é $\mathbb{R}$, e a imagem de e^x é $(0,\infty)$, a imagem de $e^{g(x,y)} = e^{x^2-y}$ é $\{z \mid z > 0\}$.

12. (a) $g(1,2) = \sqrt{36 - 9(1)^2 - 4(2)^2} = \sqrt{11}$

(b) Para que a raiz quadrada seja definida, precisamos de $36 - 9x^2 - 4y^2 \geq 0$ ou $\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{9}y^2 \leq 1$. Portanto, o domínio é $\left\{(x,y) \mid \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{9}y^2 \leq 1\right\}$, os pontos sobre ou dentro da elipse $\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{9}y^2 = 1$.

(c) Uma vez que $0 \leq \sqrt{36 - 9x^2 - 4y^2} \leq 6$, a imagem é $\{z \mid 0 \leq z \leq 6\}$.

13. (a) $f(3,6,4) = 3^2 \ln(3 - 6 + 4) = 9 \ln 1 = 0$.

(b) Para que a função logarítmica seja definida, precisamos de $x - y + z > 0$. Então o domínio de f é $\{(x,y,z) \mid x + z > y\}$.

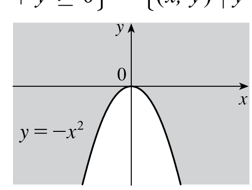
(c) Uma vez que $x^2 \ln(x - y + z)$ pode ser qualquer número real, a imagem de f é $\mathbb{R}$.

14. (a) $f(1,3,-4) = \dfrac{1}{\sqrt{1^2 + 3^2 + (-4)^2 - 1}} = \dfrac{1}{\sqrt{25}} = \dfrac{1}{5}$

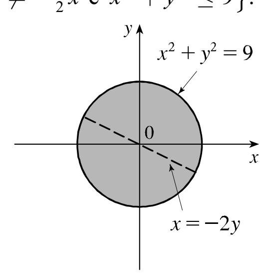
(b) O domínio de f é $\{(x,y,z) \mid x^2 + y^2 + z^2 > 1\}$, o exterior da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

(c) Uma vez que $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - 1} > 0$, a imagem de f é $(0,\infty)$.

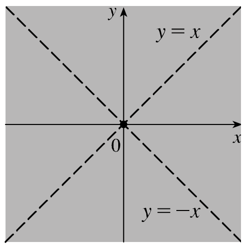
15. $D = \{(x,y) \mid x^2 + y \geq 0\} = \{(x,y) \mid y \geq -x^2\}$



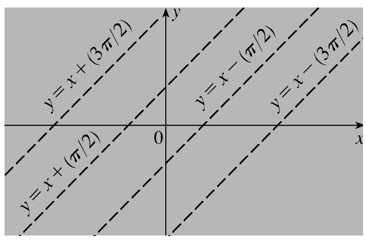
16. $x + 2y \neq 0$ e $9 - x^2 - y^2 \geq 0$, então $D = \left\{(x,y) \mid y \neq -\frac{1}{2}x \text{ e } x^2 + y^2 \leq 9\right\}$.



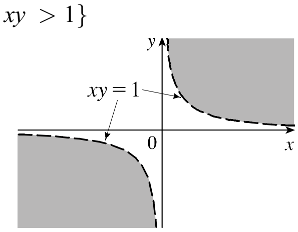
17. $D = \{(x, y) \mid x^2 \neq y^2\} = \{(x, y) \mid y \neq x \text{ e } y \neq -x\}$



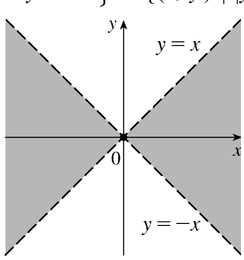
18. $D = \{(x, y) \mid x - y \neq \frac{\pi}{2} + n\pi, n \text{ um inteiro}\}$



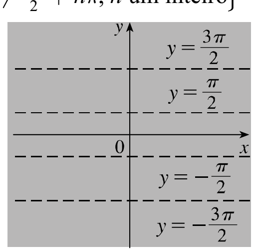
19. $D = \{(x, y) \mid xy > 1\}$



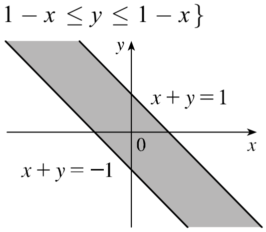
20. $D = \{(x, y) \mid x^2 - y^2 > 0\} = \{(x, y) \mid |y| < |x|\}$



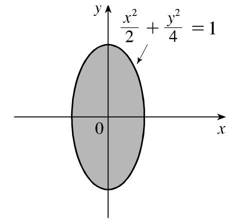
21. $D = \{(x, y) \mid y \neq \frac{\pi}{2} + n\pi, n \text{ um inteiro}\}$



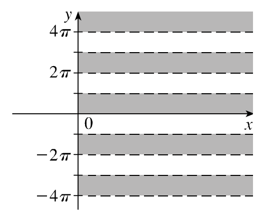
22. $D = \{(x, y) \mid -1 \leq x + y \leq 1\}$
$= \{(x, y) \mid -1 - x \leq y \leq 1 - x\}$



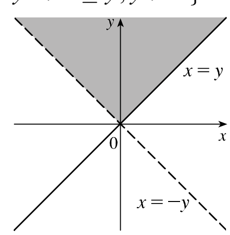
23. $D = \{(x, y) \mid 2x^2 + y^2 \leq 4\}$, os pontos sobre ou dentro da elipse $\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}y^2 = 1$.



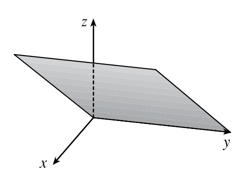
24. Uma vez que sen $y > 0$ implica $2n\pi < y < (2n + 1)\pi$, n um inteiro,
$D = \{(x, y) \mid x > 0 \text{ e } 2n\pi < y < (2n + 1)\pi,$
$n \text{ um inteiro}\}$.



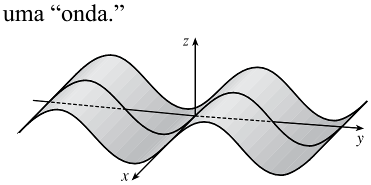
25. Precisamos de $y - x \geq 0$ ou $y \geq x$ e $y + x > 0$ ou $x > -y$. Logo, $D = \{(x, y) \mid -y < x \leq y, y > 0\}$.



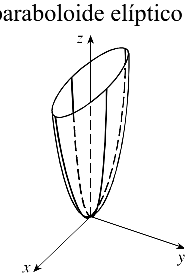
26. $z = x$, um plano que intersecta o plano xz na reta $z = x$, $y = 0$. A parte desse plano que fica no primeiro octante está esboçada.



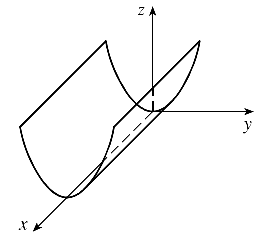
27. $z =$ sen y, uma "onda."



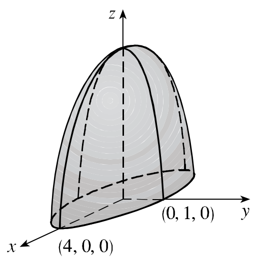
28. $z = x^2 + 9y^2$, um paraboloide elíptico com vértice na origem.



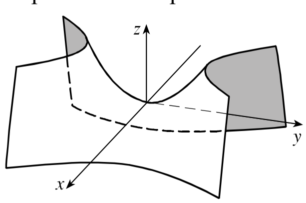
29. $z = y^2$, um cilindro parabólico.



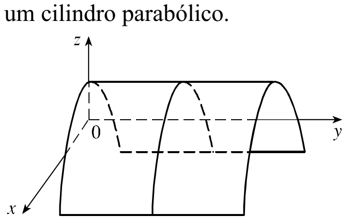
30. $z = \sqrt{16 - x^2 - 16y^2}$, então $z \geq 0$ e $z^2 + x^2 + 16y^2 = 16$, a metade superior de um elipsoide.



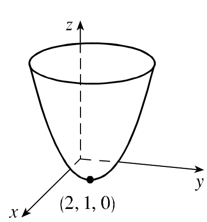
31. $z = y^2 - x^2$, um paraboloide hiperbólico.



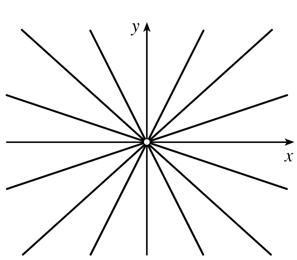
32. $z = 1 - x^2$, um cilindro parabólico.



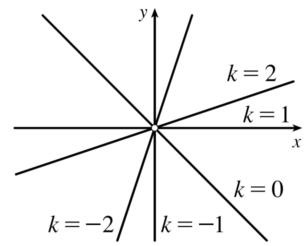
33. $z = x^2 + y^2 - 4x - 2y + 5$ ou, completando os quadrados, $z = (x - 2)^2 + (y - 1)^2$, um paraboloide circular com vértice em (2, 1, 0).



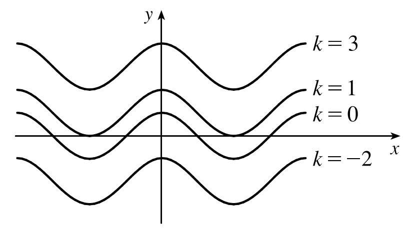
34. $k = x/y$ ou $x = ky$ é uma família de retas sem o ponto (0, 0).



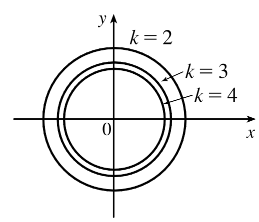
35. $k = \dfrac{x + y}{x - y}$ é uma família de retas com inclinação $\dfrac{k - 1}{k + 1}$ (para $k \neq -1$) sem a origem. Para $k = -1$, a curve é o eixo y sem a origem.



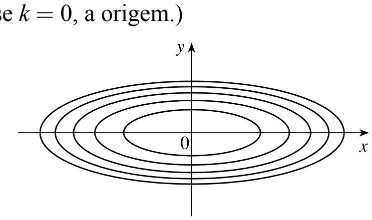
36. $k = y - \cos x$ ou $y = k + \cos x$



37. $k = e^{1/(x^2 + y^2)}$, então $k > 1$ e $1/(x^2 + y^2) = \ln k$ ou $x^2 + y^2 = 1/\ln k$, uma família de círculos.



38. $k = x^2 + 9y^2$, uma família de elipses com eixo principal no eixo x. (Ou, se $k = 0$, a origem.)



39. $k = e^{xy}$ onde, aqui, k deve ser positiva ou obtemos o conjunto vazio. Uma vez que $k = e^{xy}$, $xy = \ln k$. Então, para $k = 1$, as curvas são os eixos coordenados; para $0 < k < 1$, hipérboles no segundo e no quarto quadrantes; para $k > 1$, as curvas são hipérboles no primeiro e no terceiro quadrantes.