# Funções Vetoriais

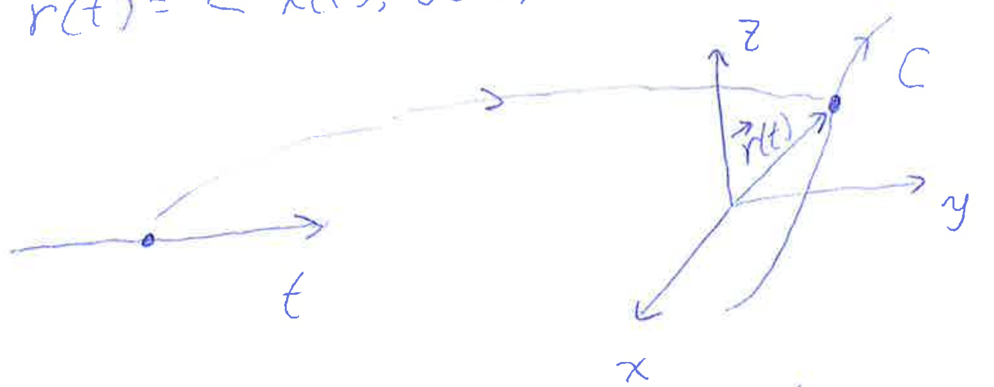
- Uma função vetorial é uma regra que associa a um número real um vetor de $\mathbb{R}^n$:

$$\vec{r}(t) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$\vec{r}(t) = \langle x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t) \rangle$$

- Em particular, se o contra-domínio é $\mathbb{R}^3$

$$\vec{r}(t) = \langle x(t), y(t), z(t) \rangle$$




- O conjunto das equações paramétricas $x = f(t)$, $y = g(t)$ e $z = h(t)$ pode ser representado como uma função vetorial

$$\vec{r}(t) = \langle f(t), g(t), h(t) \rangle$$

Ex. Esboce o gráfico da função vetorial

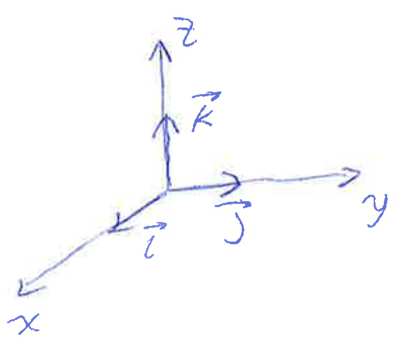
$$\vec{r}(t) = \cos(t)\vec{i} + \text{sen}(t)\vec{j} + 3\vec{k}.$$

Sol.: $|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1$

$\vec{i} \cdot \vec{j} = 0$

$\vec{j} \cdot \vec{k} = 0$

$\vec{k} \cdot \vec{i} = 0$

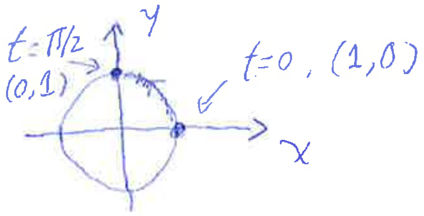


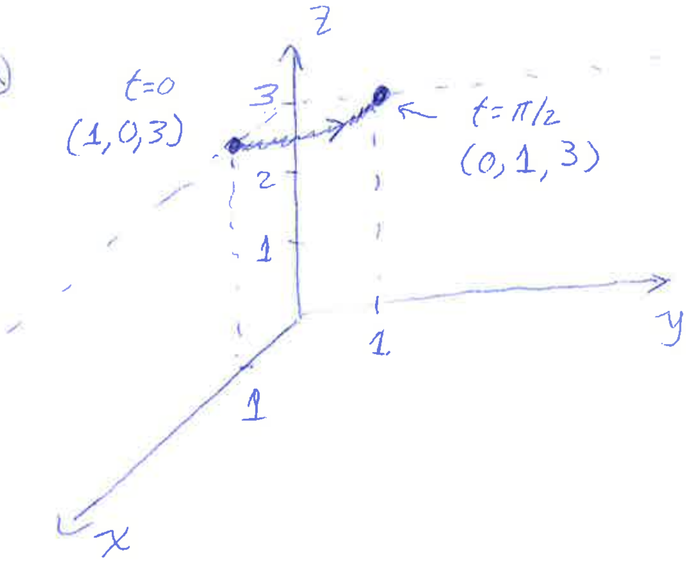
Logo, é equivalente escrever $\vec{r}(t)$ como

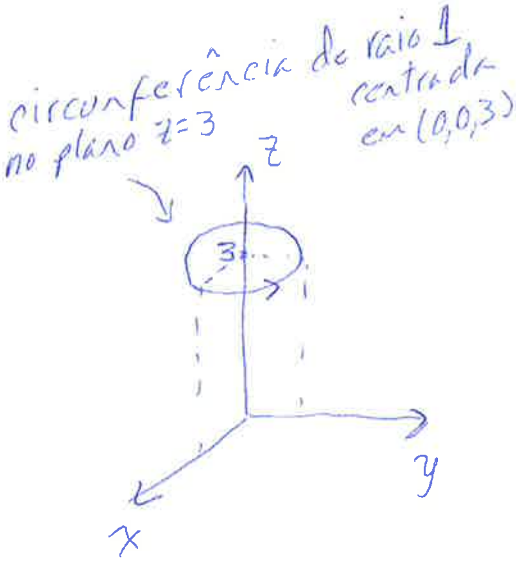
$$\vec{r}(t) = \langle \cos(t), \operatorname{sen}(t), 3 \rangle \quad \text{ou}$$

como equações paramétricas

$$C \begin{cases} x(t) = \cos(t) \\ y(t) = \operatorname{sen}(t) \\ z(t) = 3 \end{cases}$$



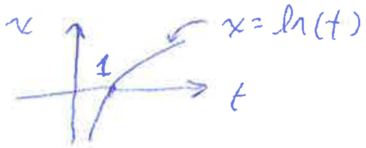

- O domínio de uma função vetorial será definido como o conjunto de pontos que são a interseção dos domínios das funções componentes.

Ex. Determine o domínio da função vetorial

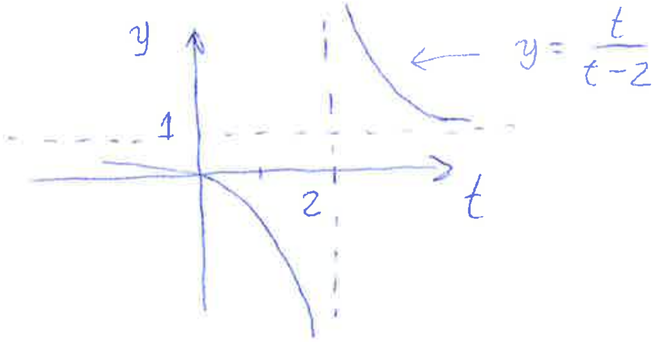
$$\vec{r}(t) = \left\langle \ln(t), \frac{t}{t-2}, e^{-t} \right\rangle$$

<u>Sol.:</u> Podemos estudar por separado três funções escalares: $x(t) = \ln(t)$, $y(t) = \dfrac{t}{t-2}$ e $z(t) = e^{-t}$.

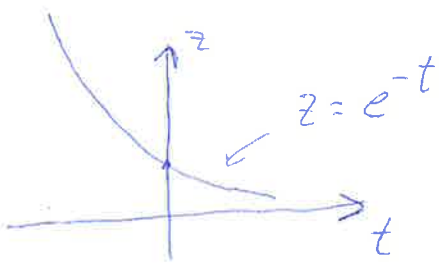
- O domínio de $x(t)$ é $D_{x(t)} = \{t \in \mathbb{R} \mid t > 0\}$



- O domínio de $y(t)$ é $D_{y(t)} = \{t \in \mathbb{R} \mid t \neq 2\}$




- O domínio de $z(t)$ é $D_{z(t)} = \{t \in \mathbb{R}\}$




Logo, o domínio de $\vec{r}(t)$ é $D_{x(t)} \cap D_{y(t)} \cap D_{z(t)} = D_{\vec{r}(t)}$

$$D_{\vec{r}(t)} = \{t \in \mathbb{R} \mid t > 0 \text{ e } t \neq 2\}$$ ☒

# Funções Vetoriais e seus Gráficos



Ex.: Descreva a curva definida pela função vetorial $\vec{r}(t) = <4-t, 3+2t, -5-3t>$.

Sol.: $\begin{cases} x(t) = 4-t \\ y(t) = 3+2t \\ z(t) = -5-3t \end{cases}$ Eq. Paramétricas Lineares em $t$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} t$$ ← eq. de uma reta que passa por $(4, 3, -5)$ e com vetor tangente $(-1, 2, -3)$ ∎

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v} \cdot t$$

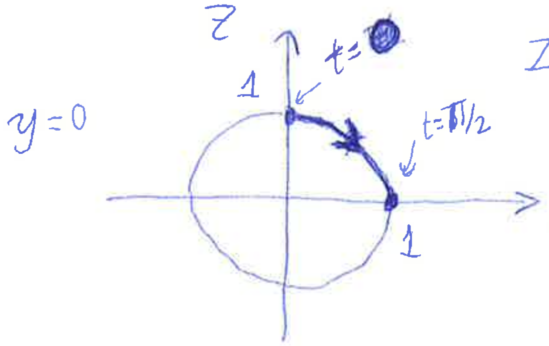
Ex. Esboce o gráfico da curva $\vec{r}(t) = <sen(t), t, cos(t)>$. Indique com uma seta a direção na qual o parâmetro cresce.

Sol.: $\begin{cases} x(t) = sen(t) & (I) \\ y(t) = t & (II) \\ z(t) = cos(t) & (III) \end{cases}$

De (I) e (III)

$$cos^2(t) + sen^2(t) = 1$$ ← Identidade Trigonométrica Fundamental

$$z^2 + x^2 = 1$$

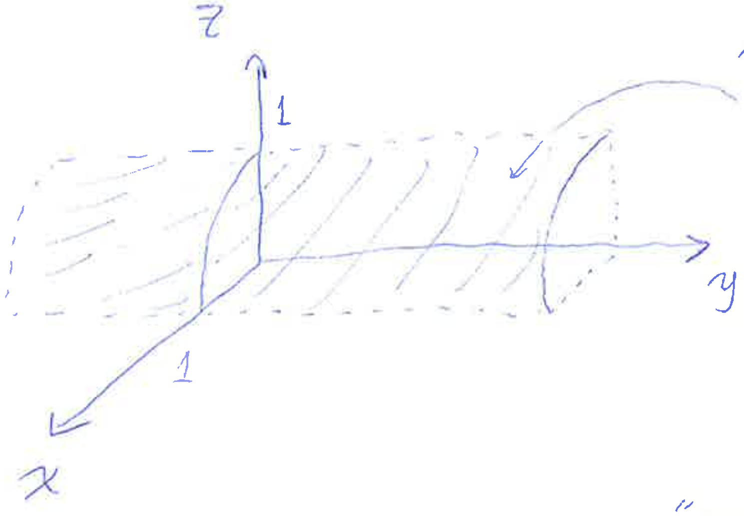



Interpretação Geométrica da Equação

$$z^2+x^2=1$$

no plano $y=0$

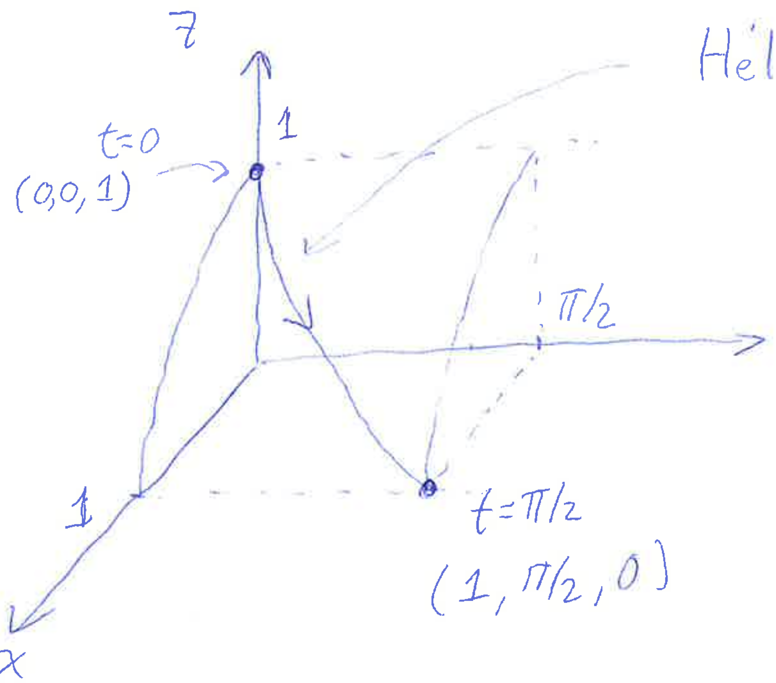
circunferência de raio 1 e centrada na origem




A eq. $z^2+x^2=1$ representa a superfície lateral de um cilindro no espaço tridimensional

A curva que procuramos "mora" na superfície lateral de um cilindro.

| $t$ | $x(t)$ | $y(t)$ | $z(t)$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 1 |
| $\pi/2$ | 1 | $\pi/2$ | 0 |




Hélice Circular

- Parafuso
- Duas fitas das moléculas de DNA.

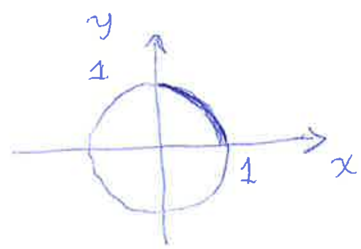
Ex. Determine o vetor que representa a curva obtida pela interseção do cilindro $x^2+y^2=1$ com o plano $y+z=2$.

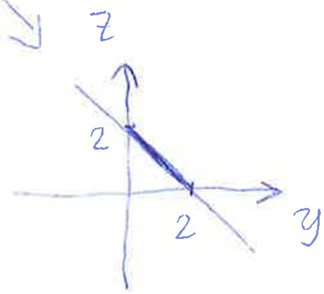
Sol.: Duas superfícies

Um cilindro $x^2+y^2=1$

Um plano $y+z=2$

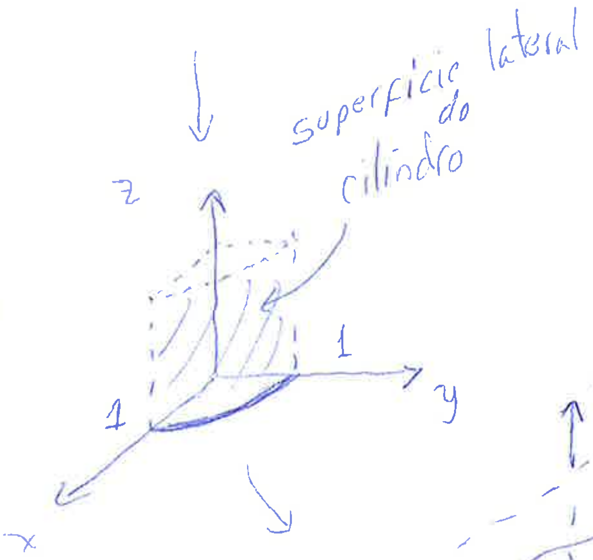
2D

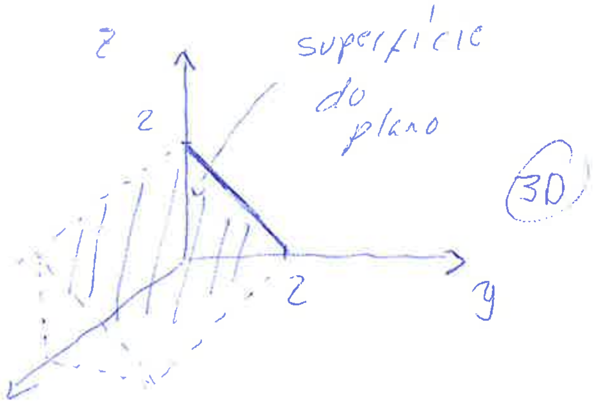


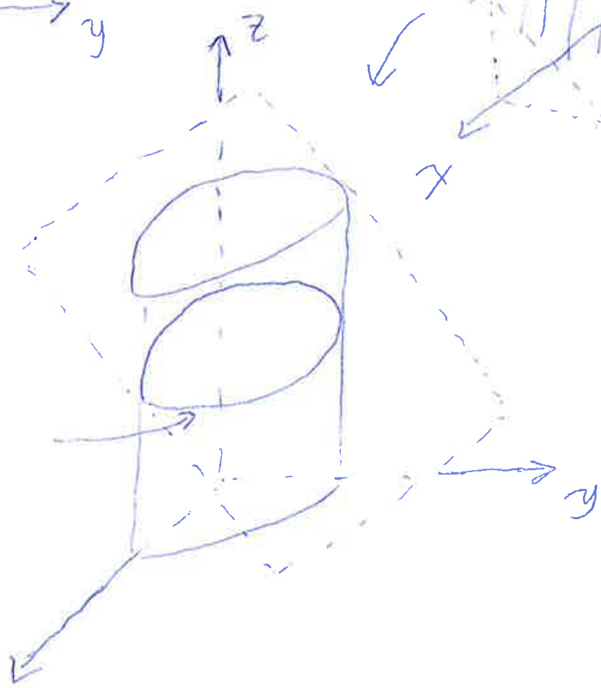

2D

3D




3D




Elipse

$\vec{r}(t) = ?$

$$\text{Elipse}\begin{cases} x^2+y^2=1 & (I) \\ y+z=2 & (II) \end{cases}$$

Queremos descrever a elipse usando uma função vetorial.

$$\text{Elipse}: \vec{r}(t) = \langle x(t), y(t), z(t) \rangle$$

- De (I) escrevemos $x(t) = \cos(t)$
  $y(t) = \text{sen}(t)$

- De (II) $z = 2 - y$, mas $y(t) = \text{sen}(t)$ logo $z(t) = 2 - \text{sen}(t)$

$$\vec{r}(t) = \langle \cos(t), \text{sen}(t), 2-\text{sen}(t) \rangle.$$

$$G(\vec{r}(t)) = \text{Elipse}.$$

Um caminho alternativo, porém não eficiente neste exemplo, é notar que a variável $y$ aparece nas duas eq. (I) e (II). Com isso, tomamos $y$ como parâmetro:

$$y(t) = t$$

- De (II) $z = 2 - y = 2 - t$
- De (I) $x = \pm\sqrt{1-y^2}$ logo $x(t) = \pm\sqrt{1-t^2}$

Com isso $\vec{r}(t) = \langle \pm\sqrt{1-t^2}, t, 2-t \rangle$

O problema está nas duas soluções para a componente $x$.

# Funções Vetoriais no Computador

CONJUNTOS IDÊNTICOS EM $\mathbb{R}^2$

$$\{(\text{sen}(t), \cos(t))\} = \{(\cos(t), \text{sen}(t))\}$$

CONJUNTOS DIFERENTES EM $\mathbb{R}^3$

$$\{(\text{sen}(t), \cos(t), t)\} \neq \{(\cos(t), \text{sen}(t), t)\}$$

---

$$\vec{r}(t) = \langle t\cos(t), t\,\text{sen}(t), t \rangle$$

função vetorial

$$0 \leq t \leq 2\pi$$

Curva na Superfície do Cone

$$\vec{u}(r,t) = \langle r\cos(t), r\,\text{sen}(t), r \rangle$$

campo vetorial

$$0 \leq t \leq 2\pi \quad e \quad 0 \leq r \leq 2\pi$$

---

$$\vec{r}(t) = \langle \text{sen}(t)\cos(t), \cos^2(t), \text{sen}(t) \rangle$$

$$0 \leq t \leq 2\pi$$

Curva na Superfície de uma Espera

$$u(\theta, \phi) = \langle \cos(\theta)\cos(\phi), \text{sen}(\theta)\cos(\phi), \text{sen}(\phi) \rangle$$

$$0 \leq \theta \leq 2\pi \quad e \quad 0 \leq \phi \leq \pi$$

(2)

$$C \begin{cases} x(t) = t^3 \\ y(t) = t^5 \end{cases} \quad 0 \le t < 1$$

$$C' \begin{cases} x(t) = t^5 \\ y(t) = t^3 \end{cases} \quad 0 \le t \le 1.$$

$C'$ é graficamente a "inversa" de $C$

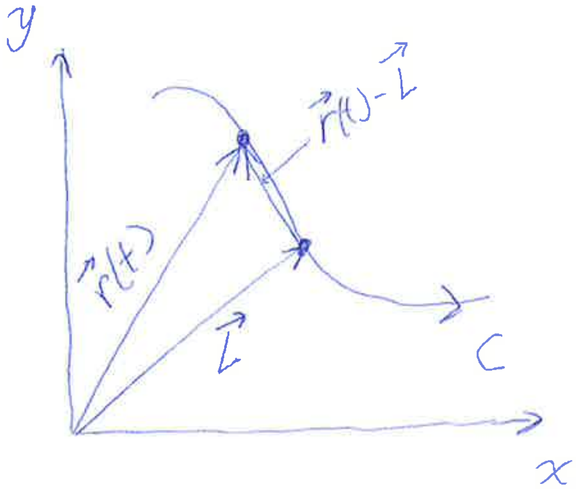
---

$$\begin{cases} \vec{r}(t) = \langle \operatorname{sen}(t), \cos(t), e^{-0.1t} \rangle \\ \quad -1 \le t \le 2\pi \\ \\ \vec{r}(s) = \langle (s-1)^2, s^2, \operatorname{sen}\left(\frac{s\pi}{2}\right) \rangle \\ \quad -1 \le s \le 2\pi \end{cases}$$

Se cortan as curvas?

# Limite e Continuidade de Funções Vetoriais

$\vec{r}(t) = < x(t), y(t) >$


Definição de Limite

$$\lim_{t\to a}\left[\vec{r}(t)\right] = \vec{L} \iff \lim_{t\to a} \underbrace{\left\|\vec{r}(t)-\vec{L}\right\|}_{\text{função escalar}} = 0$$

Teorema: Se $\vec{r}(t) = < x(t), y(t), z(t) >$ então

$$\lim_{t\to a}\left[\vec{r}(t)\right] = \lim_{t\to a}\left[< x(t), y(t), z(t) >\right] = < \lim_{t\to a} x(t), \lim_{t\to a} y(t), \lim_{t\to a} z(t) >$$

sempre que existirem os limites das funções componentes. A recíproca também é verdadeira.

Ex. Calcule o limite de $\vec{r}(t) = < \frac{e^t - 1}{t}, \frac{\sqrt{1+t}-1}{t}, \frac{3}{1+t} >$ quando $t \to 0$.

Sol.: $\lim_{t\to 0}\left[\vec{r}(t)\right] = < \lim_{t\to 0} x(t), \lim_{t\to 0} y(t), \lim_{t\to 0} z(t) >$

Lembrando a regra de L'Hôspital

$$\lim_{x\to a}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \text{"}\frac{0}{0}\text{"} \text{ ou } \text{"}\frac{\infty}{\infty}\text{"}$$

$f'(x)$ e $g'(x)$ existem e são contínuas em $x=a$

$$\Downarrow$$

$$\lim_{x\to a}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \lim_{x\to a}\left[\frac{f'(x)}{g'(x)}\right]$$

- $$\lim_{t\to 0}[x(t)] = \lim_{t\to 0}\left[\frac{e^t-1}{t}\right] = \text{"}\frac{0}{0}\text{"}$$

$$f(t) = e^t - 1 \quad e \quad g(t) = t$$
$$f'(t) = e^t \quad e \quad g(t) = 1$$

$$\lim_{t\to 0}\left[\frac{e^t-1}{t}\right] = \lim_{t\to 0}\left[\frac{e^t}{1}\right] = 1$$

- $$\lim_{t\to 0}[y(t)] = \lim_{t\to 0}\left[\frac{\sqrt{1+t}-1}{t}\right] = \text{"}\frac{0}{0}\text{"}$$

$$f(t) = \sqrt{1+t} - 1 \qquad g(t) = t$$
$$f'(t) = \frac{1}{2}(1+t)^{-1/2} \qquad g(t) = 1$$

$$\lim_{t\to 0}\left[\frac{\sqrt{1+t}-1}{t}\right] = \lim_{t\to 0}\left(\frac{\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1+t}}}{1}\right) = \frac{1}{2}$$

- $\lim_{t\to 0}\left[\frac{3}{1+t}\right] = \frac{3}{1+0} = 3$. A simples subtituição resolve o problema.

logo $\boxed{\lim_{t\to 0}[\vec{r}(t)] = \langle 1, \frac{1}{2}, 3 \rangle}$

3

- Em uma função escalar $f(x)$ a continuidade em um ponto, quando $x=a$, foi definida ~~como~~ pela igualdade

$$\lim_{x \to a} [f(x)] = f(a)$$

- De forma análoga, a continuidade da função vetorial $\vec{r}(t)$ em um ponto, quando $t=a$, será definida como

$$\lim_{t \to a} [\vec{r}(t)] = \vec{r}(a)$$

- Note que a definição é local, vale para um ponto.
- O limite precisa existir perto do ponto de interesse, a função vetorial precisa estar definida para esse ponto e as duas partes anteriores precisam ser iguais.

- Teorema: $\vec{r}(t)$ é contínua em $t=a$

$$\vec{r}(t) = \langle x(t), y(t), z(t) \rangle$$

$$\Updownarrow$$

$x(t)$, $y(t)$ e $z(t)$ são todas contínuas em $t=a$ $\blacksquare$

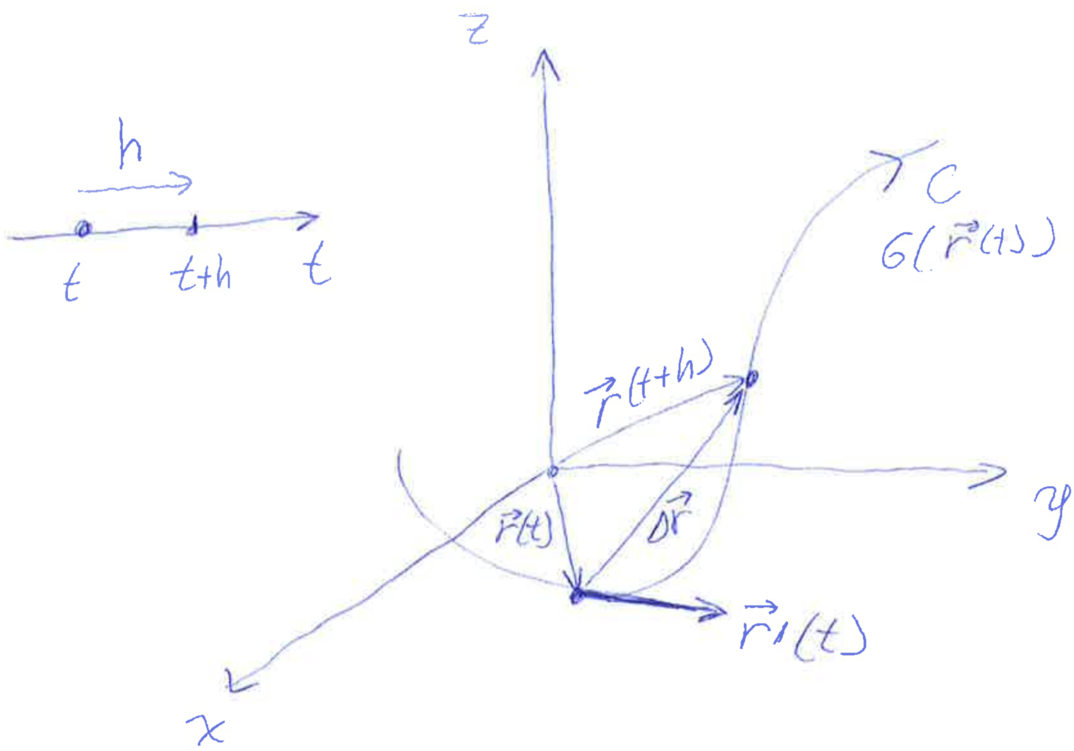
# Derivadas de uma Função Vetorial



**Definição:** Se $\vec{r}(t)$ for uma função vetorial, definimos a derivada de $\vec{r}$ em relação a $t$ como a função vetorial $\vec{r}\,'(t)$ dada por

$$\vec{r}\,'(t) = \lim_{h \to 0} \left[ \frac{\vec{r}(t+h) - \vec{r}(t)}{h} \right]$$

O domínio de $\vec{r}\,'(t)$ consiste em todos os valores de $t$ no domínio de $\vec{r}(t)$ nos quais o limite existe.



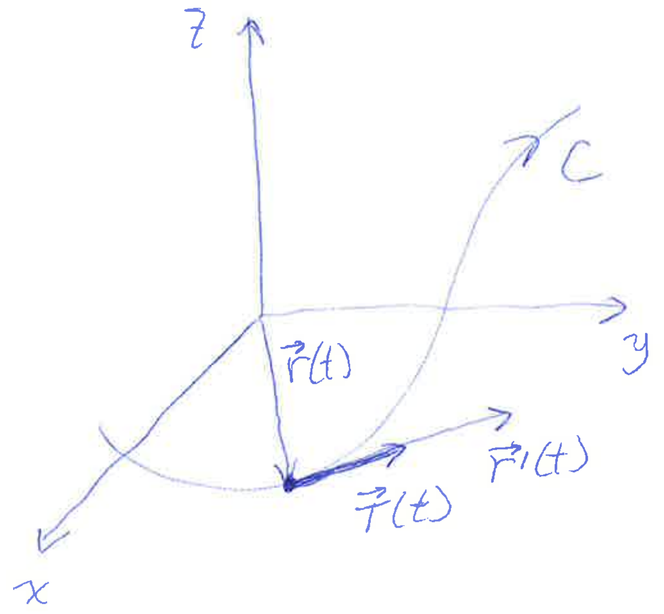

$$\frac{d\,\vec{r}(t)}{dt} = \vec{r}\,'(t) = \vec{v}(t)$$

velocidade em Física

Definição de Vetor Tangente Unitário: $\vec{T}(t)$

$$\vec{T}(t) = \frac{\vec{r}\,'(t)}{\|\vec{r}\,'(t)\|}$$

$$\|\vec{T}(t)\| = 1, \quad \forall t \in \mathbb{R}$$




Teorema: Se $\vec{r}(t)$ for uma função vetorial, então $\vec{r}(t)$ é diferenciável em $t$ se, e somente se, cada uma das funções componentes for diferenciável em $t$ e

$$\vec{r}\,'(t) = \langle x'(t), y'(t), z'(t) \rangle$$

Prova: A demonstração, por simplicidade, será feita para o caso em que $\vec{r}(t) = \langle x(t), y(t) \rangle$
$= x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$

Por definição

$$\vec{r}\,'(t) = \lim_{h \to 0} \left[ \frac{\vec{r}(t+h) - \vec{r}(t)}{h} \right]$$

$$\vec{r}\,'(t) = \lim_{h\to 0}\left[\frac{[x(t+h)\vec{i} + y(t+h)\vec{j}] - [x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}]}{h}\right]$$

$$\vec{r}\,'(t) = \lim_{h\to 0}\left[\frac{[x(t+h) - x(t)]\vec{i} + [y(t+h) - y(t)]\vec{j}}{h}\right]$$

$$\vec{r}\,'(t) = \lim_{h\to 0}\left[\frac{x(t+h) - x(t)}{h}\vec{i}\right] + \lim_{h\to 0}\left[\frac{y(t+h) - y(t)}{h}\vec{j}\right]$$

$$\vec{r}\,'(t) = \lim_{h\to 0}\left(\frac{x(t+h) - x(t)}{h}\right)\vec{i} + \lim_{h\to 0}\left(\frac{y(t+h) - y(t)}{h}\right)\vec{j}$$

$$\vec{r}\,'(t) = x'(t)\vec{i} + y'(t)\vec{j}$$

$$\vec{r}\,'(t) = \langle x'(t), y'(t) \rangle$$

Ex.: a) Determine a derivada de $\vec{r}(t) = \langle 1+t^3, te^{-t}, sen(2t) \rangle$

b) Encontre o vetor tangente $(\vec{T}(t))$ no ponto onde $t=0$.

Sol.: a) $\vec{r}(t) = \langle 1+t^3, te^{-t}, sen(2t) \rangle$

$\vec{r}\,'(t) = \langle 3t^2, e^{-t} - te^{-t}, 2\cos(2t) \rangle$

b) $\vec{r}\,'(t=0) = \langle 0, 1, 2 \rangle$

$$\vec{T}(t=0) = \frac{\vec{r}\,'(0)}{\|\vec{r}\,'(0)\|}$$

$$\|\vec{r}\,'(0)\| = \sqrt{0^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$$

$$\boxed{\vec{T}(0) = \frac{1}{\sqrt{5}}\langle 0, 1, 2 \rangle}$$

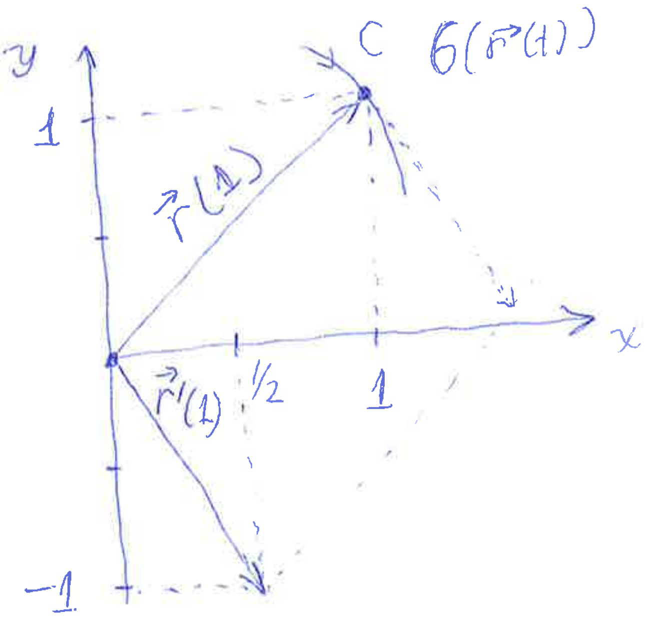
Ex.: Para a curva $\vec{r}(t) = \sqrt{t}\,\vec{i} + (2-t)\vec{j}$ determine $\vec{r}\,'(t)$ e desenhe o vetor posição $\vec{r}(1)$ e o vetor tangente $\vec{r}\,'(1)$.

Sol.: $\vec{r}(t) = < \sqrt{t}, 2-t > = < t^{1/2}, 2-t >$

$\vec{r}\,'(t) = < \frac{1}{2} t^{-1/2}, -1 > = < \frac{1}{2\sqrt{t}}, -1 >$

$\vec{r}(1) = < 1, 1 >$

$\vec{r}\,'(1) = < \frac{1}{2}, -1 >$



Ex. Determine a função vetorial que descreve a reta tangente à hélice elíptica com função vetorial $\vec{r}(t) = \langle 2\cos(t), \operatorname{sen}(t), t \rangle$ no ponto $(0, 1, \pi/2)$.

Sol.: São duas curvas e suas correspondentes funções vetoriais.

① Hélice Elíptica

$\vec{r}(t) = \langle 2\cos(t), \operatorname{sen}(t), t \rangle$

② Reta Tangente

$\vec{r}(\lambda) = \; ? \; = \langle x(\lambda), y(\lambda), z(\lambda) \rangle$

- Um ponto em comum
  $\vec{r}_0 = (0, 1, \pi/2) = \vec{r}(t = \pi/2)$
- Inclinação da Reta tangente igual nesse ponto comum

$\vec{r}(\lambda) = \vec{r}_0 + \vec{v} \cdot \lambda \leftarrow$ Eq. da Reta Tangente

Precisamos determinar para que valor de $t$ a hélice elíptica passa por $\vec{r}_0 = (0, 1, \pi/2)$.

$$\begin{cases} 2\cos(t) = 0 \\ \operatorname{sen}(t) = 1 \\ t = \pi/2 \end{cases} \rightarrow t = \pi/2$$

satisfaz as três equações, logo é solução do sistema.

$\vec{v} = \vec{r}\,'(t = \pi/2)$

$\vec{r}(t) = \langle 2\cos(t), \text{sen}(t), t \rangle$

$\vec{r}\,'(t) = \langle -2\,\text{sen}(t), \cos(t), 1 \rangle$

$\vec{r}\,'(\pi/2) = \langle -2, 0, 1 \rangle = \vec{v}$

Logo, a ~~eq da~~ reta tangente é descrita pela função vetorial

$$\vec{r}(\lambda) = \vec{r_0} + \vec{v} \cdot \lambda$$

$$\vec{r}(\lambda) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \pi/2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \lambda$$

$$\boxed{\vec{r}(\lambda) = \langle -2\lambda, 1, \pi/2 + \lambda \rangle}$$

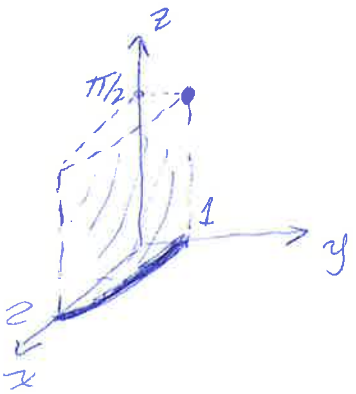
Esboço do Gráfico

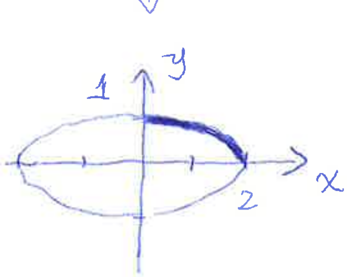
$$\begin{cases} x(t) = 2\cos(t) \longrightarrow \dfrac{x}{2} = \cos(t) \longrightarrow \left(\dfrac{x}{2}\right)^2 = \cos^2(t) \\ y(t) = \text{sen}(t) \longrightarrow y = \text{sen}(t) \longrightarrow y^2 = \text{sen}^2(t) \\ z(t) = t \end{cases}$$

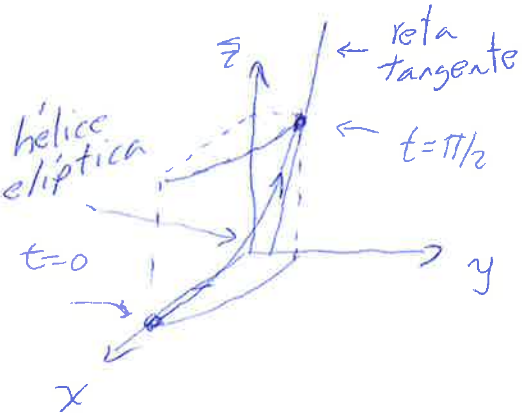
$$+ \quad \boxed{\left(\frac{x}{2}\right)^2 + y^2 = 1}$$

3D ↙ ↓ 2D

| t | x(t) | y(t) | z(t) |
|---|---|---|---|
| 0 | 2 | 0 | 0 |
| $\pi/2$ | 0 | 1 | $\pi/2$ |



# Curva Lisa

Definição: Uma curva é chamada lisa se $\vec{r}\,'(t)$ é contínua e $\vec{r}\,'(t) \neq \vec{0}$ em um intervalo aberto $I$.

Ex.: Determine se a parábola semicúbica $\vec{r}(t) = \langle 1+t^3, t^2 \rangle$ é lisa.

Sol.: $\vec{r}\,'(t) = \langle 3t^2, 2t \rangle$

Vamos procurar soluções da eq. vetorial

$$\vec{r}\,'(t) = \vec{0}$$

$$\langle 3t^2, 2t \rangle = \langle 0, 0 \rangle$$

ou

$$\begin{cases} 3t^2 = 0 \\ 2t = 0 \end{cases} \longrightarrow t = 0 \text{ é uma solução (a única)}$$

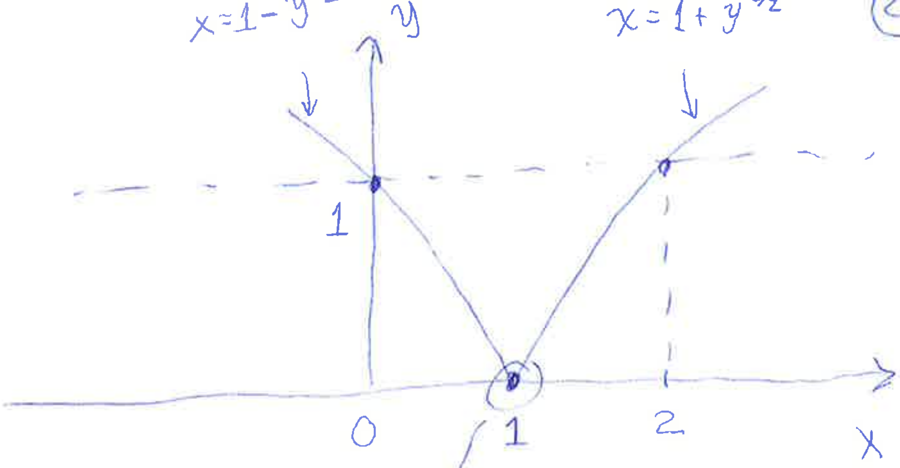
Logo, em $t=0$ a curva NÃO é lisa. Eliminando esse ponto do domínio podemos falar que a curva é lisa por partes.

- Graficamente que significa que a curva não seja lisa quando $t=0$?

$\vec{r}(t) = \langle 1+t^3, t^2 \rangle$ , se $t=0 \Rightarrow \vec{r}(0) = \langle 1, 0 \rangle$

$$\begin{cases} x = 1+t^3 \\ y = t^2 \end{cases} \xrightarrow{1} t = \pm y^{1/2} \xrightarrow{2} \xrightarrow{3} \underbrace{x = 1 \pm y^{3/2}}_{\text{duas funções escalares}} \text{ (Parábola Semi-cúbica)}$$

| $t$ | $x(t)$ | $y(t)$ |
|---|---|---|
| $-1$ | $0$ | $1$ |
| $0$ | $1$ | $0$ |
| $1$ | $2$ | $1$ |




$\boxed{\vec{r}\,'(0) = \vec{0}}$

$\boxed{\vec{r}(0) = \langle 1, 0 \rangle}$

Nesse ponto a curva NÃO é lisa "cúspide"

# Curvas na Superfície de uma Esfera

**Teorema:** Se $\vec{r}(t)$ for uma função vetorial e $|\vec{r}(t)|$ for uma função escalar constante (não depende de $t$), então

$$\vec{r}(t) \cdot \vec{r}\,'(t) = 0$$

Isto é, $\vec{r}(t)$ e $\vec{r}\,'(t)$ são vetores ortogonais para todo $t \in \mathbb{R}$.

**Prova:** $|\vec{r}(t)| = cte$ (não depende de $t$)

$$|\vec{r}(t)|^2 = cte$$

$$\vec{r}(t) \cdot \vec{r}(t) = cte$$

Se $\vec{r}(t) = \langle x, y \rangle$

$|\vec{r}(t)| = \sqrt{x^2 + y^2}$

e

$\vec{r}(t) \cdot \vec{r}(t) = x \cdot x + y \cdot y$

$$\boxed{|\vec{r}(t)|^2 = \vec{r}(t) \cdot \vec{r}(t)}$$

$$\frac{d}{dt}\left[\vec{r}(t) \cdot \vec{r}(t)\right] = \underbrace{\frac{d}{dt}\left[cte\right]}_{0}$$

Derivada do produto escalar em funções vetoriais

$$\vec{r}\,'(t) \cdot \vec{r}(t) + \vec{r}(t) \cdot \vec{r}\,'(t) = 0$$

Produto Escalar Comutativo

$$2\left(\vec{r}(t) \cdot \vec{r}\,'(t)\right) = 0$$

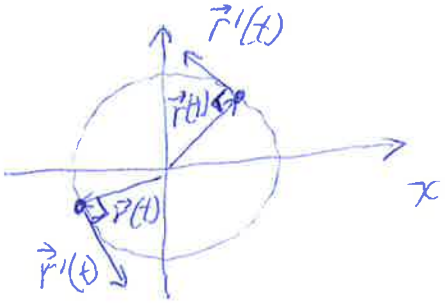
$$\vec{r}(t) \cdot \vec{r}\,'(t) = 0$$

Em $\mathbb{R}^2$, $\vec{r}(t) = \langle x(t), y(t) \rangle$

$|\vec{r}(t)| = cte$

$\sqrt{x^2(t) + y^2(t)} = cte$

$x^2 + y^2 = R^2$ ← Circunferência (Única)




Em $\mathbb{R}^3$, $\vec{r}(t) = \langle x(t), y(t), z(t) \rangle$

$|\vec{r}(t)| = cte$

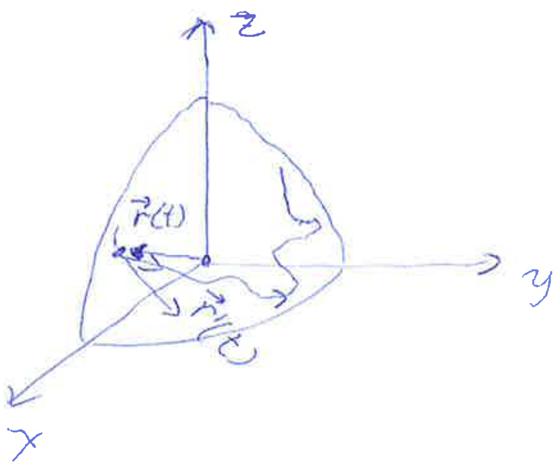
$|\vec{r}(t)| = \sqrt{[x(t)]^2 + [y(t)]^2 + [z(t)]^2} = cte$

$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$

Esfera.

Podemos ter um número infinito de curvas na superfície de uma esfera.

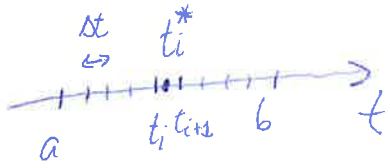
Para todas elas $\vec{r}(t) \perp \vec{r}'(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$

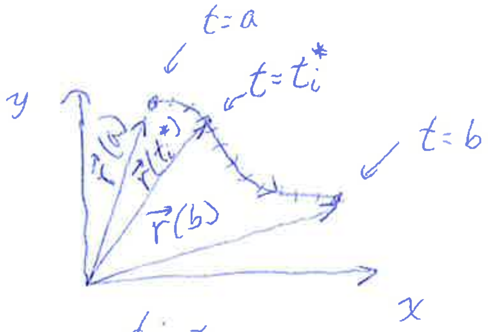


# Integrais de Funções Vetoriais



$\vec{r}(t) = \langle x(t), y(t) \rangle$




$\Delta t = \dfrac{b-a}{n}$ criamos uma partição do intervalo em $t$.

$t_i = a + i \cdot \Delta t$ $\quad$ Se $i=0 \to t_i = a$

$i = 0, 1, \ldots, n$ $\quad$ $i=n \to t_i = b$

Em cada intervalo $[t_i, t_{i+1}]$ escolhemos $t_i^*$

$$\text{Definição: } \underbrace{\int_a^b \vec{r}(t)\,dt}_{\text{Integral Definida de uma função vetorial}} = \lim_{\Delta t \to 0} \underbrace{\left[ \sum_{i=1}^{n} \vec{r}(t_i^*)\,\Delta t_i \right]}_{\text{Soma de Riemann}}$$

- A definição da Integral Definida de uma função vetorial é análoga a definição da integral definida em uma função escalar.

- Se $\vec{r}(t) = \langle x(t), y(t) \rangle$

$$\int_a^b \vec{r}(t)\,dt = \int_a^b \langle x(t), y(t) \rangle\,dt = \int_a^b \left[ x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} \right] dt$$

$$= \underbrace{\left[ \int_a^b x(t)\,dt \right]}\vec{i} + \underbrace{\left[ \int_a^b y(t)\,dt \right]}\vec{j} = \left\langle \int_a^b x(t)\,dt, \int_a^b y(t)\,dt \right\rangle$$

Integrais de Funções Escalares.

Ex.: Calcule a integral entre 1 e 2 da função vetorial $\vec{r}(t) = \langle 1+t^2, -4t^4 \rangle$.

Sol.: $\displaystyle\int_a^b \vec{r}(t)\,dt = \left\langle \int_a^b x(t)\,dt \,,\ \int_a^b y(t)\,dt \right\rangle$

$$x)\ \int_1^2 (1+t^2)\,dt = \int_1^2 dt + \int_1^2 t^2\,dt = t\Big|_1^2 + \frac{t^3}{3}\Big|_1^2 = 1 + \frac{1}{3}(8-1)$$

$$= 1 + \frac{7}{3} = \frac{3}{3} + \frac{7}{3} = \frac{10}{3}$$

$$y)\ \int_1^2 -4t^4\,dt = -4\frac{t^5}{5}\Big|_1^2 = -\frac{4}{5}(\overset{32}{2^5}-1) = \frac{-4\cdot 31}{5} = -\frac{124}{5}$$

$$\boxed{\int_1^2 \langle 1+t^2, -4t^4 \rangle = \left\langle \frac{10}{3}, -\frac{124}{5} \right\rangle}$$

Teorema (Regras de Integração)

Sejam $\vec{r}(t)$, $\vec{r}_1(t)$ e $\vec{r}_2(t)$ funções vetoriais contínuas no intervalo $a \leq t \leq b$ e seja $\lambda$ um escalar. Então

a) $\displaystyle\int_a^b k\vec{r}(t)\,dt = k\int_a^b \vec{r}(t)\,dt$

b) $\displaystyle\int_a^b [\vec{r}_1(t) \pm \vec{r}_2(t)]\,dt = \int_a^b \vec{r}_1(t)\,dt + \int_a^b \vec{r}_2(t)\,dt.$

Propriedades Análogas as das Integrais em Funções Escalares.

- $\vec{R}(t)$ é uma ANTIDERIVADA da função vetorial $\vec{r}(t)$ se $\vec{R}'(t) = \vec{r}(t)$. Isto é,

$$\underbrace{\int \vec{r}(t)\,dt}_{\text{Integral Indefinida de uma função vetorial}} = \vec{R}(t) + \underbrace{\vec{C}}_{\text{A constante arbitrária de integração agora é um vetor}} \quad \leftarrow \text{Eq. vetorial}$$

- $\dfrac{d}{dt}\left[\int \vec{r}(t)\,dt\right] = \dfrac{d}{dt}\left[\vec{R}(t) + \vec{C}\right] = \vec{R}'(t) = \vec{r}(t)$

- $\int \vec{r}\,'(t)\,dt = \vec{r}(t) + \vec{C}$

Derivada e Integração são operações inversas

- Também é válido o Teorema Fundamental do Cálculo em sua forma vetorial

$$\int_a^b \vec{r}(t)\,dt = \vec{R}(b) - \vec{R}(a)$$

$$R'(t) = \vec{r}(t)$$

# Comprimento de Arco do Ponto de Vista Vetorial

Teorema: Se $C$ for o gráfico de uma função vetorial lisa $\vec{r}(t)$, então se comprimento de arco $(L)$ de $t=a$ a $t=b$ é

$$L = \int_a^b |\vec{r}\,'(t)|\,dt.$$

Prova: Suponha $\vec{r}(t) = \langle x(t), y(t) \rangle$

$$\vec{r}\,'(t) = \langle x'(t), y'(t) \rangle$$

$$|\vec{r}\,'(t)| = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}$$

Logo $L = \int_a^b \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\,dt$

Essa é a mesma equação que tínhamos encontrado para o comprimento de uma curva paramétrica 2D. O resultado vale também em 3D. ■

Ex.: Determine o comprimento da curva

$\vec{r}(t) = \langle t^2, \text{sen}(t) - t\cos(t), \cos(t) + t\,\text{sen}(t) \rangle$

quando $0 \leq t \leq \pi$.

Sol.: $\vec{r}\,'(t) = \langle 2t, \cancel{\cos(t)} - \cancel{\cos(t)} + t\,\text{sen}(t), \cancel{-\text{sen}(t)} + \cancel{\text{sen}(t)} + t\cos(t) \rangle$

$\vec{r}\,'(t) = \langle 2t, t\,\text{sen}(t), t\cos(t) \rangle$

$\vec{r}\,'(t) = t \langle 2, \text{sen}(t), \cos(t) \rangle$

$|\vec{r}\,'(t)| = |t|\, |\langle 2, \text{sen}(t), \cos(t) \rangle|$

$$|\vec{r}\,'(t)| = |t| \sqrt{2^2 + \underbrace{\operatorname{sen}^2(t) + \cos^2(t)}_{1}}$$

$$|\vec{r}\,'(t)| = |t|\sqrt{5}$$

Como $0 \leq t \leq \pi \Rightarrow |t| = t$

$$L = \int_a^b |\vec{r}\,'(t)|\,dt$$

$$L = \int_0^\pi \sqrt{5}\,t\,dt$$

$$L = \sqrt{5}\,\frac{t^2}{2}\Big|_0^\pi$$

$$\boxed{L = \frac{\sqrt{5}}{2}\pi^2}$$

# Curva Lisa

**Definição:** Uma curva é chamada lisa se $\vec{r}\,'(t)$ é contínua e $\vec{r}\,'(t) \neq \vec{0}$ em um intervalo aberto $I$.

**Ex.:** Determine se a parábola semicúbica $\vec{r}(t) = \langle 1+t^3, t^2 \rangle$ é lisa.

**Sol.:** $\vec{r}\,'(t) = \langle 3t^2, 2t \rangle$

Vamos procurar soluções da eq. vetorial

$$\vec{r}\,'(t) = \vec{0}$$

$$\langle 3t^2, 2t \rangle = \langle 0, 0 \rangle$$

ou

$$\begin{cases} 3t^2 = 0 \\ 2t = 0 \end{cases} \longrightarrow t = 0 \text{ é uma solução (a única)}$$

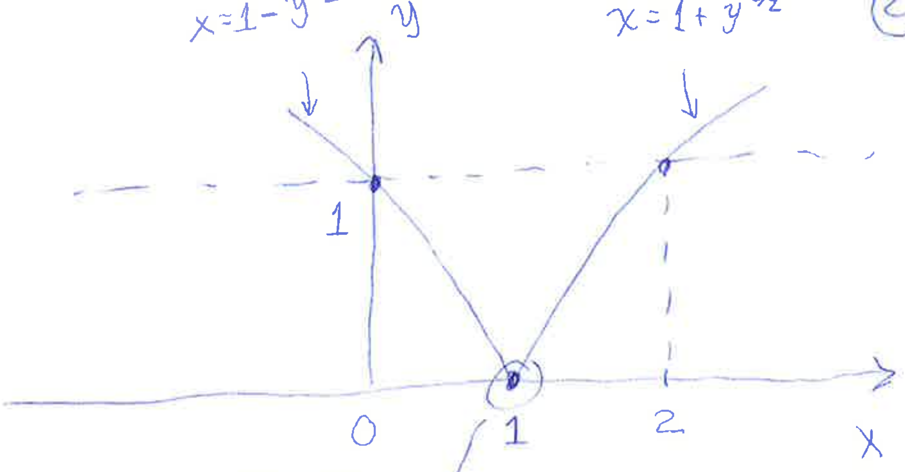
Logo, em $t=0$ a curva NÃO é lisa. Eliminando esse ponto do domínio podemos falar que a curva é lisa por partes.

- Graficamente que significa que a curva não seja lisa quando $t=0$?

$\vec{r}(t) = \langle 1+t^3, t^2 \rangle$, se $t=0 \Rightarrow \vec{r}(0) = \langle 1, 0 \rangle$

$$\begin{cases} x = 1+t^3 \\ y = t^2 \end{cases} \xrightarrow{1} t = \pm y^{1/2} \xrightarrow{2} \xrightarrow{3} \underbrace{x = 1 \pm y^{3/2}}_{\text{duas funções escalares}} \text{ (Parábola Semi-cúbica)}$$

| $t$ | $x(t)$ | $y(t)$ |
| --- | --- | --- |
| $-1$ | $0$ | $1$ |
| $0$ | $1$ | $0$ |
| $1$ | $2$ | $1$ |




$\boxed{\vec{r}\,'(0) = \vec{0}}$

$\boxed{\vec{r}(0) = \langle 1, 0 \rangle}$

Nesse ponto a curva NÃO é lisa "cúspide"

# Função Comprimento de Arco

- Uma mesma curva $C$ pode ser representada por funções vetoriais com diferentes parâmetros.

Ex.: Seja $\vec{r}_1(t) = \langle t, t^2, t^3 \rangle$ com $1 \leq t \leq 2$. Mude a parametrização usando a função escalar $g(u) = e^u$.

Sol.: $t = g(u)$

$t = e^u$, logo $u = \ln(t)$

se $t = 1 \Rightarrow u = \ln(1) = 0$

$t = 2 \Rightarrow u = \ln(2)$

$$\vec{r}_2(u) = \langle e^u, (e^u)^2, (e^u)^3 \rangle$$

$$\boxed{\vec{r}_2(u) = \langle e^u, e^{2u}, e^{3u} \rangle \text{ com } 0 \leq u \leq \ln(2)}$$

- As parametrizações mais frequênte são quando o parâmetro significa tempo $(t)$, comprimento de arco $(s)$ ou ângulo em relação ao eixo $x$ $(\theta)$: $\vec{r}(t)$, $\vec{r}(s)$ ou $\vec{r}(\theta)$.

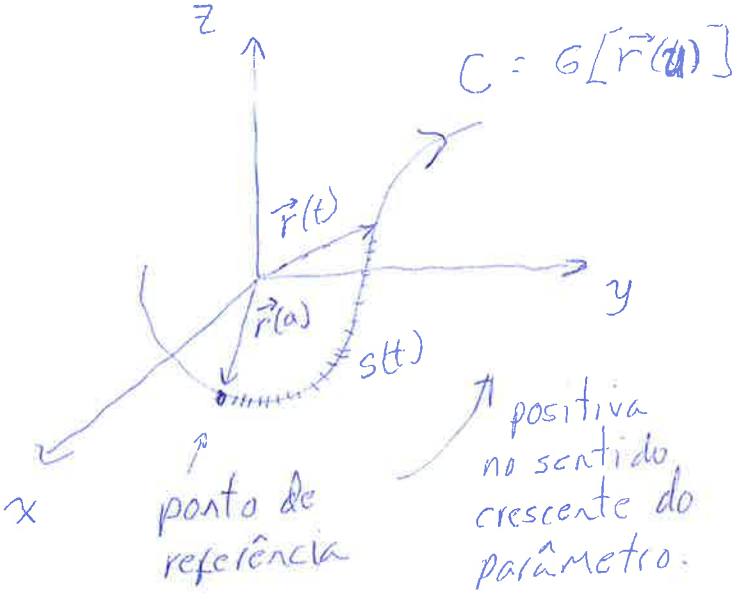
- Para calcular o comprimento de arco usamos

$$L = \int_a^b |\vec{r}\,'(t)| dt$$

que depende da escolha de uma parametrização para o cálculo. Porém, o resultado $L$ é o mesmo para todas as parametrizações. $L$ é chamado de invariante, é uma magnitude que pode ser medida fisicamente.

# Definição de Função Escalar Comprimento de Arco

$$s(t) = \int_a^t |\vec{r}'(u)|\,du$$

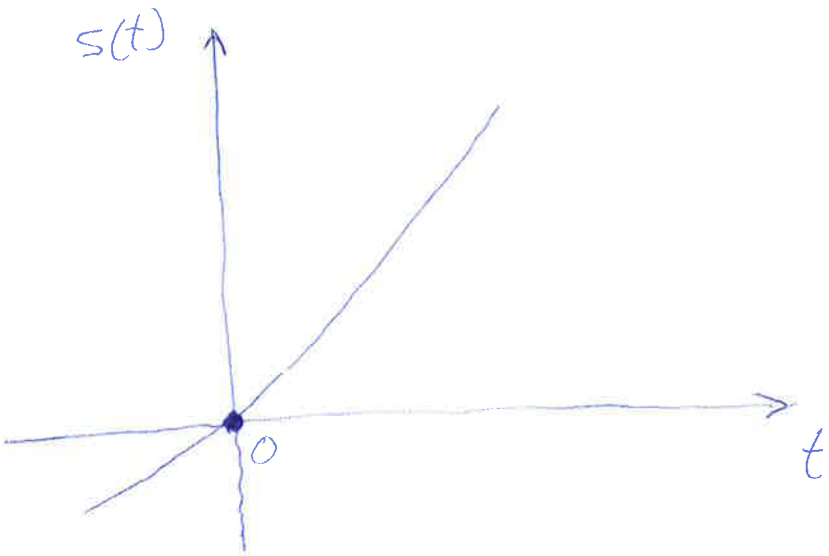



- Se $t = a \Rightarrow s(t=a) = \int_a^a |\vec{r}'(u)\,du = 0$

iguais limites de integração

- Se $t > a \Rightarrow s(t) > 0$

  $t < a \Rightarrow s(t) < 0$

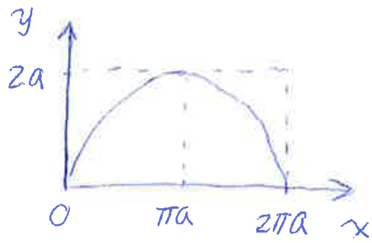


Usando o Teorema Fundamental do Cálculo

$$\frac{d}{dt}(s(t)) = \frac{d}{dt}\left[\int_a^t |\vec{r}\,'(u)|\,du\right]$$

$$\boxed{\frac{ds(t)}{dt} = |\vec{r}\,'(t)|} = \left|\frac{d\vec{r}(t)}{dt}\right|$$

Ex.: Determine a parametrização por comprimento de arco da cicloide, $a>0$,




$$x = at - a\,sen(t) \qquad 0 \le t \le 2\pi$$
$$y = a - a\cos(t)$$

com $(0,0)$ como ponto de referência.

Sol.: Vamos re-escrever a função vetorial trocando $t$ por $u$.

$$\vec{r}(u) = \langle au - a\,sen(u),\ a - a\cos(u)\rangle$$

$$\vec{r}(u) = a\langle u - sen(u),\ 1 - \cos(u)\rangle$$

$$\vec{r}\,'(u) = a\langle 1 - \cos(u),\ sen(u)\rangle$$

$$|\vec{r}\,'(u)| = a\sqrt{[1-\cos(u)]^2 + sen^2(u)}$$

$$= a\sqrt{1 - 2\cos(u) + \underbrace{\cos^2(u) + sen^2(u)}_{1}}$$

$$= a\sqrt{2 - 2\cos(u)}$$

$$\boxed{|\vec{r}\,'(u)| = a\sqrt{2}\,\sqrt{1-\cos(u)}}$$

- Por outro lado, como o ponto de referência é $(0,0)$ devemos encontrar $u_0$ tal que $\vec{r}(u_0) = \langle 0, 0\rangle$.

$$\begin{cases} 0 = a[u_0 - sen(u_0)] \xleftarrow{\text{OK}} \\ 0 = a[1 - \cos(u_0)] \longrightarrow \boxed{u_0 = 0} \end{cases}$$

Satisfaz as duas eq.

(4)

$$s(t) = \int_{u_0}^{t} |\vec{r}\,'(u)|\, du$$

$$s(t) = \int_0^t a\sqrt{2}\sqrt{1-\cos(u)}\, du.$$

$$s(t) = a\sqrt{2}\int_0^t \sqrt{1-\cos(u)}\, du$$

Usamos uma identidade trigonomêtrica

$$\cos(2u) = \cos^2(u) - \operatorname{sen}^2(u) =$$

$$\text{''} \quad = \cos^2(u) - [1-\cos^2(u)]$$

$$\text{''} \quad = 2\cos^2(u) - 1$$

Trocando $2u$ por $u$

$$\cos(u) = 2\cos^2\left(\tfrac{u}{2}\right) - 1$$

da integral $\sqrt{1-\cos(u)} = \sqrt{1-2\cos^2\left(\tfrac{u}{2}\right)+1} = \sqrt{2-2\cos^2\left(\tfrac{u}{2}\right)} = \sqrt{2}\sqrt{1-\cos^2\left(\tfrac{u}{2}\right)}$

$$\sqrt{1-\cos(u)} = \sqrt{2}\sqrt{\operatorname{sen}^2\left(\tfrac{u}{2}\right)}$$

$$s(t) = a\sqrt{2}\int_0^t \sqrt{2}\sqrt{\operatorname{sen}^2(u/2)}\, du.$$

$$s(t) = 2a\int_0^t |\operatorname{sen}(u/2)|\, du$$

~~como~~ como $0 \leq u \leq 2\pi \Rightarrow 0 \leq \frac{u}{2} \leq \pi$ e

$\operatorname{sen}(u/2) \geq 0$

$$s(t) = 2a\int_0^t \operatorname{sen}(u/2)\, du = -2a\cos(u/2)\cdot 2\Big|_0^t$$

$$s(t) = -4a\left[\cos(t/2) - 1\right]$$

$$s(t) = 4a\left[1-\cos(t/2)\right]$$

(5)

$S(t) = 4a\,[1-\cos(t/2)] \rightarrow$ $t=0 \Rightarrow S=0$; $t=2\pi \Rightarrow S=8a$

$t = f(s)$. ? Função Inversa

$$\frac{S}{4a} = 1-\cos(t/2)$$

$$\cos(t/2) = 1-\frac{S}{4a}$$

$$\frac{t}{2} = \text{Arccos}\left(1-\frac{S}{4a}\right)$$

$$\boxed{t(s) = 2\,\text{Arccos}\left(1-\frac{S}{4a}\right)}$$

Inicialmente a cicloide era dada por

$$\vec{r}(t) = a\langle t-\text{sen}(t),\ 1-\cos(t)\rangle$$

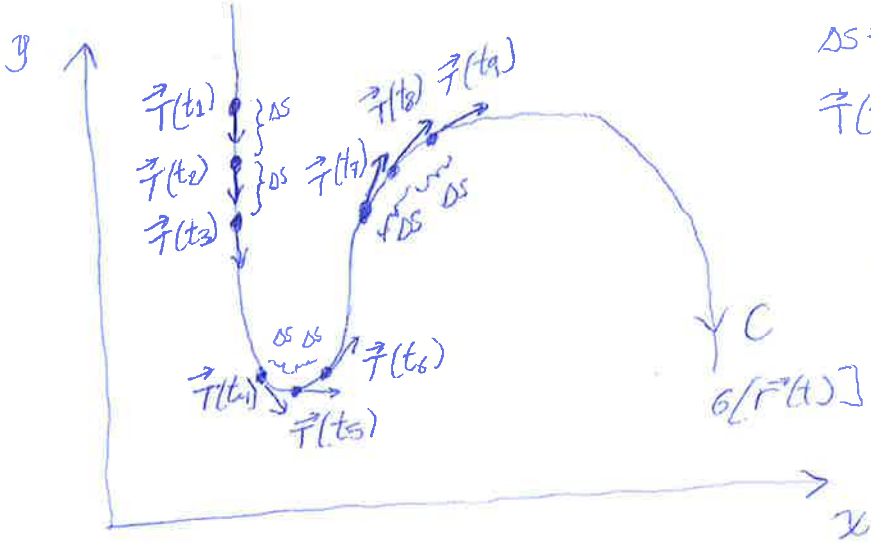
quando $0 \le t \le 2\pi$

Trocando a parametrização para $S$

$$\vec{r}(s) = a\Big\langle \underbrace{2\,\text{Arccos}\left(1-\tfrac{S}{4a}\right) - \text{sen}\left[2\,\text{Arccos}\left(1-\tfrac{S}{4a}\right)\right]}_{x(s)},\ \underbrace{1-\cos\left[2\,\text{Arccos}\left(1-\tfrac{S}{4a}\right)\right]}_{y(s)}\Big\rangle$$

com $0 \le S \le 8a$.

# Curvatura




$\Delta s = cte$

$$\vec{T}(t) = \frac{\vec{r}\,'(t)}{\|\vec{r}\,'(t)\|}$$

$$\|\vec{T}(t)\| = 1$$

- A ideia da definição de curvatura no plano está associada a mudança de direção do vetor tangente em relação ao comprimento de arco
- No intervalo de $t_1 \leq t \leq t_3$ a curvatura deve ser zero pois o vetor tangente não muda de direção.
- A curvatura deve ser maior no intervalo $t_4 \leq t \leq t_6$ em comparação ao intervalo $t_7 \leq t \leq t_9$ pois o vetor tangente muda mais de direção para um mesmo $\Delta s$.

Definição: Se C for o gráfico de uma função vetorial lisa $\vec{r}(s)$ parametrizada pelo comprimento de arco, então chamaremos curvatura de C a função escalar $K(s)$:

$$K(s) = \left\| \frac{d\vec{T}(s)}{ds} \right\|$$

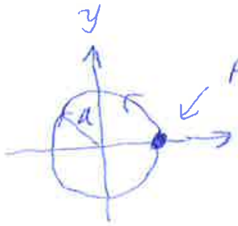
onde $\vec{T}(s) = \vec{r}\,'(s)$

- A curvatura pode mudar ponto a ponto em uma curva.
- A curvatura é um número real positivo.

Ex.: Encontre a curvatura da circunferência dada pela função vetorial $\vec{r}(t) = \langle a\cos(t), a\,\mathrm{sen}(t)\rangle$.

Sol.: Como função vetorial foi dada com um parâmetro que não é o comprimento de arco devemos reparametrizar primeiro.

$$s(t) = \int_{\theta_0}^{t} \|\vec{r}\,'(\theta)\|\, d\theta$$




ponto de referência

$\theta_0 = 0$

$0 \leq \theta \leq 2\pi$

$$\vec{r}(\theta) = \langle a\cos(\theta), a\,\mathrm{sen}(\theta)\rangle$$

$$\vec{r}\,'(\theta) = a\langle -\mathrm{sen}(\theta), \cos(\theta)\rangle$$

$$|\vec{r}\,'(\theta)| = a\sqrt{\mathrm{sen}^2(\theta) + \cos^2(\theta)} = a$$

$$s(t) = \int_0^t a\, d\theta = a\theta\Big|_0^t = at$$

$$s(t) = at \longrightarrow t(s) = \frac{s}{a}$$

$$\boxed{\vec{r}(s) = a\left\langle \cos\left(\tfrac{s}{a}\right), \mathrm{sen}\left(\tfrac{s}{a}\right)\right\rangle \quad 0 \leq s \leq 2\pi a}$$

← Circunferência parametrizada em função do comprimento de arco.

Se $t = 0 \rightarrow s = 0$

$t = 2\pi \rightarrow s = 2\pi a$.

$$\vec{T}(s) = \frac{\vec{r}\,'(s)}{\|\vec{r}\,'(s)\|}$$

$$\vec{r}\,'(s) = \cancel{a}\left\langle -\tfrac{1}{\cancel{a}}\mathrm{sen}\left(\tfrac{s}{a}\right), \tfrac{1}{\cancel{a}}\cos\left(\tfrac{s}{a}\right)\right\rangle$$

$$\vec{r}\,'(s) = \left\langle -\mathrm{sen}\left(\tfrac{s}{a}\right), \cos\left(\tfrac{s}{a}\right)\right\rangle$$

$\|\vec{r}\,'(s)\| = 1$ Será sempre verdade quando a curva estiver parametrizada pelo comprimento de arco. $\frac{ds}{dt} = \|\vec{r}\,'(t)\|$, trocando $t \to s$ $\frac{ds}{ds} = \|\vec{r}\,'(s)\| = 1$

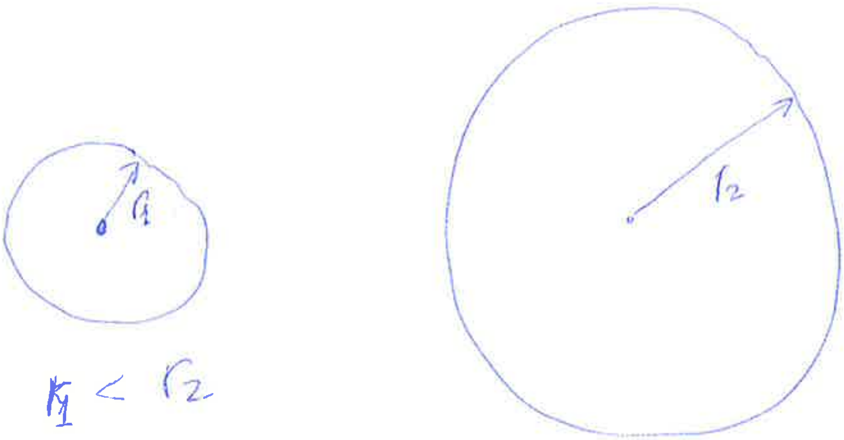
logo $\vec{T}(s) = \langle -\operatorname{sen}\left(\frac{s}{a}\right), \cos\left(\frac{s}{a}\right) \rangle$

$$K(s) = \left\| \frac{d\vec{T}(s)}{ds} \right\|$$

$$\frac{d\vec{T}(s)}{ds} = \vec{T}'(s) = \frac{1}{a} \langle -\cos\left(\frac{s}{a}\right), -\operatorname{sen}\left(\frac{s}{a}\right) \rangle$$

$$\left\| \frac{d\vec{T}(s)}{ds} \right\| = \frac{1}{a} \underbrace{\sqrt{\cos^2\left(\frac{s}{a}\right) + \operatorname{sen}^2\left(\frac{s}{a}\right)}}_{1}$$

$\boxed{K(s) = \frac{1}{a}}$ Não depende do parâmetro s, é a mesma para todos os pontos de uma circunferência e é inversamente proporcional ao raio.



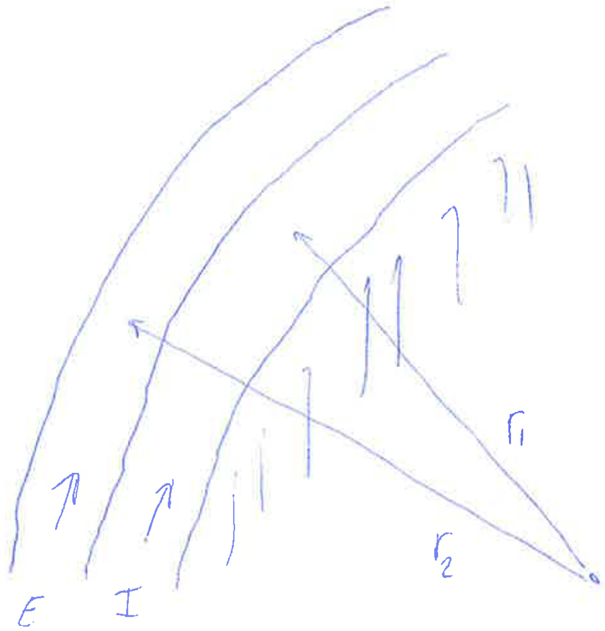
$r_1 < r_2$

$K_1 > K_2$

- Para uma reta $K(s) = 0$ para todos os pontos. O vetor $\vec{T}(s)$ não muda de direção

$$K(s) = \left\| \vec{T}'(s) \right\|$$

~~Em~~ Na estrada qual é a faixa mais curta e qual a mais confortável?




- A faixa interna(I) é a mais curta
- Porém, a faixa externa(E) é a mais confortavel porque nela a curvatura é menor. Em uma circunferência $K = \frac{1}{r}$.

- Em curvas no espaço tridimensional também devem ser consideradas as mudanças de direção de outros dois vetores: $\left\|\frac{d\vec{N}(s)}{ds}\right\|$ e $\left\|\frac{d\vec{B}(s)}{ds}\right\|$

- Os vetores $\vec{N}$ e $\vec{B}$ serão estudados nos próximos videos

# Outras fórmulas para curvatura



Teorema: Se $\vec{r}(t)$ for uma função vetorial lisa no qual $\vec{r}'(t)$ e $\vec{r}''(t)$ existam, então a curvatura pode ser calculada como

a) $$\kappa(t) = \frac{\|\vec{T}'(t)\|}{\|\vec{r}'(t)\|}$$

b) $$\kappa(t) = \frac{\|\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)\|}{\|\vec{r}'(t)\|^3}$$

Prova: a) $$\kappa(s) = \left\| \frac{d\vec{T}(s)}{ds} \right\|$$

Vamos usar a regra da cadeia: $\begin{cases} \vec{T}(t) \\ s(t) \to t(s) \\ \vec{T}(s) \end{cases}$

$$\kappa(t) = \left\| \frac{d\vec{T}(t)/dt}{ds(t)/dt} \right\| = \left\| \frac{\vec{T}'(t)}{\|\vec{r}'(t)\|} \right\|$$

$$\kappa(t) = \cancel{\left\| \frac{\vec{T}'(t)}{\|\vec{r}'(t)\|} \right\|} = \frac{\|\vec{T}'(t)\|}{\|\vec{r}'(t)\|}$$

b) $$\kappa(t) = \frac{\|\vec{T}'(t)\|}{\|\vec{r}'(t)\|}$$ vamos partir do item anterior

$$\vec{T}(t) = \frac{\vec{r}'(t)}{\|\vec{r}'(t)\|} \longrightarrow \vec{r}'(t) = \|\vec{r}'(t)\| \vec{T}(t)$$

Usando a regra do produto para derivar

$$\vec{r}''(t) = \frac{d\|\vec{r}'(t)\|}{dt} \vec{T}(t) + \|\vec{r}'(t)\| \vec{T}'(t)$$

Vamos calcular o produto vetorial

$$\vec{r}\,'(t) \times \vec{r}\,''(t) = \|\vec{r}\,'(t)\|\,\vec{T}(t) \times \left[\frac{d}{dt}\left(\|\vec{r}\,'(t)\|\right)\vec{T}(t) + \|\vec{r}\,'(t)\|\,\vec{T}\,'(t)\right]$$

O produto vetorial de um vetor com ele mesmo é o vetor nulo

$\vec{T} \times \vec{T} = \vec{0}$ logo

$$\vec{r}\,'(t) \times \vec{r}\,''(t) = \|\vec{r}\,'(t)\|^2 \left(\vec{T}(t) \times \vec{T}\,'(t)\right)$$

mas $\|\vec{T}(t)\| = cte = 1 \Rightarrow \vec{T}(t) \perp \vec{T}\,'(t)$

$$\|\vec{r}\,'(t) \times \vec{r}\,''(t)\| = \|\vec{r}\,'(t)\|^2 \underbrace{\|\vec{T}(t)\|}_{1} \cdot \|\vec{T}\,'(t)\| \underbrace{\operatorname{sen}(90^\circ)}_{1}$$

$$\|\vec{T}\,'(t)\| = \frac{\|\vec{r}\,'(t) \times \vec{r}\,''(t)\|}{\|\vec{r}\,'(t)\|^2}$$

Voltando no item a) $k(t) = \dfrac{\|\vec{T}\,'(t)\|}{\|\vec{r}\,'(t)\|}$ temos que

$$k(t) = \frac{\|\vec{r}\,'(t) \times \vec{r}\,''(t)\|}{\|\vec{r}\,'(t)\|^3}$$

$\boxtimes$

Usualmente a fórmula do item b) é usada pois tudo fica escrito em termos do vetor $\vec{r}(t)$ e suas derivadas.

③

Ex.: Calcule a curvatura da hélice elíptica

$\vec{r}(t) = \langle a\cos(t), b\,\text{sen}(t), ct \rangle$, $a, b, c \in \mathbb{R}^+$.

Sol.: Vamos usar a fórmula

$$K(t) = \frac{\|\vec{r}\,'(t) \times \vec{r}\,''(t)\|}{\|\vec{r}\,'(t)\|^3}$$

$$\vec{r}\,'(t) = \langle -a\,\text{sen}(t), b\cos(t), c \rangle$$

$$\vec{r}\,''(t) = \langle -a\cos(t), -b\,\text{sen}(t), 0 \rangle$$

$$\vec{r}\,'(t) \times \vec{r}\,''(t) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -a\,\text{sen}(t) & b\cos(t) & c \\ -a\cos(t) & -b\,\text{sen}(t) & 0 \end{vmatrix}$$

$$\vec{r}\,'(t) \times \vec{r}\,''(t) = \langle bc\,\text{sen}(t), -ac\cos(t), \underbrace{ab\,\text{sen}^2(t) + ab\cos^2(t)}_{ab} \rangle$$

$$\vec{r}\,'(t) \times \vec{r}\,''(t) = \langle bc\,\text{sen}(t), -ac\cos(t), ab \rangle$$

$$\|\vec{r}\,'(t) \times \vec{r}\,''(t)\| = \sqrt{[bc\,\text{sen}(t)]^2 + [ac\cos(t)]^2 + [ab]^2}$$

Por outro lado

$$\|\vec{r}\,'(t)\| = \sqrt{[a\,\text{sen}(t)]^2 + [b\cos(t)]^2 + c^2}$$

e $K(t)$ é igual a

$$\boxed{K(t) = \frac{\sqrt{[bc\,\text{sen}(t)]^2 + [ac\cos(t)]^2 + [ab]^2}}{\left([a\,\text{sen}(t)]^2 + [b\cos(t)]^2 + c^2\right)^{3/2}}}$$

.. No caso particular de uma hélice circular $(a=b)$ (4)

$$K(t) = \frac{\sqrt{[ac\,sen(t)]^2 + [ac\cos(t)]^2 + a^4}}{\left([a\,sen(t)]^2 + [a\cos(t)]^2 + c^2\right)^{3/2}}$$

$$K(t) = \frac{\sqrt{[ac]^2 + a^4}}{(a^2 + c^2)^{3/2}}$$

$$\boxed{K(t) = a\frac{\sqrt{c^2 + a^2}}{(a^2+c^2)^{3/2}}}$$ Não depende de $t$.

$$\boxed{K(t) = \frac{a}{a^2 + c^2}}$$

# Outras fórmulas de Curvatura - II



No caso em que a curva plana $C$ seja dada por uma função de uma variável de forma explícita $f(x)$.

$y = f(x)$

parametrizando

$x = t$ e $y = f(t)$

logo $\vec{r}(t) = < t, f(t) >$

para poder calcular o produto vetorial adicionamos uma coordenada nula.

$$\vec{r}(t) = < t, f(t), 0 >$$

$$\vec{r}\,'(t) = < 1, f'(t), 0 >$$

$$\vec{r}\,''(t) = < 0, f''(t), 0 >$$

$$\vec{r}\,' \times \vec{r}\,'' = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & f'(t) & 0 \\ 0 & f''(t) & 0 \end{vmatrix} = < 0, 0, f''(t) >$$

$$\|\vec{r}\,' \times \vec{r}\,''\| = \sqrt{[f''(t)]^2} = |f''(t)|$$

$$\|\vec{r}\,'(t)\| = \sqrt{1 + [f'(t)]^2}$$

logo $$K(t) = \frac{\|\vec{r}\,' \times \vec{r}\,''\|}{\|\vec{r}\,'\|^3} = \frac{|f''(t)|}{\left(\sqrt{1 + [f'(t)]^2}\right)^3}$$

2

ou trocando $t$ por $x$

$$\boxed{K(x) = \frac{|f''(x)|}{\left(1+[f'(x)]^2\right)^{3/2}}}$$

Ex. Encontre a curvatura da parábola cúbica $y = x^3$.

Sol.: $y = f(x)$

$f(x) = x^3$

$f'(x) = 3x^2$

$f''(x) = 6x$

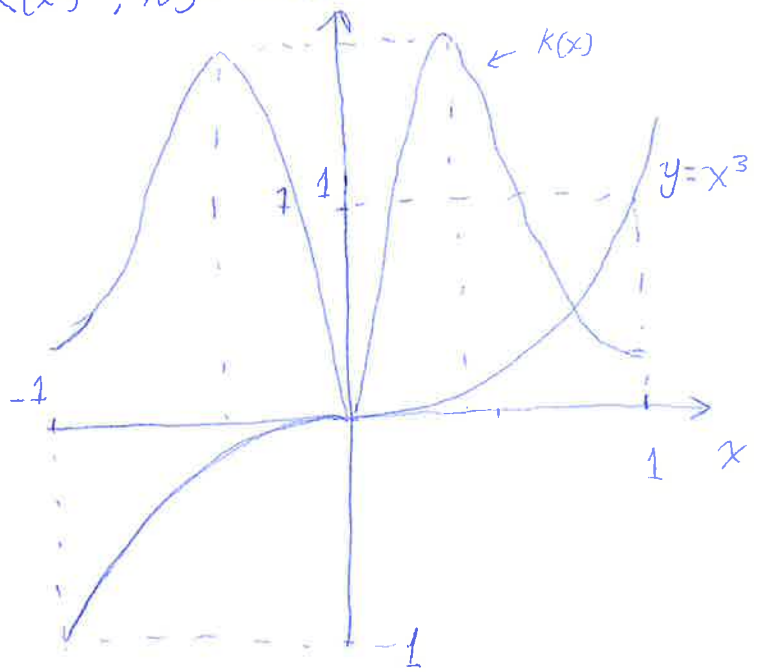
Usando $K(x) = \dfrac{|f''(x)|}{\left(1+[f'(x)]^2\right)^{3/2}}$

$$K(x) = \frac{6|x|}{(1+9x^4)^{3/2}}$$

- Note que $K(-x) = K(x)$, logo a curvatura é uma função par.

- Se $x = 0 \rightarrow K(0) = 0$

$x \to \pm\infty \Rightarrow K \to 0$



# Curvatura da Elipse

Ex.: Determine a curvatura da elipse dada pela função vetorial $\vec{r}(t) = \langle a\cos(t), b\,\text{sen}(t) \rangle$. $a, b \in \mathbb{R}^+$

Sol.: Vamos usar a fórmula

$$\kappa(t) = \frac{\|\vec{r}\,' \times \vec{r}\,''\|}{\|\vec{r}\,'\|^3} \quad (I)$$

Para poder calcular o produto vetorial os vetores precisam ser 3D.

$$\vec{r}(t) = \langle a\cos(t), b\,\text{sen}(t), 0 \rangle$$

$$\vec{r}\,'(t) = \langle -a\,\text{sen}(t), b\cos(t), 0 \rangle$$

$$\vec{r}\,''(t) = \langle -a\cos(t), -b\,\text{sen}(t), 0 \rangle$$

$$\vec{r}\,'(t) \times \vec{r}\,''(t) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -a\,\text{sen}(t) & b\cos(t) & 0 \\ -a\cos(t) & -b\,\text{sen}(t) & 0 \end{vmatrix}$$

$$\vec{r}\,'(t) \times \vec{r}\,''(t) = \langle 0, 0, ab\,\text{sen}^2(t) + ab\cos^2(t) \rangle$$

$$\vec{r}\,'(t) \times \vec{r}\,''(t) = \langle 0, 0, ab \rangle$$

$$\|\vec{r}\,'(t) \times \vec{r}\,''(t)\| = ab$$

$$\|\vec{r}\,'(t)\| = \sqrt{a^2\text{sen}^2(t) + b^2\cos^2(t)}$$

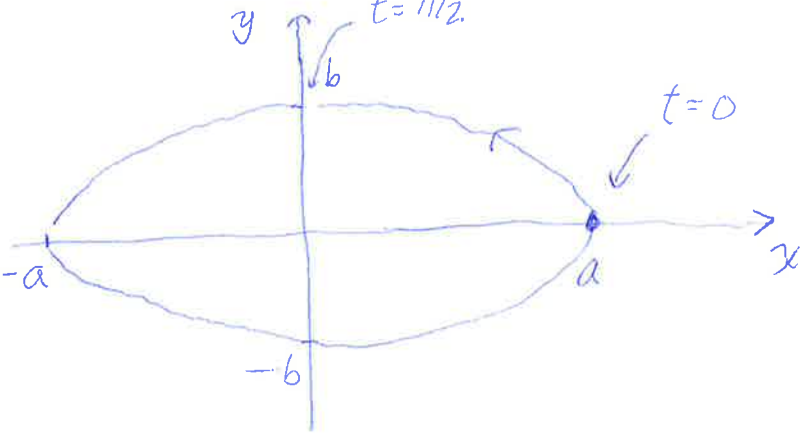
Logo, de (I)

$$\boxed{\kappa(t) = \frac{ab}{\left(\sqrt{a^2\text{sen}^2(t) + b^2\cos^2(t)}\right)^3}}$$

$x(t) = a\cos(t)$ $\quad 0 \le t \le 2\pi$

$y(t) = b\,\text{sen}(t)$

Supondo $a > b$ (Sem perda de generalidade)




$$K(t=0) = \frac{ab}{\left(\sqrt{a^2 \underbrace{\text{sen}^2(0)}_{0} + b^2 \underbrace{\cos^2(0)}_{1}}\right)^3} = \frac{ab}{(\sqrt{b^2})^3} = \frac{ab}{b^3} =$$

$$\boxed{K(t=0) = \frac{a}{b^2}}$$

$$K(t=\pi/2) = \frac{ab}{\left(\sqrt{a^2 \underbrace{\text{sen}^2(\pi/2)}_{1} + b^2 \underbrace{\cos^2(\pi/2)}_{0}}\right)^3} = \frac{ab}{(\sqrt{a^2})^3} = \frac{ab}{a^3}$$

$$\boxed{K(t=\pi/2) = \frac{b}{a^2}}$$

Como $a > b \implies K(t=0) > K(t=\pi/2)$.

Ex.: Seja $a = 3$ e $b = 2$

$K(t=0) = \frac{3}{4}$ e $K(t=\pi/2) = \frac{2}{9}$

$$\frac{3}{4} > \frac{2}{9}$$

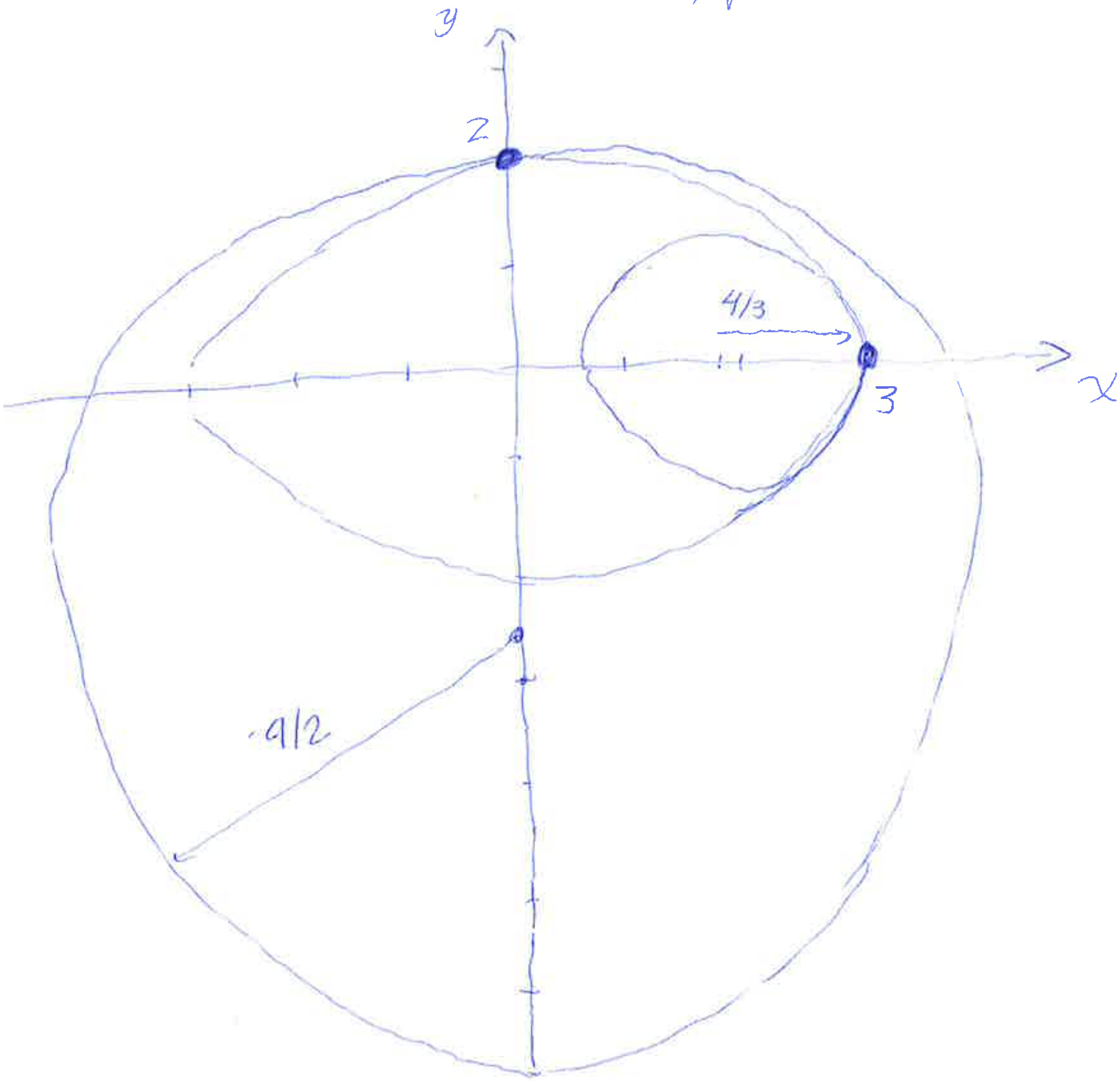
$$K(t=0) > K(t=\pi/2)$$

Como a curvatura de uma circunferência é

$$k_c = \frac{1}{R}$$

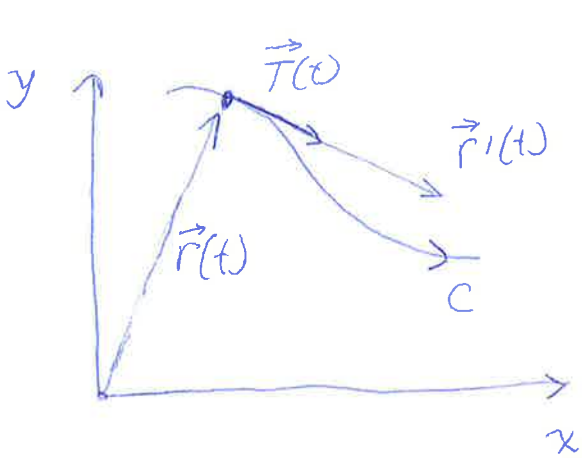
a circunferência que melhor aproxima a elipse perto do ponto $(3,0)$ tem raio $\frac{4}{3}$ e perto do ponto $(0,2)$ tem raio $\frac{9}{2}$.

Aproximadamente



① 

# Vetores Normais e Unitários: Tangente, Normal e Binormal.



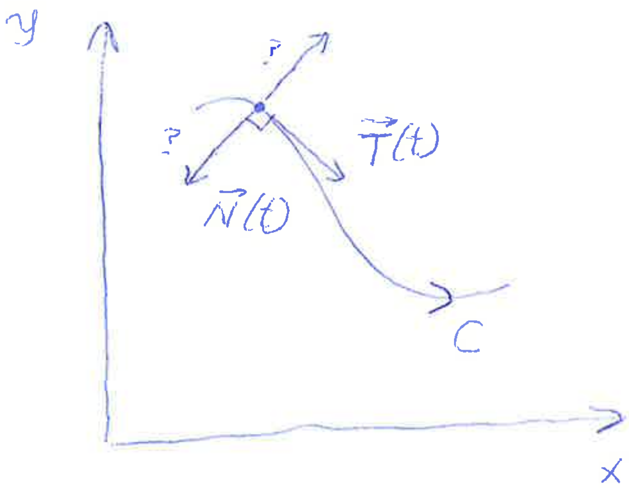

$$\vec{T}(t) = \frac{\vec{r}\,'(t)}{|\vec{r}\,'(t)|}$$

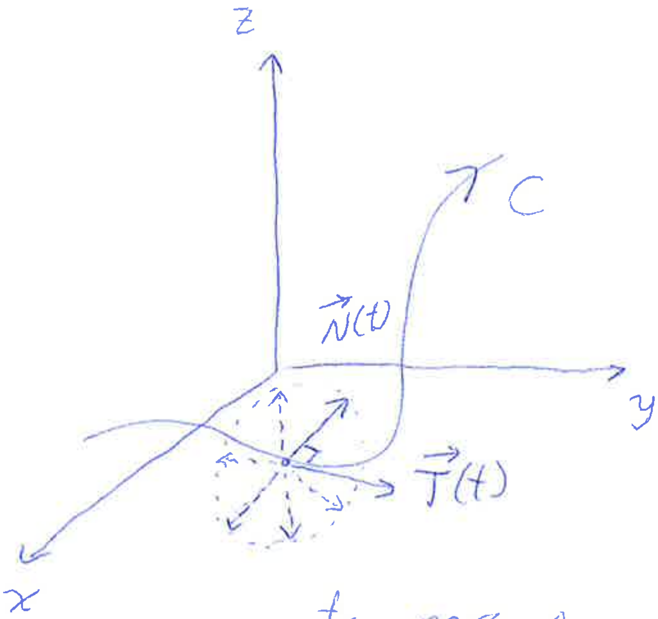
$$|\vec{T}(t)| = 1 \,, \; \forall t \in \mathbb{R}$$

- Como $|\vec{T}(t)| = 1 = cte \implies \vec{T}(t) \perp \vec{T}\,'(t) \,, \; \forall t \in \mathbb{R}$
- Logo $\vec{T}\,'(t)$ é perpendicular a $\vec{T}(t)$, mas $\vec{T}\,'(t)$ não precisa ser unitário. Vamos definir o vetor normal ($\vec{N}$) principal como sendo perpendicular e unitário:

$$\underset{\text{principal}}{\vec{N}(t)} = \frac{\vec{T}\,'(t)}{|\vec{T}\,'(t)|} \implies |\vec{N}(t)| = 1 \,, \; \forall t \in \mathbb{R}$$

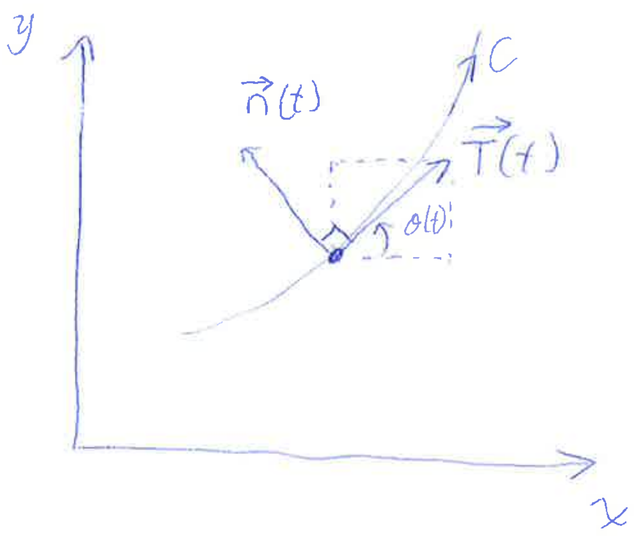
$\mathbb{R}^2$




- O vetor normal principal sempre aponta para o lado concavo da curva. Mostraremos isso a seguir

Observe a construção dos vetores $\vec{T}(t)$ e $\vec{n}(t)$.



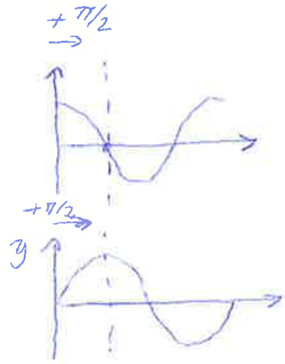

$$\vec{T}(t) = |\vec{T}(t)| \langle \cos(\theta), \text{sen}(\theta) \rangle$$

$$|\vec{T}(t)| = 1$$

$$\boxed{\vec{T}(t) = \langle \cos(\theta), \text{sen}(\theta) \rangle}$$

$$\vec{n}(t) = |\vec{n}(t)| \langle \cos(\theta + \pi/2), \text{sen}(\theta + \pi/2) \rangle$$

$$|\vec{n}(t)| = 1$$




$$\cos(\theta + \pi/2) = -\text{sen}(\theta)$$

$$\text{sen}(\theta + \pi/2) = \cos(\theta)$$

$$\boxed{\vec{n}(t) = \langle -\text{sen}(\theta), \cos(\theta) \rangle}$$

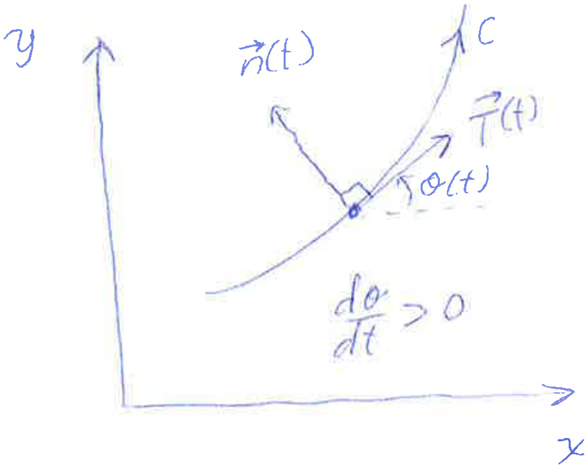
Note que $\theta(t)$, logo $\vec{T}(\theta(t)) = \langle \cos(\theta(t)), \text{sen}(\theta(t)) \rangle$

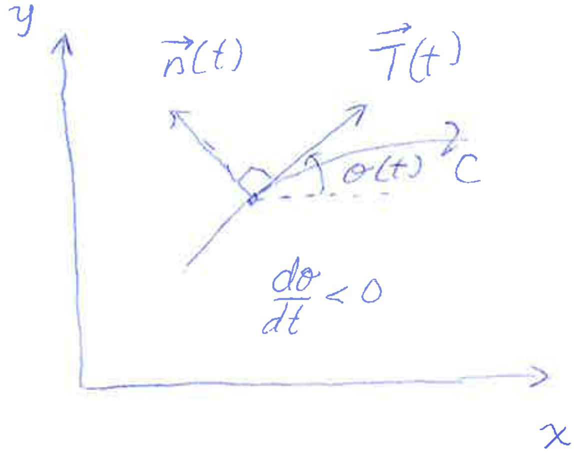
$$\frac{d\vec{T}}{dt} = \frac{d\vec{T}}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \vec{T}'(\theta)\frac{d\theta}{dt}$$

Usamos a regra da cadeia

$$\vec{T}'(\theta) = \langle -\text{sen}(\theta), \cos(\theta) \rangle = \vec{n}(t).$$

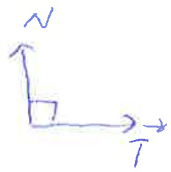
$$\frac{d\vec{T}}{dt} = \vec{n}(t)\frac{d\theta}{dt} = \vec{T}'(t).$$




- Note que quando $\frac{d\theta}{dt} > 0$ ($\theta$ cresce) (figura a esquerda) o vetor $\vec{n}(t)$ aponta para o lado concavo.
- Por outro lado quando $\frac{d\theta}{dt} < 0$ ($\theta$ decresce) (figura a direita) o vetor $\vec{n}(t)$ aponta para o lado oposto ao concavo.
- Isso mostra que o vetor $\vec{T}'(t) = \vec{n}(t)\frac{d\theta}{dt}$ sempre aponta para o lado concavo da curva. Com isso o vetor $\vec{N}(t) = \frac{\vec{T}'(t)}{|\vec{T}'(t)|}$ sempre aponta para o lado concavo da curva.

- O vetor binormal será definido como sendo perpendicular aos vetores $\vec{T}(t)$ e $\vec{N}(t)$. Logo

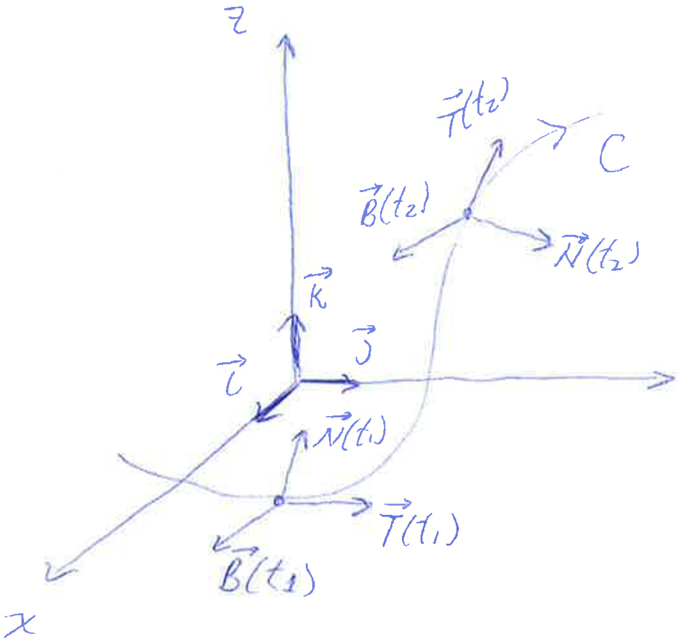



$$\vec{B}(t) = \vec{T}(t) \times \vec{N}(t)$$

$$|\vec{B}(t)| = |\vec{T}(t) \times \vec{N}(t)| = \underbrace{|\vec{T}(t)|}_{1}\underbrace{|\vec{N}(t)|}_{1}\underbrace{\operatorname{sen}(\overset{\downarrow}{\phi})}_{1}$$

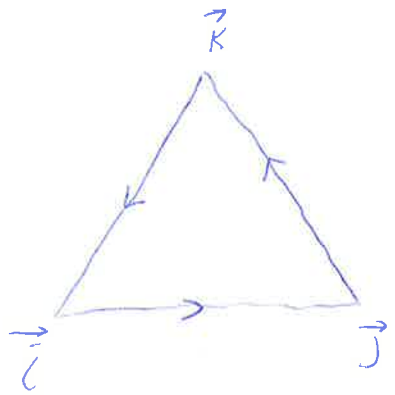
$\phi = 90°$

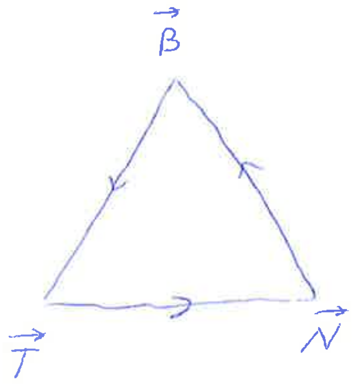
$$|\vec{B}(t)| = 1, \quad \forall t \in \mathbb{R}$$




- Os vetores $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ definem um sistema de referência fixo
- Os vetores $\vec{T}(t), \vec{N}(t), \vec{B}(t)$ definem um sistema de referência móvel.

Triedro de Frenet




$$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$$
$$\vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}$$
$$\vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}$$

$$\vec{T} \times \vec{N} = \vec{B}$$
$$\vec{N} \times \vec{B} = \vec{T}$$
$$\vec{B} \times \vec{T} = \vec{N}$$

# Exemplo do Cálculo dos Vetores $\vec{T}, \vec{N}$ e $\vec{B}$

Ex.: Encontre os vetores $\vec{T}, \vec{N}$ e $\vec{B}$ da curva dada pela função vetorial $\vec{r}(t) = e^t < 1, sen(t), cos(t) >$ no ponto $(1,0,1)$.

Sol.: $\vec{r}(t) = e^t < 1, sen(t), cos(t) >$

$$\vec{r}\,'(t) = e^t < 1, sen(t), cos(t) > + e^t < 0, cos(t), -sen(t) >$$

$$\vec{r}\,'(t) = e^t < 1, sen(t) + cos(t), cos(t) - sen(t) >$$

$$|\vec{r}\,'(t)| = |e^t| \sqrt{1^2 + [sen(t)+cos(t)]^2 + [cos(t)-sen(t)]^2}$$

$$|\vec{r}\,'(t)| = \sqrt{3}\, e^t$$

$$\vec{T}(t) = \frac{\vec{r}\,'(t)}{|\vec{r}\,'(t)|}$$

$$\boxed{\vec{T}(t) = \frac{1}{\sqrt{3}} < 1, sen(t)+cos(t), cos(t)-sen(t) >}$$

Que valor de $t$ leva ao ponto $(1,0,1)$?

$$\begin{cases} 1 = e^t \\ 0 = e^t sen(t) \\ 1 = e^t cos(t) \end{cases} \longrightarrow \boxed{t=0}$$

Satisfaz as três equações

$$\boxed{\vec{T}(0) = \frac{1}{\sqrt{3}} < 1, 1, 1 >}$$

$$\vec{T}'(t) = \frac{1}{\sqrt{3}} < 0, \cos(t) - \mathrm{sen}(t), -\mathrm{sen}(t) - \cos(t) >$$

$$|\vec{T}'(t)| = \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{[\cos(t) - \mathrm{sen}(t)]^2 + [\mathrm{sen}(t) + \cos(t)]^2}$$

$$|\vec{T}'(t)| = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \sqrt{2/3}$$

$$\vec{N}(t) = \frac{\vec{T}'(t)}{|\vec{T}'(t)|}$$

$$\vec{N}(t) = \frac{\cancel{\sqrt{3}}}{\sqrt{2}} \frac{1}{\cancel{\sqrt{3}}} < 0, \cos(t) - \mathrm{sen}(t), -\mathrm{sen}(t) - \cos(t) >$$

$$\vec{N}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} < 0, \cos(t) - \mathrm{sen}(t), -\mathrm{sen}(t) - \cos(t) >$$

$$\boxed{\vec{N}(0) = \frac{1}{\sqrt{2}} < 0, 1, -1 >}$$

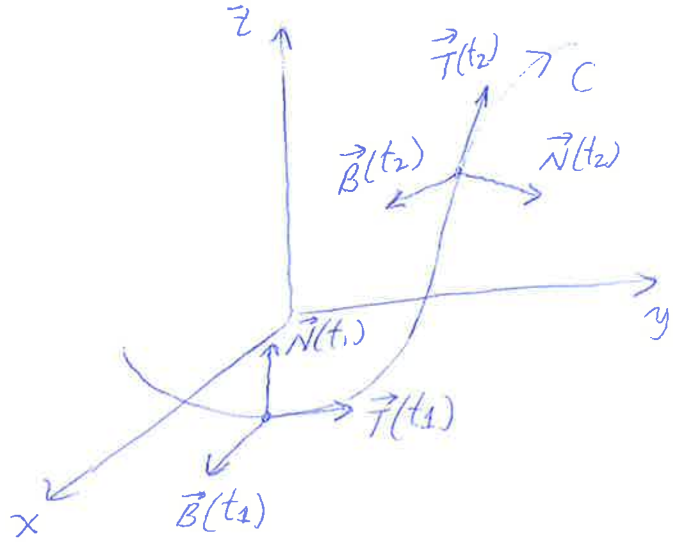
$$\vec{B}(t) = \vec{T}(t) \times \vec{N}(t) = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & \mathrm{sen}(t) + \cos(t) & \cos(t) - \mathrm{sen}(t) \\ 0 & \cos(t) - \mathrm{sen}(t) & -\mathrm{sen}(t) - \cos(t) \end{vmatrix}$$

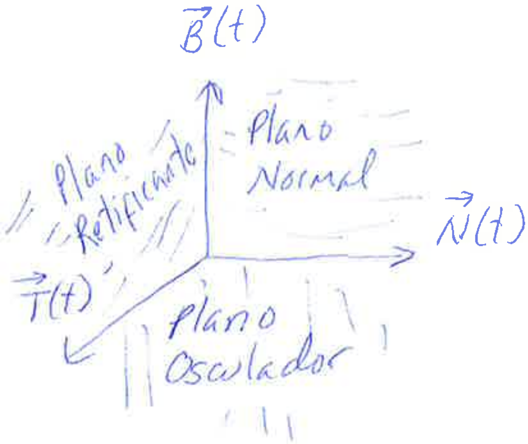
$$\vec{B}(t) = \frac{1}{\sqrt{6}} < -(\mathrm{sen}(t) + \cos(t))^2 - (\cos(t) - \mathrm{sen}(t))^2, \; \mathrm{sen}(t) + \cos(t), \; \cos(t) - \mathrm{sen}(t) >$$

$$\vec{B}(t) = \frac{1}{\sqrt{6}} < -2, \cos(t) + \mathrm{sen}(t), \cos(t) - \mathrm{sen}(t) >$$

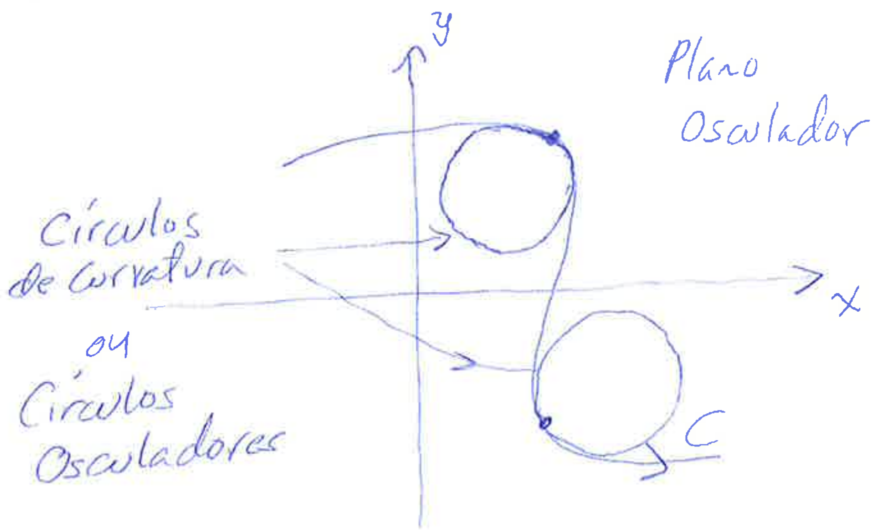
$$\boxed{\vec{B}(0) = \frac{1}{\sqrt{6}} < -2, 1, 1 >}$$

# Planos Osculador, Normal e Retificante




- O plano Osculador para ~~uma~~ ponto de uma curva que não é plana é aquele que mais se aproxima de conter a curva.
- Quando estudamos curvas planas, a curva está contida no plano osculador




- Os círculos osculador é aquele contido no plano osculador e que melhor aproxima a curva por uma circunferência perto de um ponto. Eles possuem os mesmos vetores tangente e normal e a mesma curvatura da curva no ponto em estudo. Fica do lado concavo da curva.

**Ex.:** Determine as equações do plano osculador e do plano normal da curva representada pela função vetorial $\vec{r}(t) = e^t \langle 1, \operatorname{sen}(t), \cos(t) \rangle$ no ponto $(1,0,1)$.

**Sol.:** Do vídeo anterior temos que

$$t=0 \Rightarrow \vec{r}(0) = \langle 1, 0, 1 \rangle = P_0$$

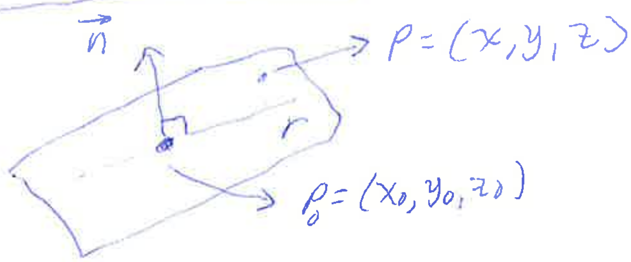
$$\vec{T}(0) = \frac{1}{\sqrt{3}} \langle 1, 1, 1 \rangle$$

$$\vec{N}(0) = \frac{1}{\sqrt{2}} \langle 0, 1, -1 \rangle$$

$$\vec{B}(0) = \frac{1}{\sqrt{6}} \langle -2, 1, 1 \rangle$$

– Para escrever as equações de um plano precisamos das coordenadas de um ponto $(x_0, y_0, z_0)$ e de um vetor normal $\vec{n} = (a, b, c)$:

$$\boxed{a(x-x_0) + b(y-y_0) + c(z-z_0) = 0} \text{ Eq. do Plano}$$




– O plano osculador é formado pelos vetores $\vec{T}$ e $\vec{N}$, logo um vetor normal é $\vec{B}$: $\vec{n} = (-2, 1, 1)$

$$-2(x-1) + 1(y-0) + 1(z-1) = 0$$

$$-2x + y + z + 2 - 1 = 0$$

$$\boxed{-2x + y + z + 1 = 0} \text{ Eq. do Plano Osculador}$$

- O plano normal é formado pelos vetores $N$ e $B$, logo um vetor normal é $\vec{T}$: $\vec{n} = (1, 1, 1)$.

$$1(x-1) + 1(y-0) + 1(z-1) = 0$$

$$\boxed{x + y + z - 2 = 0}$$ Eq. do Plano Normal.

# Círculo Osculador ou de curvatura

**Ex.:** Determine e desenhe o círculo osculador da parábola $y = 1 - x^2$ quando $x = 0$.

**Sol.:**

$$y = f(x) = 1 - x^2$$

$$f'(x) = -2x$$

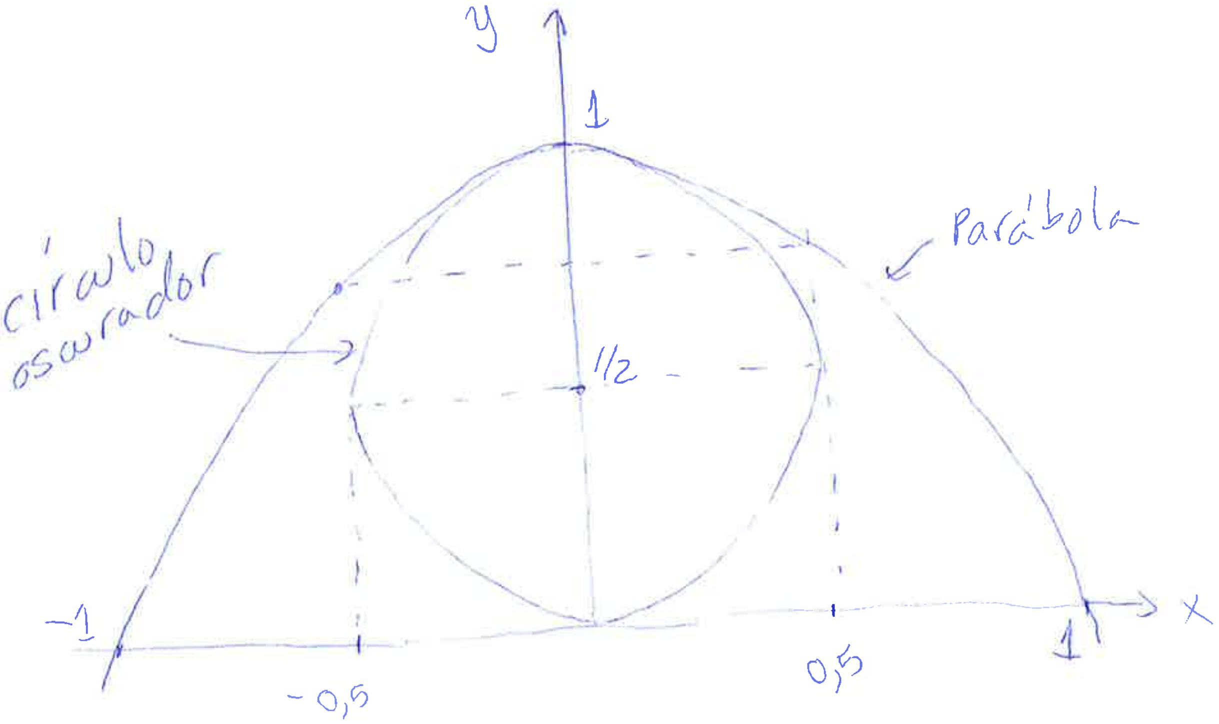
$$f''(x) = -2$$

$$K(x) = \frac{|f''(x)|}{\left(1 + [f'(x)]^2\right)^{3/2}}$$ ← Fórmula de curvatura para uma curva plana dada por $y = f(x)$

$$K(x) = \frac{2}{(1 + 4x^2)^{3/2}}$$

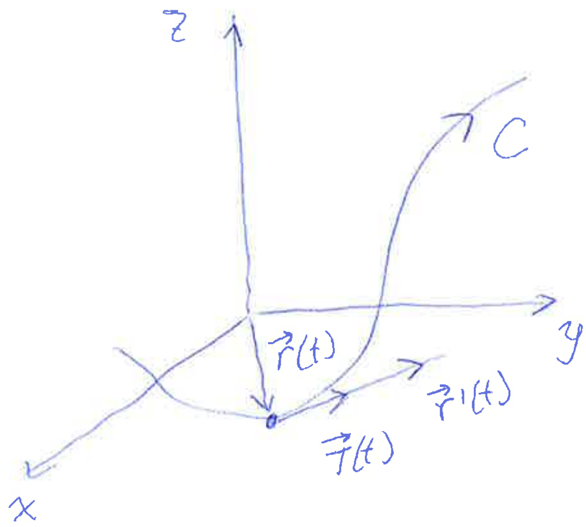
$$K(0) = 2$$

$$r(0) = \frac{1}{K(0)} = \frac{1}{2}$$ ← raio do círculo osculador



# Aceleração Tangencial e Normal






$t \to$ significa tempo

$\vec{r}(t) = \langle x(t), y(t), z(t) \rangle$ = são as coordenadas de um ponto no espaço 3D.

$$\underbrace{\vec{v}(t)}_{\text{vetor velocidade instantânea}} = \vec{r}\,'(t) = \frac{d}{dt}\left[\vec{r}(t)\right]$$

$$\vec{v}(t) = \underbrace{v(t)}_{\substack{\text{função}\\ \text{escalar}\\ \text{rapidez}}} \underbrace{\vec{T}(t)}_{\substack{\text{vetor}\\ \text{unitário}}}$$

$$v(t) = |\vec{v}(t)| = |\vec{r}\,'(t)| = \frac{ds(t)}{dt}$$

módulo do vetor velocidade

$s(t) \to$ função comprimento de arco.

$$\vec{a}(t) = \frac{d}{dt}\left[\vec{v}(t)\right]$$

vetor aceleração instantânea

$$\vec{a}(t) = \frac{d}{dt}\left[v(t)\vec{T}(t)\right] = \underbrace{\frac{dv(t)}{dt}}_{a_T(t)} \vec{T}(t) + v(t)\frac{d\vec{T}(t)}{dt} \quad (I).$$

$a_T(t)$ função escalar aceleração tangencial

$$\boxed{a_T(t) = \frac{dv(t)}{dt}}$$

variação no tempo da rapidez

- Definimos anteriormente $\vec{N}(t) = \dfrac{\vec{T}'(t)}{|\vec{T}'(t)|} \Longrightarrow \vec{T}'(t) = |\vec{T}'(t)|\,\vec{N}(t)$ (II)

$$\frac{d\vec{T}(t)}{dt} = \vec{T}'(t)$$

- Adicionalmente, uma das fórmulas de curvatura era

$$K(t) = \frac{|\vec{T}'|}{|\vec{r}\,'|} \Longrightarrow |\vec{T}'| = |\vec{r}\,'| \cdot K(t) \quad (III)$$

$$|\vec{T}'| = \underbrace{v(t)}_{\text{função escalar rapidez}} K(t)$$

Colocando (III) em (II)

$$\vec{T}'(t) = \frac{d\vec{T}(t)}{dt} = v(t)\,\kappa(t)\,\vec{N}(t) \qquad (IV)$$

Colocando (IV) em (I)

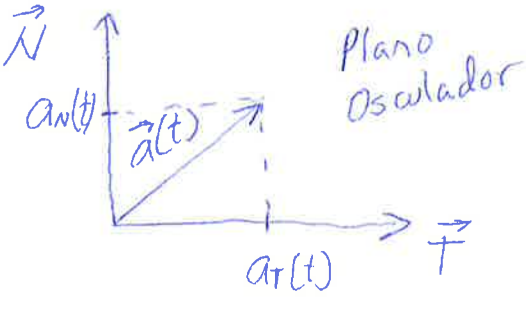
$$\vec{a}(t) = \frac{dv(t)}{dt}\,\vec{T}(t) + \underbrace{\kappa(t)\left[v(t)\right]^2}_{a_N(t)}\,\vec{N}(t)$$

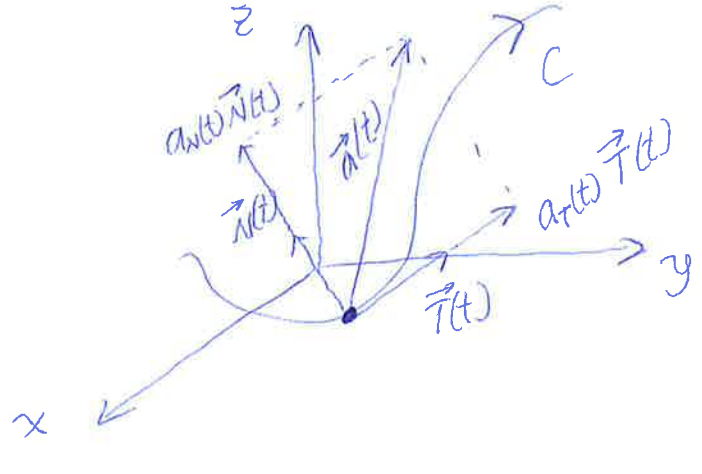
$a_N(t)$ função escalar aceleração ~~tangencial~~ normal

$$\vec{a}(t) = a_T(t)\,\vec{T}(t) + a_N(t)\,\vec{N}(t)$$

com $\begin{cases} a_T(t) = \dfrac{dv(t)}{dt} = \dfrac{d^2[s(t)]}{dt^2} \\[2ex] a_N(t) = \kappa(t)\left[v(t)\right]^2 \end{cases}$

- Note que o vetor aceleração não tem nenhuma componente na direção do vetor Binormal. O vetor aceleração está sempre no plano osculador (formado por $\vec{T}$ e $\vec{N}$)



- No caso particular em que a curva é uma linha reta $K(t)=0$ e $a_N(t)=0$. A aceleração é somente tangencial.
- No caso particular em que a curva é uma circunferência $K(t)=\frac{1}{R}$ e $a_N(t)=k(t)[v(t)]^2=\frac{[v(t)]^2}{R}$

que é a conhecida fórmula de aceleração para o movimento circular nos livros de Física (aceleração $\underbrace{\text{centripeta}}_{\text{centro do círculo osculador}}$).

Teorema: Se uma partícula move-se ao longo de uma curva lisa C, então

$$(i)\quad a_T(t)=\frac{\vec{v}(t)\cdot\vec{a}(t)}{v(t)} \quad e \quad a_N(t)=\frac{|\vec{v}(t)\times\vec{a}(t)|}{v(t)} \quad (ii)$$

Prova: $\vec{v}(t)=v(t)\vec{T}(t)$

$\vec{a}(t)=a_T(t)\vec{T}(t)+a_N(t)\vec{N}(t)$

$$(i)\quad \vec{v}(t)\cdot\vec{a}(t)=v(t)\vec{T}(t)\cdot[a_T(t)\vec{T}(t)+a_N(t)\vec{N}(t)]$$
$$=v(t)a_T(t)\underbrace{[\vec{T}(t)\cdot\vec{T}(t)]}_{1}+v(t)a_N(t)\underbrace{[\vec{T}(t)\cdot\vec{N}(t)]}_{\substack{0\\ \vec{T}\perp\vec{N}}}$$

$$\vec{v}(t)\cdot\vec{a}(t)=v(t)a_T(t)$$

$$a_T(t)=\frac{\vec{v}(t)\cdot\vec{a}(t)}{v(t)}=\frac{\vec{r}'(t)\cdot\vec{r}''(t)}{|\vec{r}'(t)|}$$

$$(ii)\quad \vec{v}(t)\times\vec{a}(t)=v(t)a_T(t)\underbrace{[\vec{T}(t)\times\vec{T}(t)]}_{\vec{0}}+v(t)a_N(t)\underbrace{[\vec{T}(t)\times\vec{N}(t)]}_{\vec{B}(t)}$$

$$\vec{v}(t)\times\vec{a}(t)=v(t)a_N(t)\vec{B}(t)$$

$$|\vec{v}(t)\times\vec{a}(t)|=|v(t)||a_N(t)|\underbrace{|\vec{B}(t)|}_{1}$$

$$|a_N(t)| = \frac{|\ \ \ \ \ \ \ \ \ |}{|v(t)|}$$

mas consideramos $v(t)$ e $a_N(t)$ como sendo sempre funções escalares positivas: $v(t)$ é positiva quando o tempo cresce (sentido do percurso) e $a_N(t)$ é positiva no sentido do vetor normal.

$$a_N(t) = \frac{|\vec{v}(t) \times \vec{a}(t)|}{v(t)}$$

$$a_N(t) = \frac{|\vec{r}\,' \times \vec{r}\,''|}{|\vec{r}\,'|}$$

Ex. Determine as componentes tangencial e normal do vetor aceleração se a trajetoria de uma partícula é descrita pela função vetorial $\vec{r}(t) = \langle 1+t,\ t^2-2t \rangle$.

Sol: $\vec{r}(t) = \langle 1+t,\ t^2-2t \rangle$

$\vec{r}\,'(t) = \vec{v}(t) = \langle 1,\ 2t-2 \rangle \rightarrow |\vec{v}(t)| = v(t) = \sqrt{1+(2t-2)^2}$

$r''(t) = \vec{v}\,'(t) = \vec{a}(t) = \langle 0,\ 2 \rangle$

$$a_T(t) = \frac{\vec{v} \cdot \vec{a}}{v(t)} = \frac{1 \cdot 0 + (2t-2) \cdot 2}{\sqrt{1^2 + (2t-2)^2}}$$

$$\boxed{a_T(t) = \frac{4(t-1)}{\sqrt{1+4(t-1)^2}}}$$

$$a_N(t) = \frac{|\vec{v} \times \vec{a}|}{v(t)}$$

$$\vec{v} \times \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2(t-1) & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = \langle 0, 0, 2 \rangle$$

$$|\vec{v} \times \vec{a}| = 2$$

$$\boxed{a_N(t) = \frac{2}{\sqrt{1+4(t-1)^2}}}$$