10

Equações Paramétricas e Coordenadas Polares

10.4 Áreas e Comprimentos em Coordenadas Polares

Áreas e Comprimentos em Coordenadas Polares

Nesta seção deduziremos a fórmula para a área de uma região cuja fronteira é dada por uma equação polar. Precisamos usar a fórmula para a área de um setor de um círculo:

$$\boxed{1} \qquad A = \frac{1}{2} r^2 \theta$$

onde, como na Figura 1, r é o raio e θ, é a medida em radianos do ângulo central.

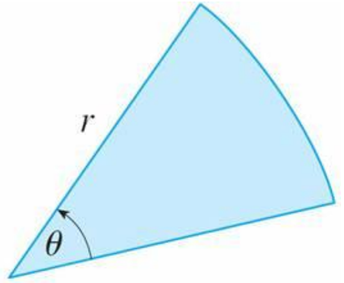


Figura 1

Áreas e Comprimentos em Coordenadas Polares

A Fórmula 1 segue do fato de que a área de um setor é proporcional a seu ângulo central:

$$A = (\theta/2\pi)\pi r^2 = \tfrac{1}{2}\, r^2\theta.$$

Seja $\mathcal{R}$ a região ilustrada na Figura 2, limitada pela curva polar $r = f(\theta)$ e pelos raios $\theta = a$ e $\theta = b$, onde f é uma função contínua positiva e onde $0 < b - a \leq 2\pi$.

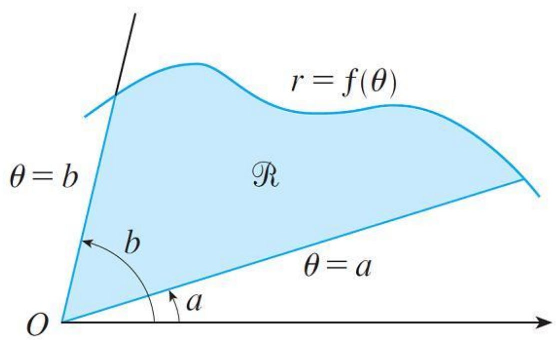


Figura 2

Áreas e Comprimentos em Coordenadas Polares

Dividimos o intervalo [*a*, *b*] em subintervalos com extremidades θ_0, θ_1, θ_2, . . . , θ_n e larguras iguais a $\Delta\theta$. Os raios $\theta = \theta_i$ podem dividir $\mathcal{R}$ em *n* regiões menores com ângulos centrais $\Delta\theta = \theta_i - \theta_{i-1}$. Se escolhermos θ_i^* no *i*-ésimo subintervalo $[\theta_{i-1}, \theta_i]$, então a área ΔA_i da *i*-ésima região será aproximada pela área do setor de um círculo com ângulo central $\Delta\theta$ e raio $f(\theta_i^*)$. (Veja a Figura 3.)

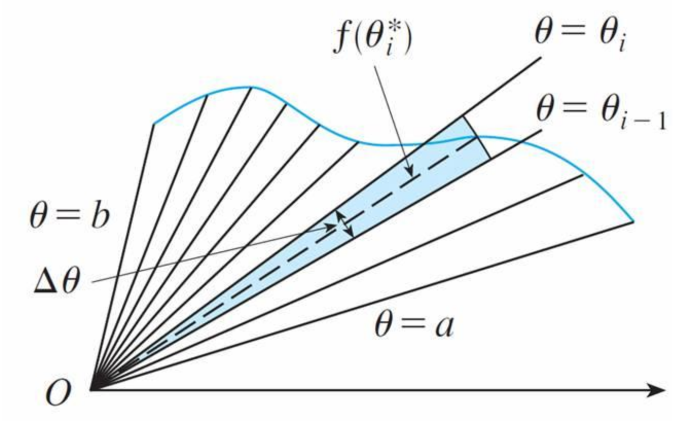


Figura 3

Áreas e Comprimentos em Coordenadas Polares

Então, a partir da Fórmula 1 temos

$$\Delta A_i \approx \tfrac{1}{2}\,[f(\theta_i^*)]^2\,\Delta\theta$$

e, assim, uma aproximação para a área total A de $\mathcal{R}$ é

$$\boxed{2} \qquad A \approx \sum_{i=1}^{n} \tfrac{1}{2}[f(\theta_i^*)]^2\,\Delta\theta$$

A partir da Figura 3 parece que a aproximação em $\boxed{2}$ melhora quando $n \to \infty$.

Áreas e Comprimentos em Coordenadas Polares

Mas as somas em $\boxed{2}$ são as somas de Riemann para a função $g(\theta) = \frac{1}{2}[f(\theta)]^2$, logo

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \tfrac{1}{2}[f(\theta_i^*)]^2 \,\Delta\theta = \int_a^b \tfrac{1}{2}[f(\theta)]^2 \,d\theta$$

Portanto, parece plausível (e de fato pode ser demonstrado)que a fórmula para a área A da região polar $\mathscr{R}$ é

$$\boxed{3} \qquad \boxed{A = \int_a^b \tfrac{1}{2}[f(\theta)]^2 \,d\theta}$$

Áreas e Comprimentos em Coordenadas Polares

A Fórmula 3 é frequentemente escrita como

4 $$A = \int_a^b \frac{1}{2} r^2 \, d\theta$$

subentendendo que $r = f(\theta)$. Observe a similaridade entre as Fórmulas 1 e 4.

Quando aplicamos a Fórmula 3 ou 4, é interessante pensar na área como sendo varrida por um raio em rotação que passa por O e que começa com o ângulo a e termina com ângulo b.

Exemplo 1

Calcule a área limitada por um laço da rosácea de quatro pétalas $r = \cos 2\theta$.

SOLUÇÃO: Observe a partir da Figura 4 que a região delimitada pelo laço direito é varrida pelo raio que gira de $\theta = -\pi/4$ até $\theta = \pi/4$.

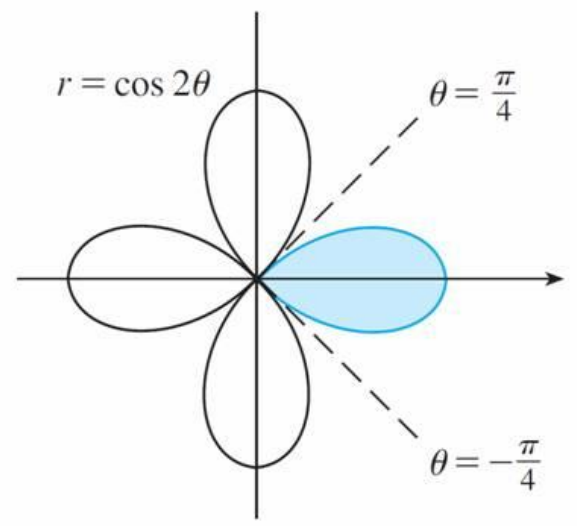


Figura 4

Exemplo 1 – *Solução*

continuação

Dessa forma, a Fórmula 4 fornece

$$A = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \tfrac{1}{2} r^2 \, d\theta = \tfrac{1}{2} \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos^2 2\theta \, d\theta = \int_0^{\pi/4} \cos^2 2\theta \, d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/4} \tfrac{1}{2}(1 + \cos 4\theta) \, d\theta = \tfrac{1}{2}\Big[\theta + \tfrac{1}{4} \operatorname{sen} 4\theta\Big]_0^{\pi/4} = \frac{\pi}{8}$$

Comprimento de Arco

Comprimento de Arco

Para calcularmos o comprimento de uma curva polar $r = f(\theta)$, $a \leq \theta \leq b$, nos referimos a θ como um parâmetro e escrevemos as equações paramétricas da curva como

$$x = r \cos \theta = f(\theta) \cos \theta \qquad y = r \operatorname{sen} \theta = f(\theta) \operatorname{sen} \theta$$

Usando a Regra do Produto e derivando em relação a θ, obtemos

$$\frac{dx}{d\theta} = \frac{dr}{d\theta} \cos\theta - r \operatorname{sen}\theta \qquad \frac{dy}{d\theta} = \frac{dr}{d\theta} \operatorname{sen}\theta + r \cos\theta$$

Comprimento de Arco

assim, usando $\cos^2\theta + \text{sen}^2\theta = 1$, temos

$$\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2 = \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 \cos^2\theta - 2r\,\frac{dr}{d\theta}\cos\theta\ \text{sen}\,\theta + r^2\,\text{sen}^2\theta$$

$$+ \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 \text{sen}^2\theta + 2r\,\frac{dr}{d\theta}\,\text{sen}\,\theta\ \cos\theta + r^2\cos^2\theta$$

$$= \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + r^2$$

Comprimento de Arco

Assumindo que *f′* é contínua, podemos escrever o comprimento de arco como

$$L = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\, d\theta$$

Portanto, o comprimento da curva com equação polar $r = f(\theta)$, $a \leq \theta \leq b$, é

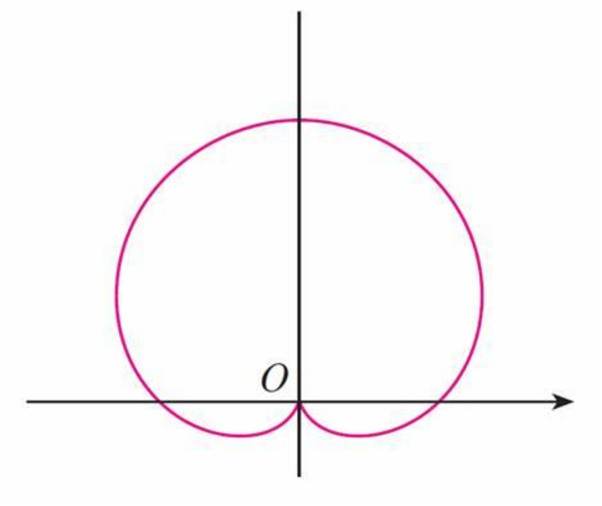
5

$$\boxed{L = \int_a^b \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\, d\theta}$$

Exemplo 4

Calcule o comprimento da cardioide $r = 1 + \text{sen}\ \theta$.

SOLUÇÃO: A cardioide é mostrada na Figura 8.



$r = 1 + \text{sen}\ \theta$

Figura 8

Exemplo 4 – *Solução*

continuação

5

$$\boxed{L = \int_a^b \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\, d\theta}$$

Seu comprimento total é dado pelo intervalo do parâmetro $0 \leq \theta \leq 2\pi$, assim, a Fórmula 5 dá

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\, d\theta = \int_0^{2\pi} \sqrt{(1 + \operatorname{sen}\theta)^2 + \cos^2\theta}\; d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{2 + 2\operatorname{sen}\theta}\; d\theta$$

Exemplo 4 – *Solução*

continuação

Poderíamos calcular essa integral pela multiplicação e divisão do integrando por $\sqrt{2 - 2 \operatorname{sen} \theta}$, ou poderíamos usar um sistema de computação algébrica. De qualquer maneira, calculamos que o comprimento da cardioide é $L = 8$.