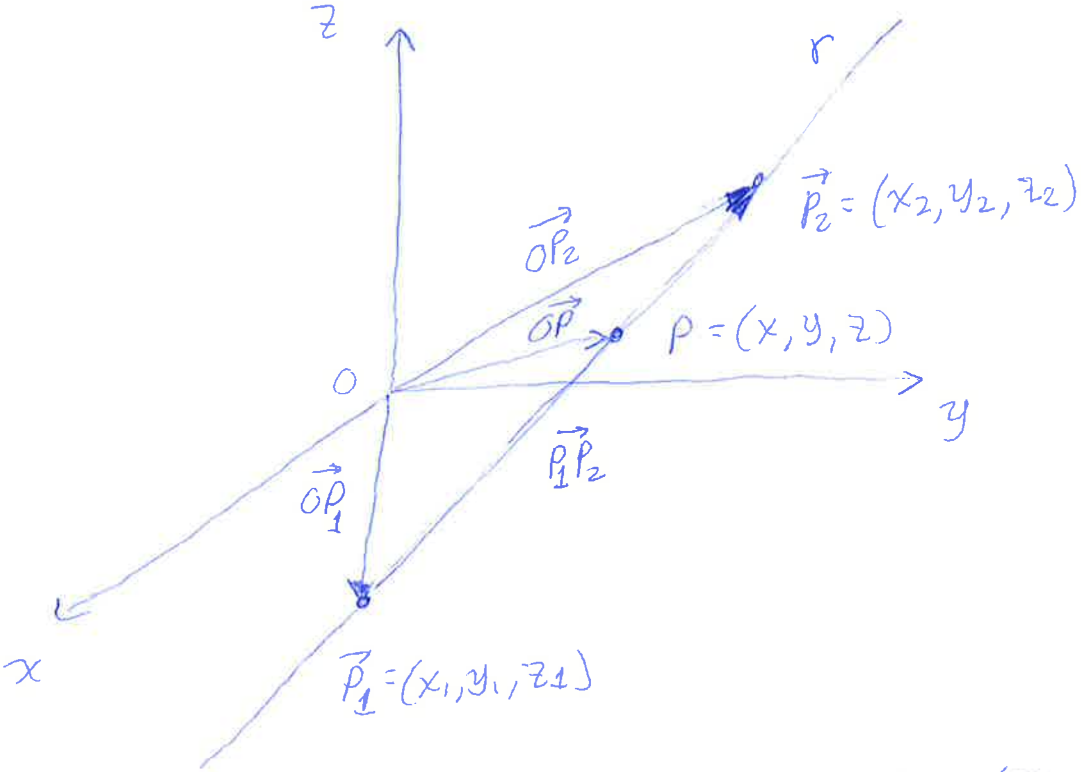
Equações Paramétricas

Eq. de uma reta no espaço tridimensional

- Qual é a reta (r) que passa pelos pontos $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$?



$$\vec{OP_1} = \vec{P_1} - \vec{O} = (x_1, y_1, z_1) - (0,0,0) = (x_1, y_1, z_1)$$
$$\vec{OP_2} = \vec{P_2} - \vec{O} = (x_2, y_2, z_2) - (0,0,0) = (x_2, y_2, z_2)$$
$$\vec{P_1P_2} = \vec{P_2} - \vec{P_1} = (x_2, y_2, z_2) - (x_1, y_1, z_1) = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1).$$
$$\vec{OP} = \vec{P} - \vec{O} = (x, y, z) - (0,0,0) = (x, y, z).$$

A equação da reta r pode ser escrita em termos do vetor arbitrário $\vec{OP}$:

$$\vec{OP} = \underbrace{\vec{OP_1}}_{\text{ponto da reta}} + \underbrace{\lambda}_{\text{parâmetro}} \underbrace{\vec{P_1P_2}}_{\text{vetor paralelo a reta}} \quad \leftarrow \text{Equação Vetorial}$$

$$\vec{OP} = \vec{OP_1} + \lambda \vec{P_1P_2}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{pmatrix}$$

ou

reta r
$$\begin{cases} x(\lambda) = x_1 + \lambda(x_2 - x_1) & (I) \\ y(\lambda) = y_1 + \lambda(y_2 - y_1) & (II) \\ z(\lambda) = z_1 + \lambda(z_2 - z_1) & (III) \end{cases}$$

Equações Paramétricas (λ) da reta r

Note que se $\lambda = 0 \Rightarrow \begin{cases} x(0) = x_1 \\ y(0) = y_1 \\ z(0) = z_1 \end{cases}$ A reta descreve o ponto P_1 (tomado como referência).

e se $\lambda = 1 \Rightarrow \begin{cases} x(1) = x_2 \\ y(1) = y_2 \\ z(1) = z_2 \end{cases}$ A reta descreve o ponto P_2 (Usado para calcular $\vec{P_1P_2}$).

- Para descrever o <u>segmento de reta</u> entre P_1 e P_2 escrevemos.

$$\begin{cases} x(\lambda) = x_1 + \lambda(x_2 - x_1) \\ y(\lambda) = y_1 + \lambda(y_2 - y_1) \\ z(\lambda) = z_1 + \lambda(z_2 - z_1) \end{cases} \quad \boxed{0 \leq \lambda \leq 1}$$

- Para descrever a reta toda $\boxed{-\infty < \lambda < +\infty}$.

Colocando em evidência λ das equações (I), (II) e (III) ③

encontramos:

de (I) $\lambda = \dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1}$

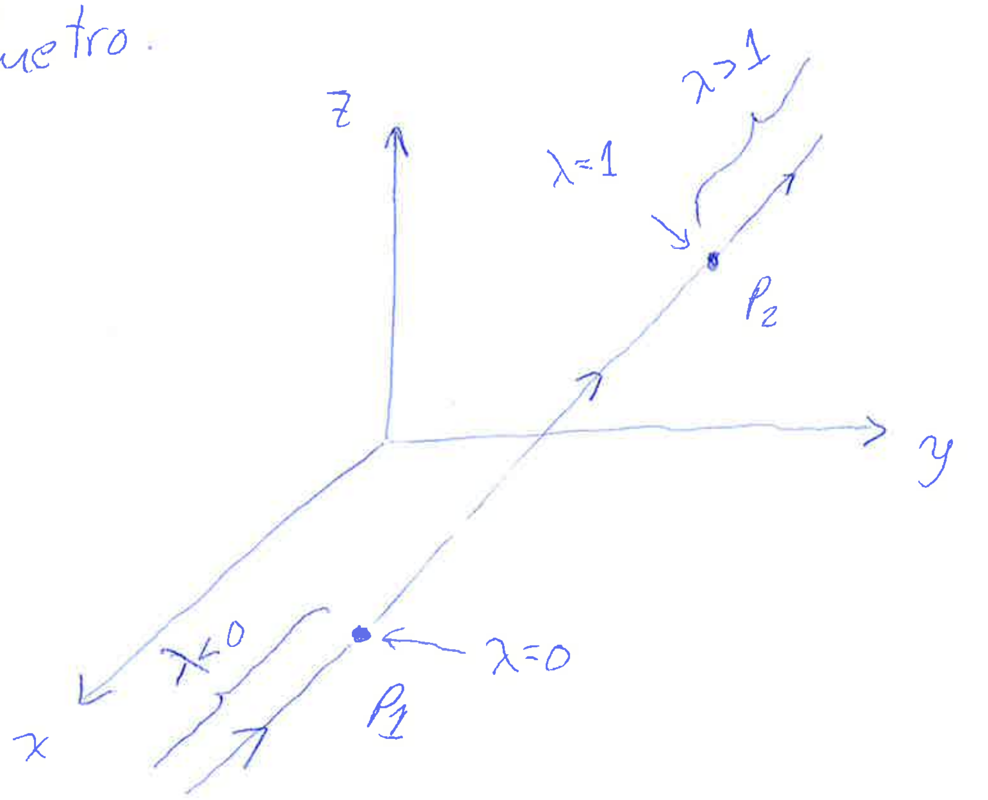
de (II) $\lambda = \dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1}$

de (III) $\lambda = \dfrac{z - z_1}{z_2 - z_1}$

logo, $\boxed{\dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \dfrac{z - z_1}{z_2 - z_1}}$ é uma forma alternativa (não paramétrica) de descrever os pontos de uma reta 3D.

Porém, são necessarias <u>duas</u> igualdades.

- Além de descrever os pontos que pertencem a uma reta as equações paramétricas (I), (II) e (III) descrevem o sentido em que a reta é circulada. No sentido crescente do parâmetro.



- Das aulas de Física talvez lembrem que o movimento retilíneo uniforme (velocidade constante) é dado pela equação:

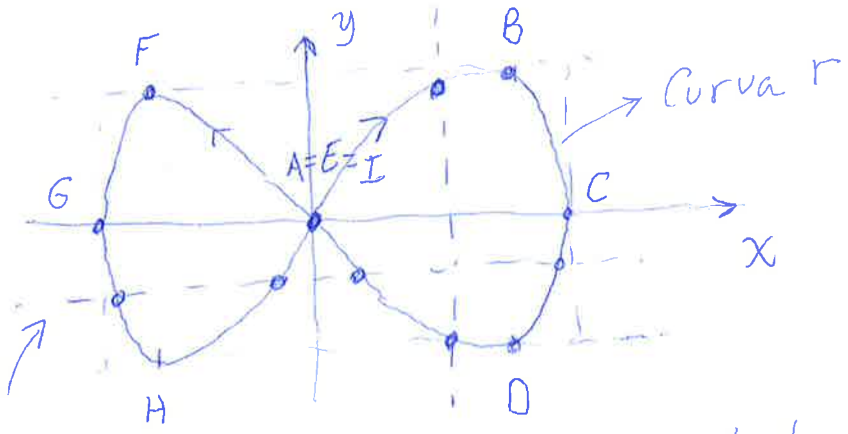
$$\underbrace{\vec{r}(t)}_{\text{ponto arbitrário da trajetória}} = \underbrace{\vec{r}(t_0)}_{\text{ponto inicial}} + \vec{v}\,\underbrace{t}_{\text{parâmetro (tempo)}}$$

O vetor velocidade não muda de direção (é paralelo à trajetória).

- Essa é uma forma alternativa de lembrar como se escreve a eq. de uma reta no espaço tridimensional.

Por que parametrizar?

x	y	t	Ponto
0	0	0	A
+	MÁX	t_1	B
MÁX	0	t_2	C
+	MÍN	t_3	D
0	0	t_4	E
−	MÁX	t_5	F
MÍN	0	t_6	G
−	MÍN	t_7	H
0	0	t_8	I



Não passa no teste da reta horizontal

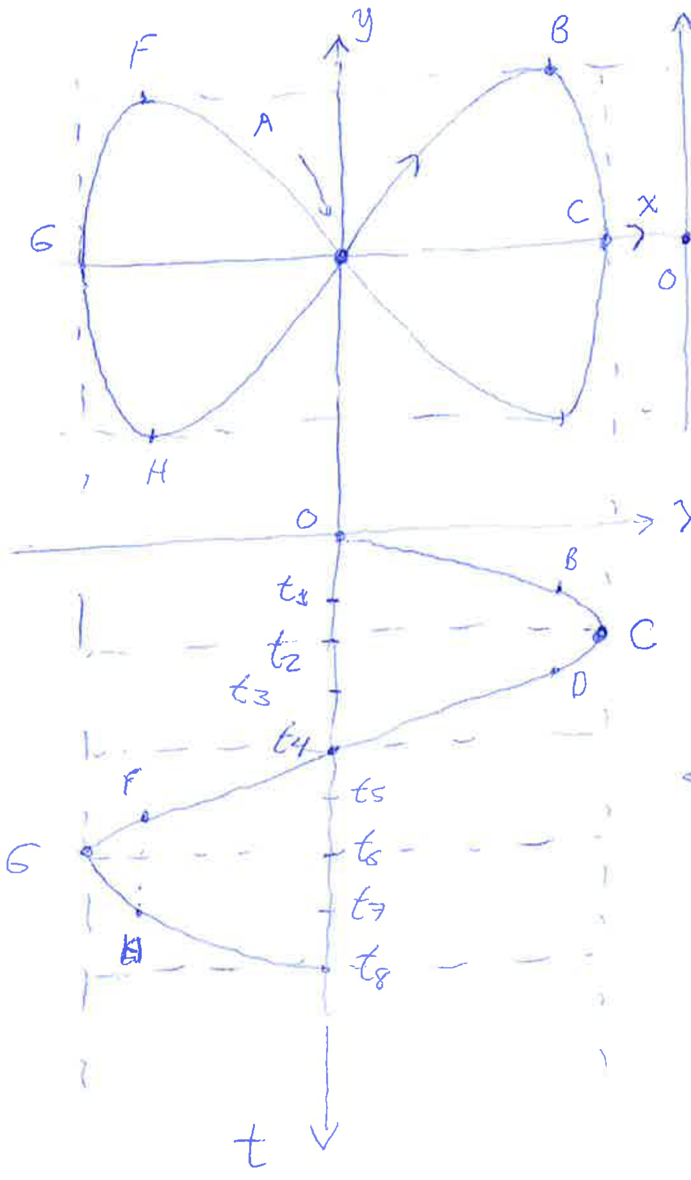
$\Downarrow$

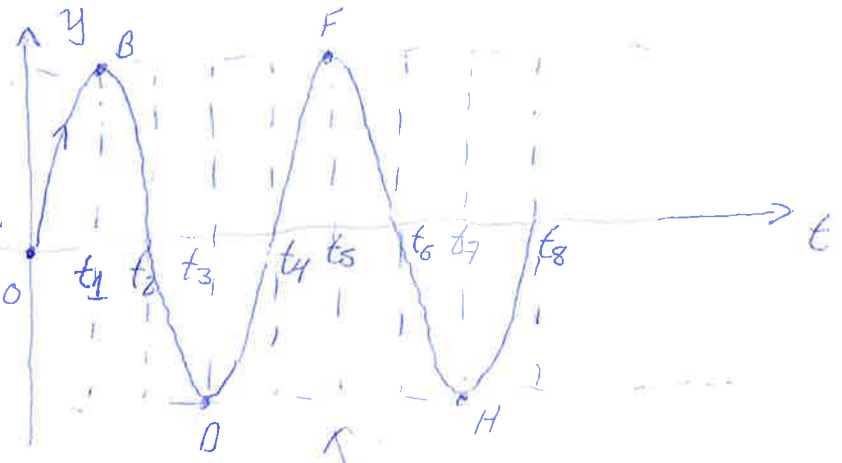
$\cancel{x = g(x)}$

Não passa no teste da reta vertical

$\Downarrow$

$\cancel{y = f(x)}$





$y = f(t)$ ← Passa no teste da reta vertical

$x = g(t)$

Curva r $\begin{cases} x = g(t) \\ y = f(t) \end{cases}$ $0 \le t \le t_8$

Parametrizada

t é o parâmetro.

- Toda curva dada na forma $y=f(x)$ ou $x=g(y)$ pode ser escrita na forma paramétrica. Basta escolher a variável independente como parâmetro.

Ex.: $x(y) = y^4 - 3\mathrm{sen}(y)$

variável independente

$$\begin{cases} x(t) = t^4 - 3\mathrm{sen}(t) \\ y(t) = t \end{cases}$$

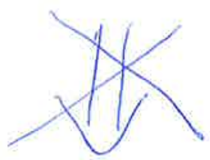
Ex.: $y(x) = \ln(x-5)$

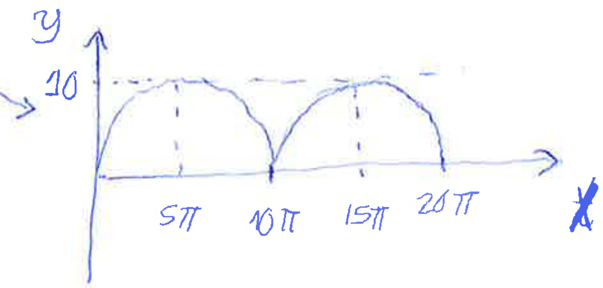
variável independente

$$\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = \ln(t-5) \end{cases}$$

- O contrário raramente é possível.

Ex.: $\begin{cases} x(t) = 5(t - \mathrm{sen}(t)) \\ y(t) = 5(1 - \cos(t)) \end{cases}$ Eq. Paramétricas de uma Catenária ou Cicloide.





Não existe $x(y)$ ou $y(x)$.

Exemplo de Curva Paramétrica - I

Ex. a) Esboce a curva dada pelas eq. paramétricas $x(t) = t^2$, $y(t) = 6-3t$. Indique o sentido em que a curva é traçada.

b) Elimine o parâmetro para encontrar uma equação cartesiana.

Sol.: Equações Paramétricas $\begin{cases} x(t) = t^2 \\ y(t) = 6-3t \end{cases}$ $\underbrace{-\infty < t < \infty}$

não existe restrição sobre t.
(nem no enunciado do problema e nem nas funções $x(t)$ e $y(t)$)

a) Método da "Força Bruta"

t	x	y
$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$
-1	1	9
0	0	6
1	1	3
2	4	0
$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$

- Os valores "interessantes" de t são aqueles que anulam $x(t)$ ou $y(t)$ ou $x'(t)$ ou $y'(t)$.

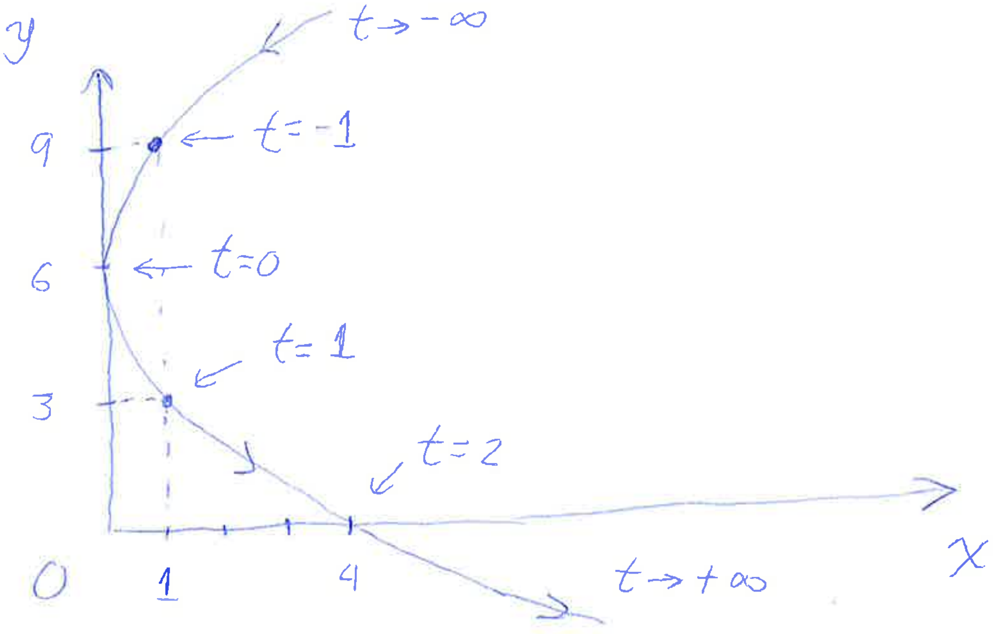
$x(t) = t^2 = 0 \Rightarrow \boxed{t=0}$

$y(t) = 6-3t = 0 \Rightarrow \boxed{t=2}$

$x'(t) = 2t = 0$

$y'(t) = -3$

- Outros valores de t para considerar são os extremos do intervalo (neste caso $t=-\infty$ e $t=+\infty$) e valores onde $x(t)$ e $y(t)$ seja simples de calcular (neste caso $t=1$ e $t=-1$).



b) Neste exemplo as equações paramétricas são simples e é possível eliminar o parâmetro. Porém, isso acontece raramente. Na maior parte das curvas paramétricas não é possível eliminar o parâmetro.

Eq. Paramétricas $\begin{cases} x = t^2 & (I) \\ y = 6-3t & (II) \end{cases}$

- De (II) $t = \dfrac{6-y}{3}$. Colocando esse resultado em (I):

$$x = \left(\frac{6-y}{3}\right)^2 \quad \text{ou}$$

$$\boxed{9x = (y-6)^2}$$ Eq. cartesiana $(x = g(y))$

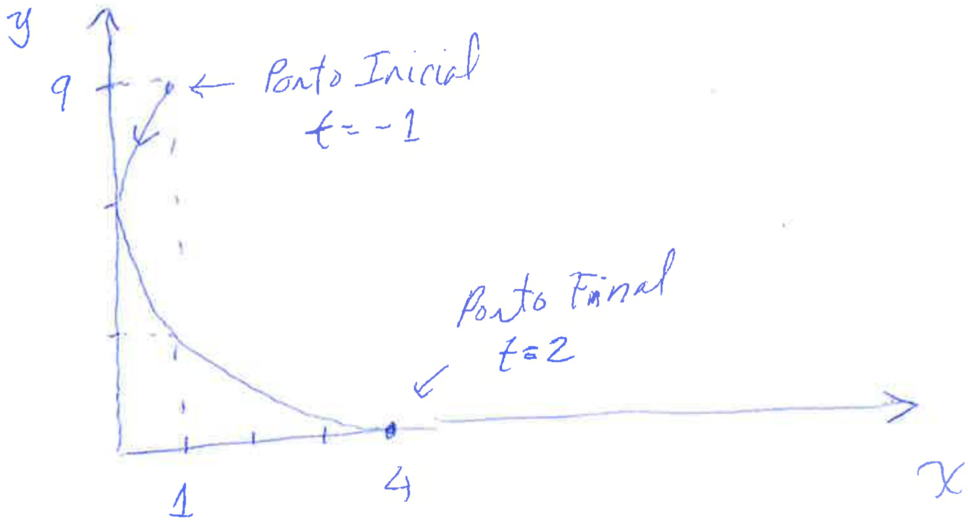
Parábola com vértice $(0,6)$ e eixo de simetria o eixo x.

- Neste exemplo a representação paramétrica e cartesiana coincidem. Veremos no próximo exemplo que isso não é verdade sempre.

- Podem ser colocados limites finitos no parâmetro de um conjunto de eq. paramétricas

Exemplo:
$$\begin{cases} x(t) = t^2 \\ y(t) = 6 - 3t \end{cases} \qquad -1 \leq t \leq 2$$

O gráfico correspondente será



Exemplo de Curvas Paramétricas - II

Ex.: a) Elimine o parâmetro para encontrar uma equação cartesiana da curva $x(\theta) = 2\cos(\theta)$ e $y(\theta) = sen^2(\theta)$.

b) Esboce a equação cartesiana e a curva paramétrica.

Sol.:

Eq. Paramétricas $\begin{cases} x(\theta) = 2\cos(\theta) & (I) \\ y(\theta) = sen^2(\theta) & (II). \end{cases}$

Para eliminar θ lembramos da identidade trigonométrica fundamental:

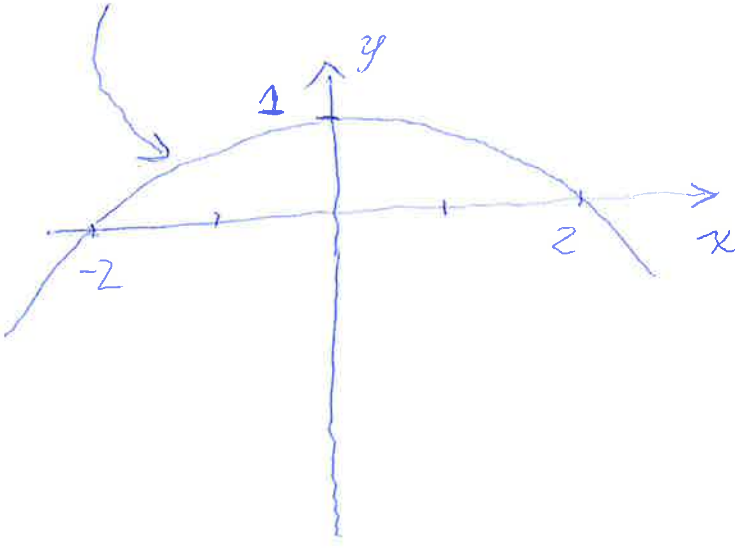
$$sen^2(\theta) + \cos^2(\theta) = 1$$

- De (II) $sen^2(\theta) = y$
- De (I) $\cos(\theta) = \frac{x}{2} \Longrightarrow \cos^2(\theta) = \left(\frac{x}{2}\right)^2$ logo

$$y + \left(\frac{x}{2}\right)^2 = 1 \quad \text{ou}$$

$$\boxed{y(x) = 1 - \left(\frac{x}{2}\right)^2}$$

Parábola com vértice em $(0, 1)$ e passa por $(-2,0)$ e $(2,0)$.



- Notem que existem pontos da parábola com valores negativos de y. Porém, segundo a eq. paramétrica $y(\theta) = \text{sen}^2(\theta)$ isso não poderia acontecer.

- O problema está na passagem

$$\cos(\theta) = \frac{x}{2} \;\underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow}\; \cos^2(\theta) = \left(\frac{x}{2}\right)^2$$

- Quando elevamos ao quadrado uma igualdade são introduzidas soluções extras. Veja:

$$\underbrace{x = 1}_{\text{uma única solução}} \;\underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow}\; x^2 = 1^2 = 1 \to \left.\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 1 \end{array}\right\} \text{Duas Soluções}$$

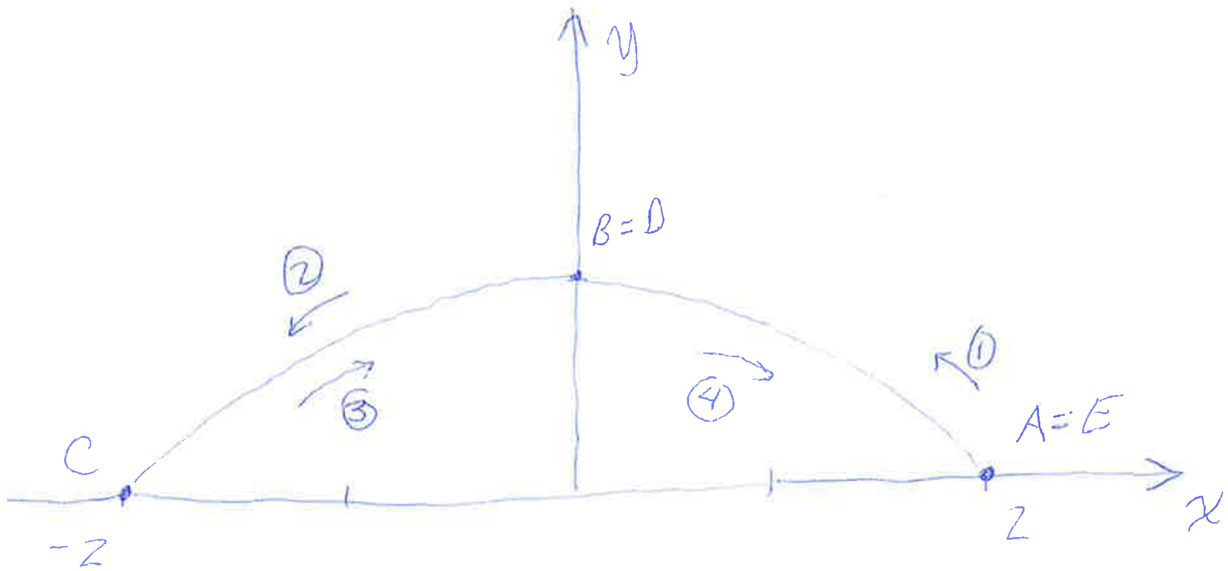
- Vamos construir uma tabela para esboçar a curva paramétrica

$$x(\theta) = 2\cos(\theta)$$
$$y(\theta) = \text{sen}^2(\theta).$$

sentido crescente de θ ↓

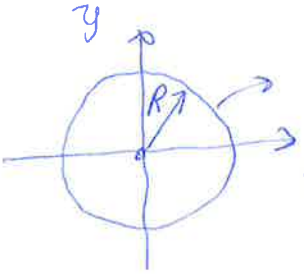
θ	x	y	Ponto
0	2	0	A
$\pi/2$	0	1	B
π	-2	0	C
$3\pi/2$	0	1	D
2π	2	0	E

1
2
3
4


y
B = D
2
1
3
4
A = E
C
-2
2
x

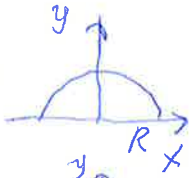
Parametrização de Circunferência, Elipse e Hipérbole

- Vamos considerar a eq. de uma circunferência com centro na origem e raio R.



$$x^2+y^2=R^2$$

$$y(x)=\sqrt{R^2-x^2} \rightarrow$$



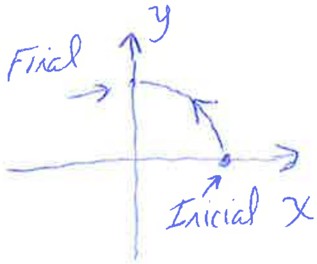
$$y(x)=-\sqrt{R^2-x^2} \rightarrow$$

- Essa circunferência pode ser parametrizada de diversas maneiras. Vamos discutir dois casos

Primeiro (Antihorário)

$$(I)\begin{cases} x(\theta)=R\cos(\theta) \\ y(\theta)=R\,\text{sen}(\theta) \end{cases}$$

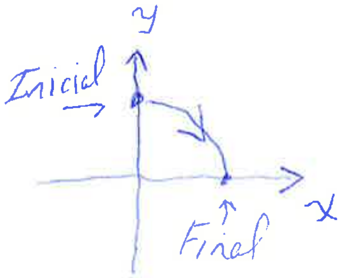
θ	x	y	
0	R	0	Inicial
$\pi/2$	0	R	Final



Segundo (Horário)

$$(II)\begin{cases} x(\theta)=R\,\text{sen}(\theta) \\ y(\theta)=R\cos(\theta) \end{cases}$$

θ	x	y	
0	0	R	Inicial
$\pi/2$	R	0	Final



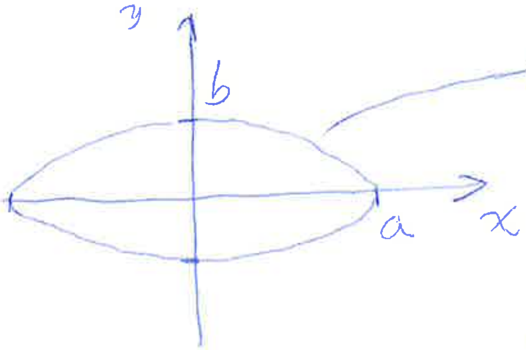
- A parametrização de uma curva NÃO é única

- Notem que nos dois casos anteriores usamos a identidade trigonométrica fundamental para mudar entre a eq. cartesiana da circunferência $(x^2+y^2=R^2)$ e as eq. paramétricas (I) ou (II): $\text{sen}^2(\theta)+\cos^2(\theta)=1$

de (I) $\rightarrow$ $\left(\frac{y}{R}\right)^2+\left(\frac{x}{R}\right)^2=1$

$$y^2+x^2=R^2$$

- De forma análoga encontramos as equações paramétricas de uma elipse com centro na origem



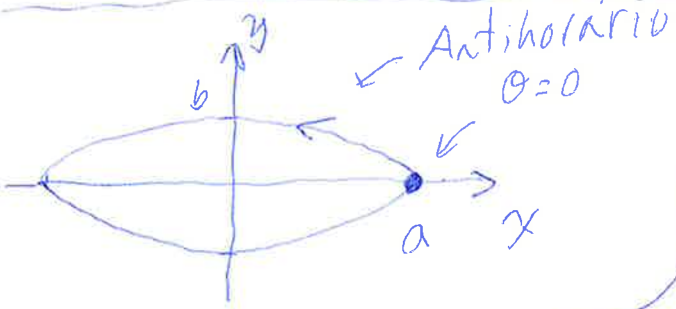
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\begin{cases} x(\theta) = a\cos(\theta) \\ y(\theta) = b\,\text{sen}(\theta) \end{cases}$$

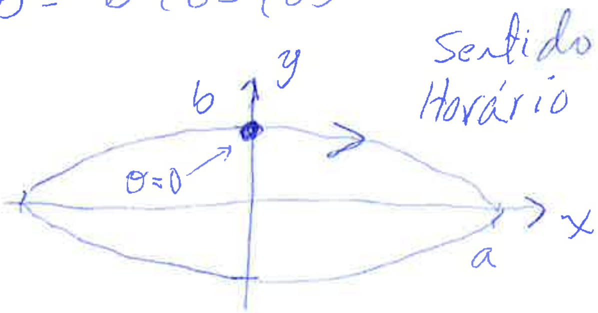
$$\cos^2(\theta) + \text{sen}^2(\theta) = 1$$

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$$

$$\begin{cases} x(\theta) = a\cos(\theta) \\ y(\theta) = b\,\text{sen}(\theta) \end{cases} \quad 0 \le \theta \le 2\pi \rightarrow$$ Uma volta na elipse começando em $(a,0)$



$$\begin{cases} x(\theta) = a\,\text{sen}(\theta) \\ y(\theta) = b\cos(\theta) \end{cases} \quad 0 \le \theta \le 2\pi \rightarrow$$ Uma volta na elipse começando em $(0,b)$



- Lembrando da identidade trigonométrica fundamental para as funções cosseno e seno hiperbólicos:

$$\cosh^2(\theta) - \operatorname{senh}^2(\theta) = 1$$

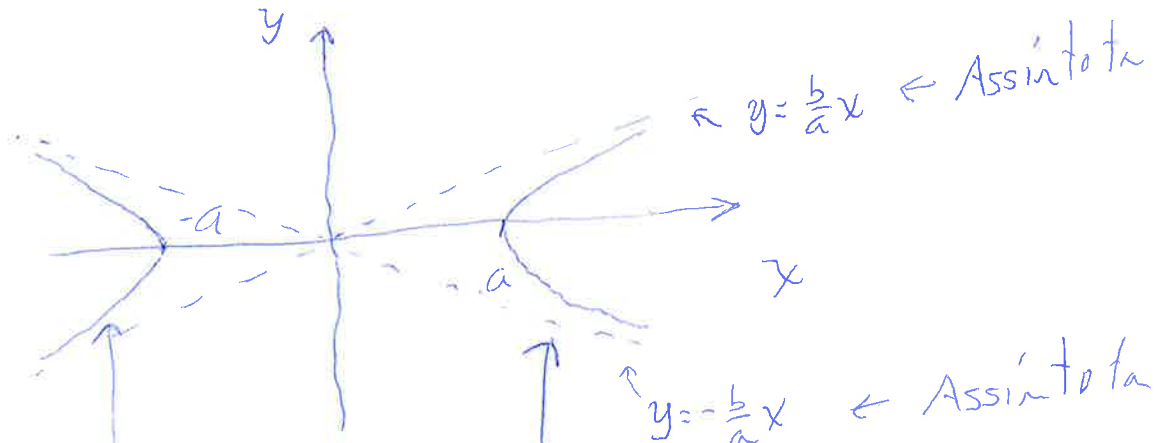
podemos verificar que as equações paramétricas

$$\begin{cases} x(\theta) = a\cosh(\theta) \\ y(\theta) = b\operatorname{senh}(\theta) \end{cases}$$

$$\cosh^2(\theta) - \operatorname{senh}^2(\theta) = 1$$

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$$

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1}$$ Eq. de uma Hipérbole



$$\begin{cases} x(\theta) = -a\cosh(\theta) \\ y(\theta) = -b\operatorname{senh}(\theta) \end{cases} \quad -\infty < \theta < \infty$$

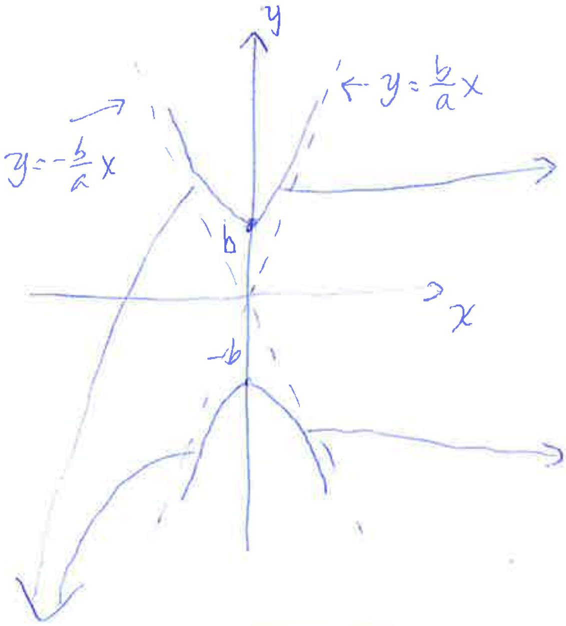
$$\begin{cases} x(\theta) = a\cosh(\theta) \\ y(\theta) = b\operatorname{senh}(\theta) \end{cases} \quad -\infty < \theta < \infty$$

Se $\theta > \Rightarrow y > 0$

$\theta < \Rightarrow y < 0$

Se $\theta = 0 \Rightarrow y = 0$ e $x = \pm a$

- Analogamente



$$\begin{cases} x(\theta) = a \operatorname{senh}(\theta) \\ y(\theta) = b \cosh(\theta) \end{cases}$$

$\theta > 0 \Rightarrow x > 0$
$\theta < 0 \Rightarrow x < 0$
$y > 0$ sempre

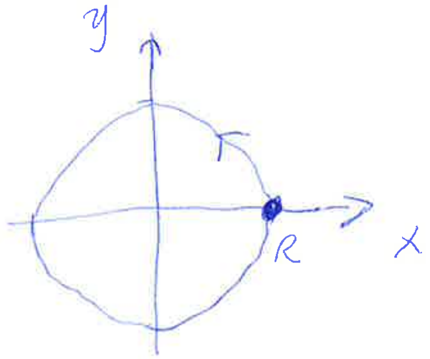
$$\begin{cases} x(\theta) = -a \operatorname{senh}(\theta) \\ y(\theta) = -b \cosh(\theta) \end{cases}$$

$$\boxed{\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1}$$ Eq. Cartesiana da Hipérbole.

- As equações paramétricas

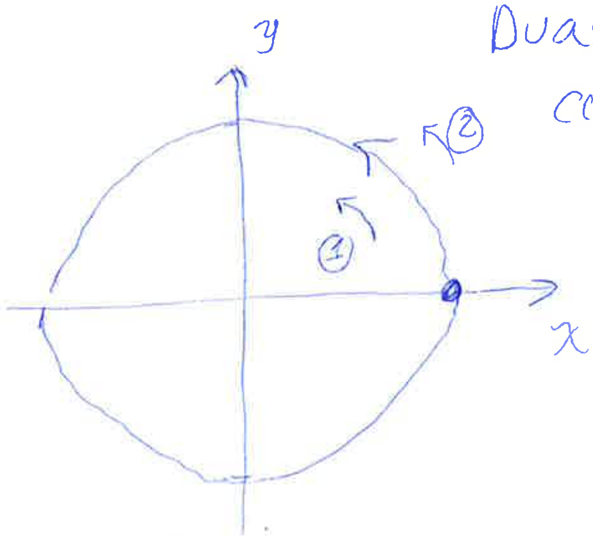
$$\begin{cases} x(\theta) = R\cos(\theta) \\ y(\theta) = R \operatorname{sen}(\theta) \\ 0 \le \theta \le 2\pi \end{cases} \quad e \quad \begin{cases} x(\theta) = R\cos(2\theta) \\ y(\theta) = R \operatorname{sen}(2\theta) \\ 0 \le \theta \le \pi \end{cases}$$

descrevem a mesma circunferência



- Se consideramos

$$\begin{cases} x(\theta) = R\cos(2\theta) \\ y(\theta) = R\,\mathrm{sen}(2\theta) \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases}$$



Duas voltas na mesma circunferência:

1) $0 \leq \theta \leq \pi$

2) $\pi \leq \theta \leq 2\pi$

Uso do computador para esboçar curvas paramétricas

Existem diversos "softwares" que permitem esboçar curvas:

1) MATHEMATICA

2) MATHCAD

3) MATHLAB

⋮

Elipse

$$\left(\frac{x}{10}\right)^2 + \left(\frac{y}{3}\right)^2 = 1$$

$$y_1(x) = 3\sqrt{1 - (x/10)^2}$$

$$y_2(x) = -3\sqrt{1 - (x/10)^2}$$

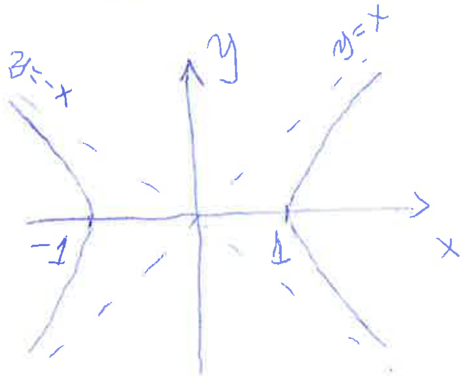
Parametrização da mesma elipse

$$\left(\frac{x}{10}\right)^2 + \left(\frac{y}{3}\right)^2 = 1$$

$$\begin{cases} x(t) = 10\cos(t) \\ y(t) = 3\,\mathrm{sen}(t) \end{cases}$$

Hipérbole

$$x^2 - y^2 = 1$$



$$x_1(y) = +\sqrt{1+y^2}$$

$$x_2(y) = -\sqrt{1+y^2}$$

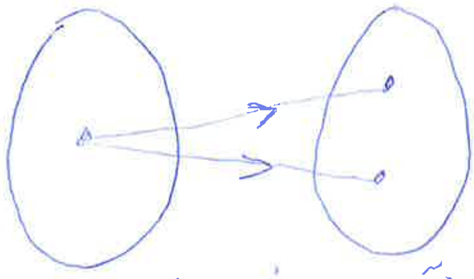
Parametrização da mesma hipérbole

$\underline{\underline{x>0}}$
$$\begin{cases} x(t) = \cosh(t) = \dfrac{e^t + e^{-t}}{2} \\ y(t) = \mathrm{senh}(t) = \dfrac{e^t - e^{-t}}{2} \end{cases}$$

$\underline{\underline{x<0}}$
$$\begin{cases} x(t) = -\cosh(t) \\ y(t) = -\mathrm{senh}(t). \end{cases}$$

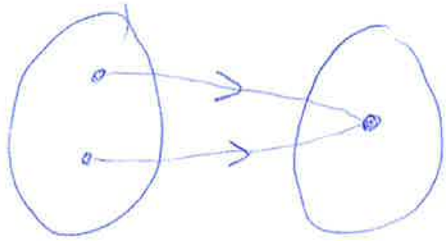
Função Inversa

Domínio Imagem



não é função

Domínio Imagem

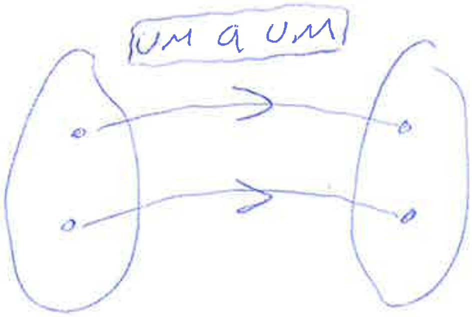


é função.

$x \rightarrow f(x)$.

porém, não existe inversa

Domínio Imagem



$x \longrightarrow f(x) = y$

$x = f^{-1}(y) \longleftarrow$

Existe função e função inversa

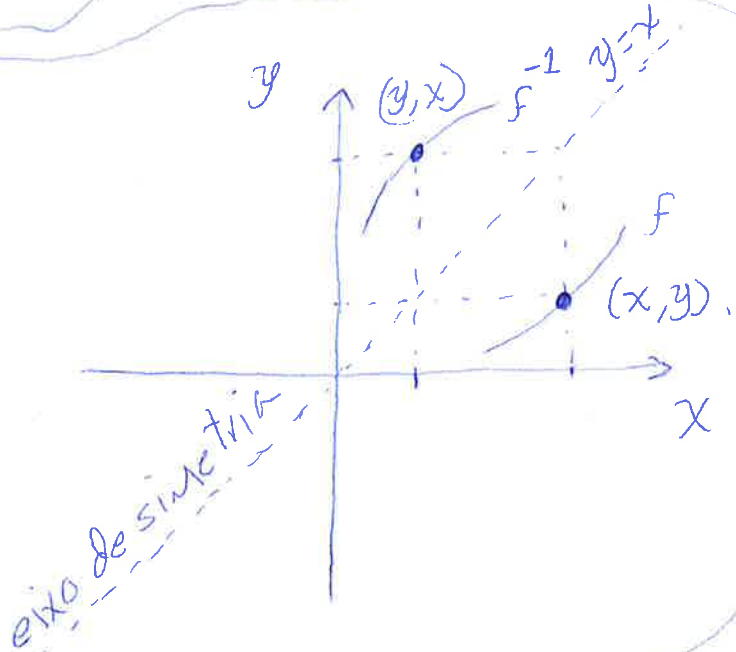
Exemplo

$$y(x) = 3x - 4$$

$$x(y) = \frac{1}{3}y + \frac{4}{3}$$

$(x, y) \in f$

$(y, x) \in f^{-1}$



Função Inversa do seno.

$y(x) = \text{sen}(x) = f(x)$

$x(y) = \text{Arcsen}(y) = g(y) = f^{-1}$

Parametrizando a função seno

$\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = \text{sen}(t) \end{cases}$ → Função Seno

trocando x por y

$\begin{cases} x(t) = \text{sen}(t) \\ y(t) = t \end{cases}$ → Função Arcsen

A função $f(x) = \text{sen}(x)$ somente tem inversa por intervalo como

$0 \leq x \leq \pi/2$.

Qual é a função inversa do polinômio de grau 5.

5

$$y(x) = x^5 - 3x^3 + 5x + 2$$

$$x(y) = ?$$

parametrizando

$$\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = t^5 - 3t^3 + 5t + 2 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Polinômio

trocando x por y.

$$\begin{cases} x(t) = t^5 - 3t^3 + 5t + 2 \\ y(t) = t \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Função Inversa do Polinômio anterior

Figuras de Lissajous

$$\begin{cases} x(t) = \cos(at) \\ y(t) = \operatorname{sen}(bt) \end{cases}$$

Alternativamente as equações paramétricas podem ser escritas como

$$\begin{cases} x(t) = A\operatorname{sen}(at+\delta) \\ y(t) = B\operatorname{sen}(bt) \end{cases}$$

δ - diferença de fase

Note que $\operatorname{sen}(at + \pi/2) = \cos(at)$.

Curva que "enche" o espaço

$$\begin{cases} x(t) = \cos(et) \\ y(t) = \operatorname{sen}(\sqrt{3}\,t) \end{cases}$$

$e \approx 2,7183$

$\sqrt{3} \approx 1,7321$

$\rightarrow$ Números Irracionais $\neq \frac{a}{b}$

onde a e $b \in \mathbb{Z}$

Outras curvas do mesmo tipo

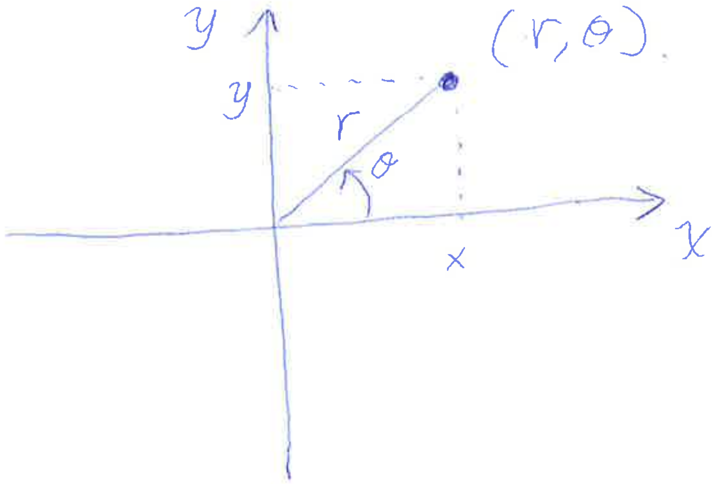
$$\begin{cases} x(t) = \cos(\sqrt{p}\,t) \\ y(t) = \operatorname{sen}(\sqrt{q}\,t) \end{cases}$$

p e $q \in \mathbb{Z}$

$\text{mdc}(p, q) = 1$

p e q primos entre si.

Coordenadas Polares.



$$x(r,\theta) = r\cos(\theta)$$
$$y(r,\theta) = r\,\mathrm{sen}(\theta)$$

Função Polar $\to r = f(\theta)$

$\to \theta = g(r)$.

Se $r = f(\theta)$.

$$\begin{cases} x(\theta) = f(\theta)\cos(\theta) \\ y(\theta) = f(\theta)\,\mathrm{sen}(\theta) \end{cases}$$

$\to$ Eq. Paramétricas em Coordenadas Cartesianas de uma função Polar.

Exemplo:

$r = \theta$ ← função polar

ou

$r(\theta) = \theta$ ←

↓ Parametrizar em Cartesianas

$$\begin{cases} x(\theta) = r(\theta)\cos(\theta) \\ y(\theta) = r(\theta)\,\text{sen}(\theta) \end{cases}$$

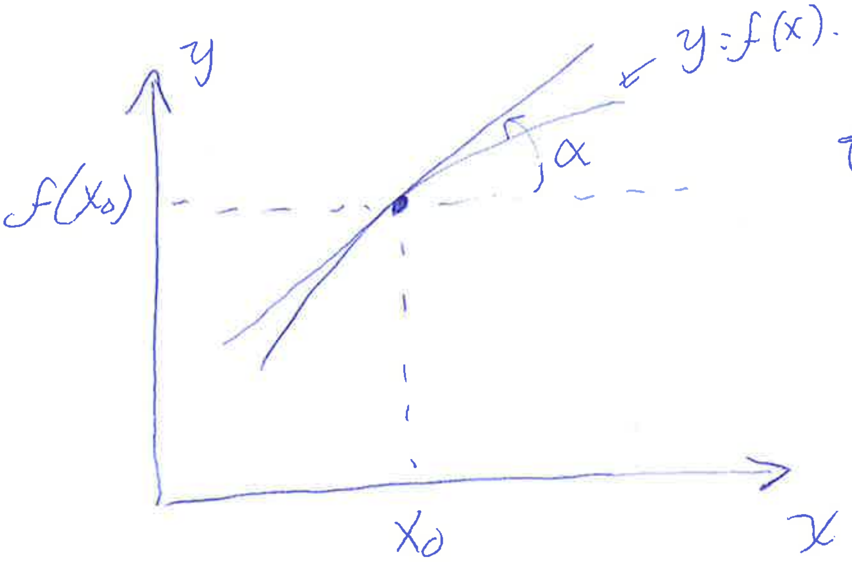
, neste caso:

$$\begin{cases} x(\theta) = \theta\cos(\theta) \\ y(\theta) = \theta\,\text{sen}(\theta) \end{cases}$$

→ Eq. Paramétricas em Cartesianas da função polar $r(\theta) = \theta$.

Tangentes para Curvas Paramétricas

- Dada uma função do tipo: $y = f(x)$

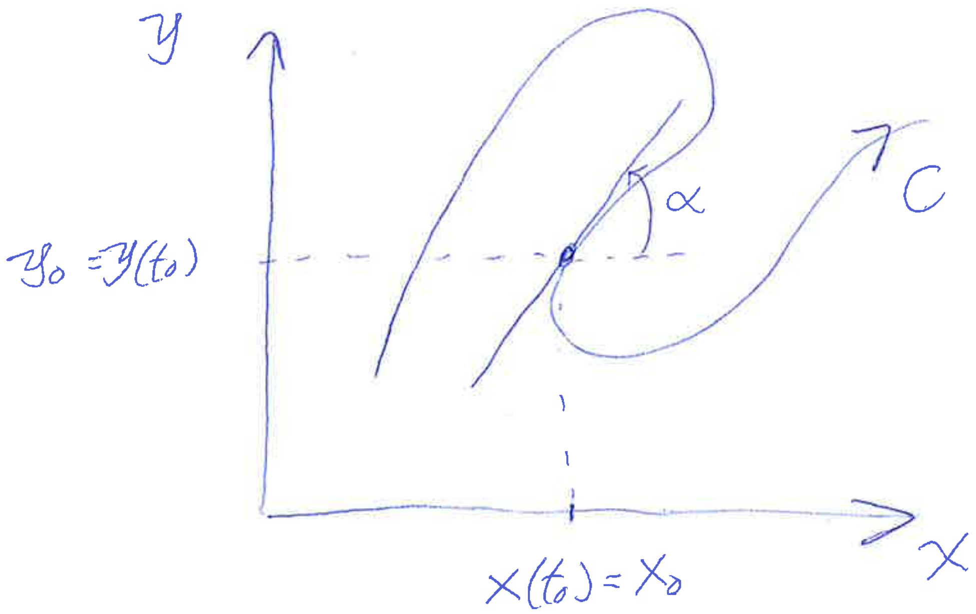


$$\tan(\alpha) = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0}$$

α é a inclinação da reta tangente a curva no ponto $(x_0, f(x_0))$.

- Queremos **resolver o** mesmo **tipo de problema quando**

$$C = \begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases} \qquad \cancel{y = F(x)}$$



- Dada $C = \begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$

Vamos supor que exista

$$y = F(x)$$

trocamos $y \rightarrow g(t)$

$x \rightarrow f(t)$

$$g(t) = \underbrace{F(f(t))}_{\text{composição de funções}}$$

$$\frac{dg(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left[F(f(t))\right] = \underbrace{\left(\frac{dF}{dx}\right)\left(\frac{dx}{dt}\right)}_{\text{Regra da Cadeia}}$$

mas $g(t) = y$ e $F(x) = y$

$$\frac{dy}{dt} = \left(\frac{dy}{dx}\right)\left(\frac{dx}{dt}\right)$$

Se $\frac{dx}{dt} \neq 0$

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt}}$$

← Fórmula usada para calcular a derivada de forma paramétrica.

Dois casos particulares

(I) Se $\frac{dy}{dt} = 0$ e $\frac{dx}{dt} \neq 0$

$\Downarrow$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{0}{\text{número finito}} = 0$$

$\Downarrow$

A tangente a curva é horizontal.

(II) Se $\frac{dy}{dt} \neq 0$ e $\frac{dx}{dt} = 0$

$\Downarrow$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\text{"número finito"}}{0} = \text{"}\infty\text{"} \quad \left(\lim_{x \to \pi/2} [\tan(x)] \to \infty\right)$$

$\Downarrow$

A tangente a curva é vertical $(\alpha = \pi/2)$.

- Como calcular $\frac{d^2y}{dx^2}$ quando C é dada em forma paramétrica?

Para calcular $\frac{d^2y}{dx^2}$ devemos trocar

$$y \to \frac{dy}{dx} \quad \text{em} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx/dt}$$

$$\boxed{\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx/dt}}$$

Fórmula usada para calcular a segunda derivada de forma paramétrica.

Cuidado! $\frac{d^2y}{dx^2} \neq \frac{d^2y}{dt^2}$

- Se $\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=x_0}$ ou $\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=t_0}$ é positivo a curva é <u>concava para cima</u> nesse ponto.

- Se é negativo a curva é <u>concava para baixo</u>

Exemplo do Uso da Derivada Paramétrica - I

a) Encontre a inclinação da curva dada pelas eq. paramétricas $x(\theta) = 5\cos(\theta)$ e $y(\theta) = \text{sen}(\theta)$ no ponto $(5,0)$. b) Encontre a concavidade da curva quando $\theta = \pi/2$.

Sol.: a) É dado um ponto $(x_0, y_0) = (5,0)$ e devemos encontrar $\theta_0 \rightarrow (x_0, y_0)$. Isto é: $x(\theta_0) = x_0$ e $y(\theta_0) = y_0$.

Para isso usamos as eq. paramétricas

$$\begin{cases} x(\theta) = 5\cos(\theta) \longrightarrow \theta_0, x_0 = 5 \longrightarrow \\ y(\theta) = \text{sen}(\theta) \longrightarrow \theta_0, y_0 = 0 \longrightarrow \end{cases} \begin{cases} 5 = 5\cos(\theta_0) \quad (I) \\ 0 = \text{sen}(\theta_0) \quad (II) \end{cases}$$

sistema de 2 eq. e uma única incognita

De (II) temos duas soluções em $[0, 2\pi)$

$\theta_0 = 0$ ou $\theta_0 = \pi$

Porém, $\theta_0 = \pi$ não satisfaz (I).

Logo $\boxed{\theta_0 = 0}$ é a única solução.

Isto é, quando $\theta = 0 \Rightarrow x(0) = 5$ e $y(0) = 0$

$\theta = 0 \longrightarrow (5,0)$

②

- Para encontrar a inclinação da curva devemos calcular $\frac{dy}{dx}$.

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{dy/d\theta}{dx/d\theta}}$$

Fórmula para Derivar de forma paramétrica

$$x(\theta) = 5\cos(\theta) \longrightarrow \frac{dx}{d\theta} = -5\,\mathrm{sen}(\theta)$$

$$y(\theta) = \mathrm{sen}(\theta) \longrightarrow \frac{dy}{d\theta} = \cos(\theta)$$

Logo, $\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{\cos(\theta)}{-5\,\mathrm{sen}(\theta)}}$ Primeira Derivada em função de θ

No ponto $(5,0)$ encontramos que $\theta = 0$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\theta=0} = \frac{\cos(0)}{-5\,\mathrm{sen}(0)} = \text{“}\frac{1}{0}\text{”} = \infty$$

Logo, a reta tangente a curva em $(5,0)$ é vertical.

- Agora vamos encontrar a concavidade da curva quando $\theta = \pi/2$ (b).

Concavidade $\Longrightarrow$ $\boxed{\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d}{d\theta}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx/d\theta}}$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d}{d\theta}\left(\frac{\cos(\theta)}{-5\,sen(\theta)}\right)}{-5\,sen(\theta)}$$

Lembrando a regra da derivada do quociente.

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-\frac{1}{5}\left[\frac{-sen(\theta)\,sen(\theta) - \cos(\theta)\cos(\theta)}{sen^2(\theta)}\right]}{-5\,sen(\theta)}$$

$$\boxed{\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{25}\,\frac{1}{sen^3(\theta)}}$$

Segunda Derivada em função de θ

Se $\theta = \pi/2$

$$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{\theta=\pi/2} = -\frac{1}{25}\cdot\underbrace{\frac{1}{sen^3(\pi/2)}}_{1} = -\frac{1}{25} < 0$$

Logo, quando $\theta = \pi/2$, a curva é concava para baixo ($\frown$).

$$x(\pi/2) = 5\cos(\pi/2) = 0$$

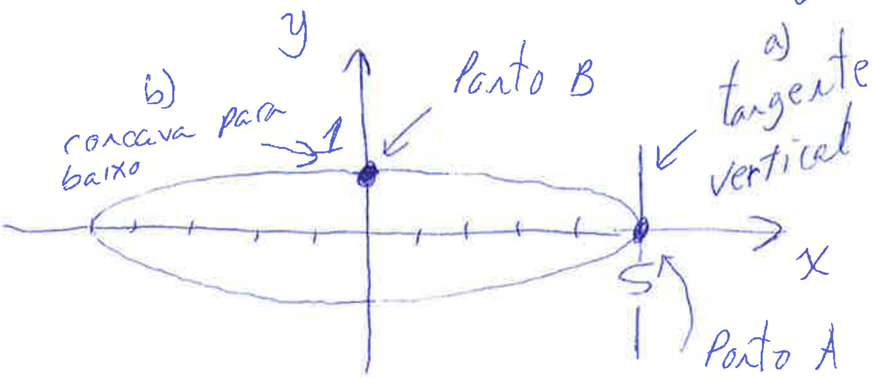
$$y(\pi/2) = sen(\pi/2) = 1$$

$$\theta = \pi/2 \longrightarrow (0, 1).$$

4

Podemos esboçar a curva para verificar os resultados.

$$\begin{cases} x(\theta) = 5\cos(\theta) \\ y(\theta) = 1\,\text{sen}(\theta) \end{cases} \longrightarrow$$ Eq. Paramétricas de uma Elipse centrada na origem



θ	x	y	Ponto
0	5	0	A
$\pi/2$	0	1	B

Exemplo do Uso da Derivada Paramétrica - II

Encontre os pontos da curva $x = t^3 - 3t^2$, $y = t^3 - 3t$ onde a tangente é horizontal ou vertical. Esboce a curva.

Sol.: Queremos esboçar a curva

$$\begin{cases} x(t) = t^3 - 3t^2 \\ y(t) = t^3 - 3t \end{cases}$$

Note que não existem restrições para t

Logo, $-\infty < t < +\infty$.

$$\lim_{t \to \pm\infty} [x(t)] = \lim_{t \to \pm\infty} [t^3 - 3t^2] = \lim_{t \to \pm\infty} [t^3] = \pm\infty$$

potência maior

$$\lim_{t \to \pm\infty} [y(t)] = \lim_{t \to \pm\infty} [t^3 - 3t] = \lim_{t \to \pm\infty} [t^3] = \pm\infty$$

Com isso podemos começar a preencher uma tabela

t	x	y
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$

Que outros valores de t são relevantes?

① Se $x(t)=0$

$t^3-3t^2=0$

$t^2(t-3)=0$

$\boxed{t=0}$ e $\boxed{t=3}$

t	x	y
0	0	0
3	0	18

② Se $y(t)=0$

$t^3-3t=0$

$t(t^2-3)=0$

$\boxed{t=0}$ $t^2=3 \rightarrow \boxed{t=\mp\sqrt{3}}$

t	x	y
$-\sqrt{3}$	$-14{,}2$	0
$\sqrt{3}$	$-3{,}8$	0

③ Se $x'(t)=0$

$x'(t)=3t^2-6t=0$

$3t(t-2)=0$

$\boxed{t=0}$ e $\boxed{t=2}$

t	x	y
2	-4	2

Nestes valores de t temos que $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy/dt}{dx/dt}=\infty$

Logo, a tangente a curva é vertical (T.V.)

④ Se $y'(t)=0$

$3t^2-3=0$

$3(t^2-1)=0$

$\boxed{t=-1}$ e $\boxed{t=1}$

t	x	y
-1	-4	2
1	-2	-2

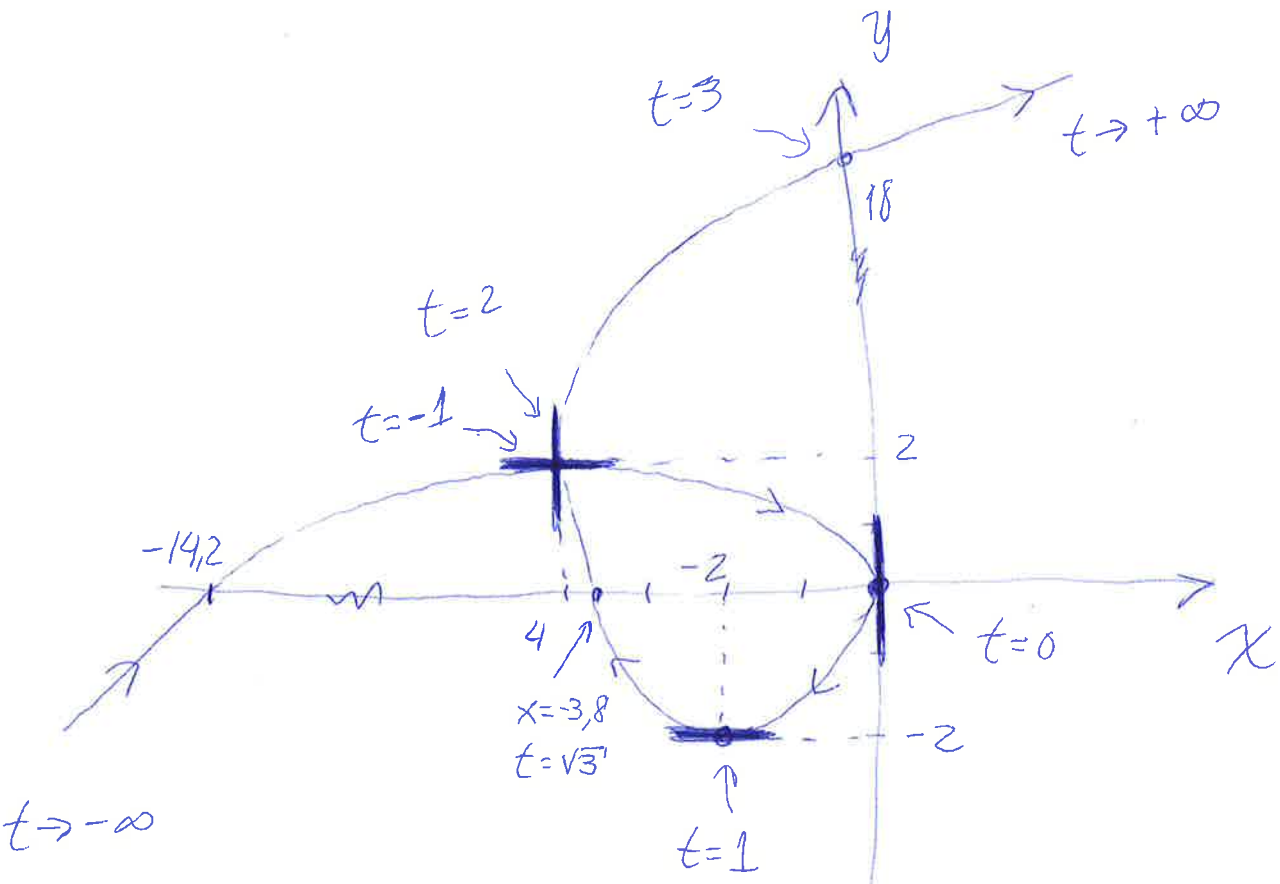
Nestes valores de t

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy/dt}{dx/dt}=0 \Rightarrow$ Tangente Horizontal (T.H.)

Juntando toda a informação

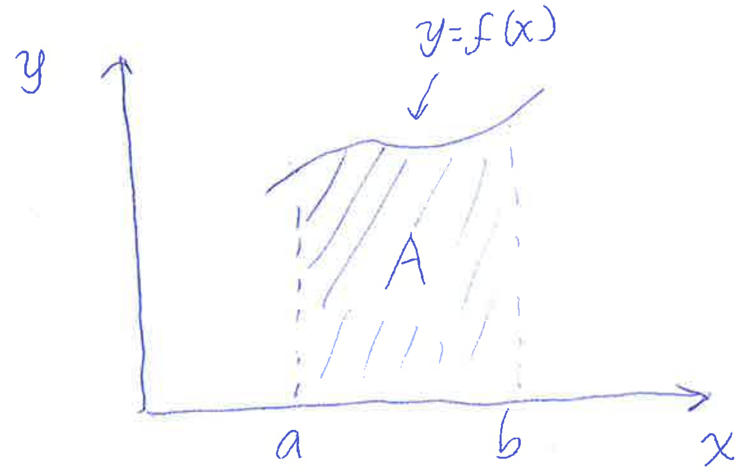
Sentido crescente de t

t	x	y	
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	
$-\sqrt{13}$	$-14,2$	0	
-1	-4	2	(T.H.)
0	0	0	(T.V)
1	-2	-2	(T.H.)
$\sqrt{3}$	$-3,8$	0	
2	-4	2	(T.V.)
3	0	18	
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	



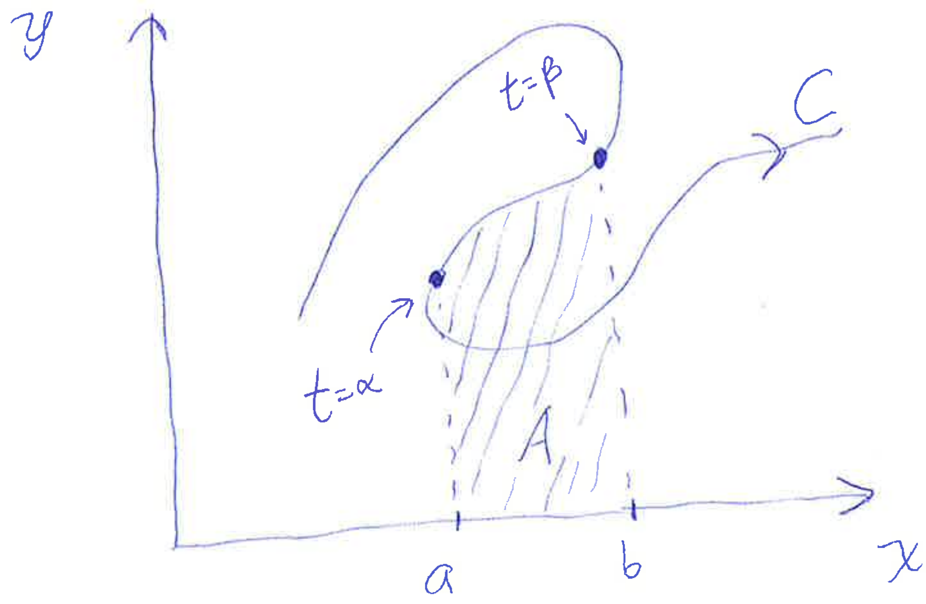
Áreas de Curvas Paramétricas

- Se $y = f(x)$, e $f(x) \geq 0$ em $a \leq x \leq b$



$$A = \int_a^b f(x)\, dx$$

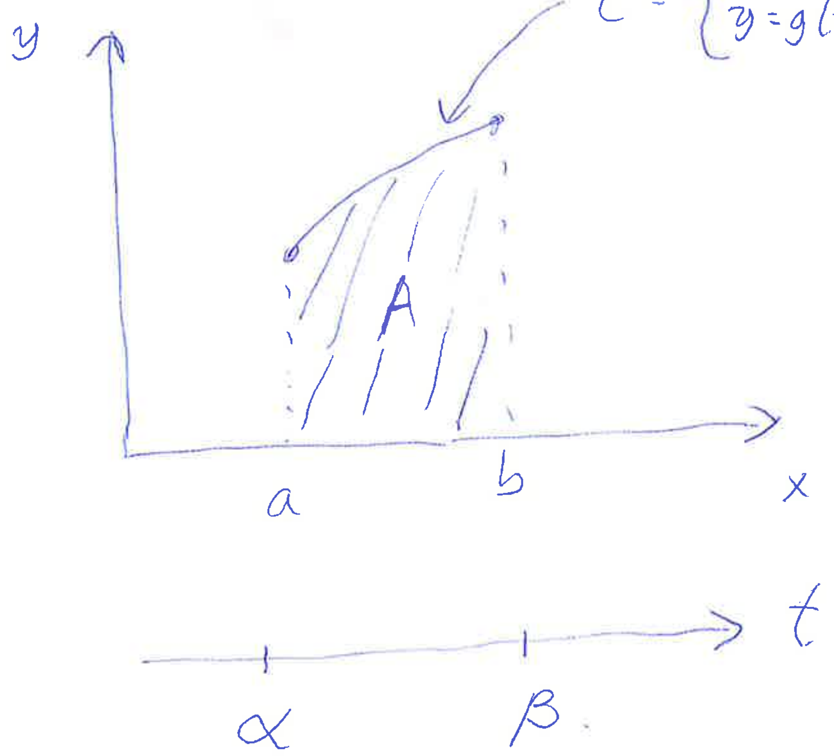
- Vamos pensar uma situação análoga para uma curva paramétrica $C = \begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$



$x(\alpha) = a$ $\quad$ $x(\beta) = b$

Após apagar a parte da curva que não é relevante

$C = \begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$ $\boxed{\alpha \le t \le \beta}$ novo.



$$A = \int_a^b y(x)\,dx$$

Vamos usar a Regra de Substituição para uma Integral Definida para trocar

$y(x) \longrightarrow g(t)$ (Note que $\frac{dx}{dt} = f'(t)$)

$dx \longrightarrow f'(t)dt$

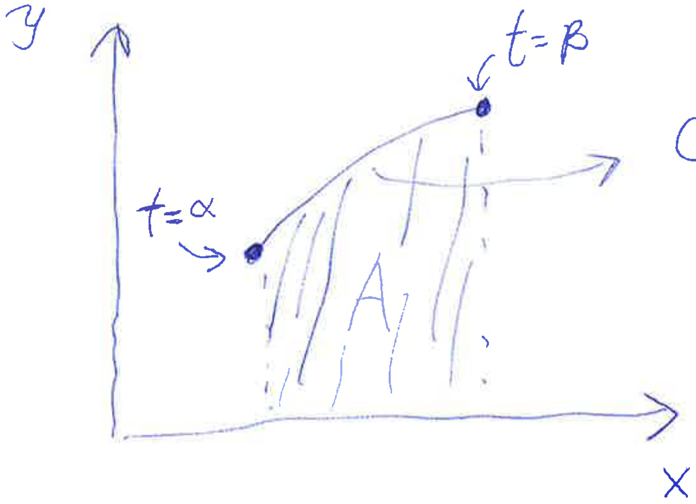
$a \longrightarrow \alpha$

$b \longrightarrow \beta$

$$A = \int_\alpha^\beta g(t) f'(t)\,dt$$

(3)

Ou $\boxed{A = \int_{\alpha}^{\beta} y(t)\, x'(t)\, dt}$

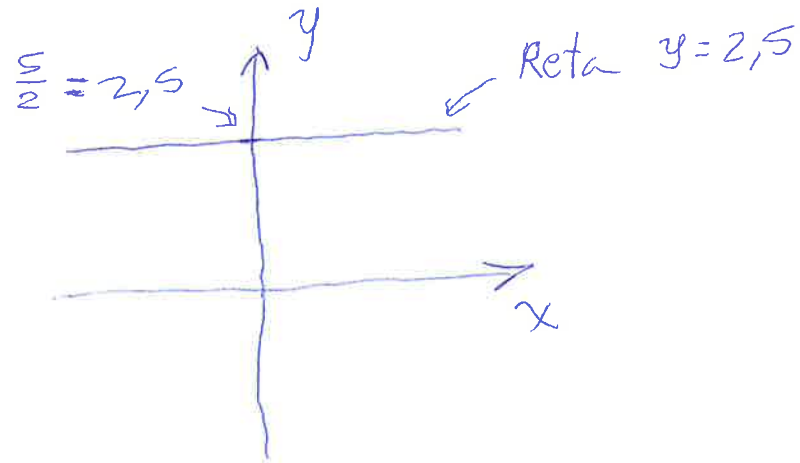


$C = \begin{cases} x(t) \\ y(t) \end{cases} \quad \alpha \le t \le \beta$

Exemplo de Cálculo de Área

- Calcule a área limitada pela curva $x = t - \frac{1}{t}$, $y = t + \frac{1}{t}$ e a reta $y = 2,5$.

Sol.: Primeiro temos que visualizar a área a ser calculada. A reta é fácil de esboçar:



- O mais difícil é esboçar a curva paramétrica

$$C \begin{cases} x(t) = t - \frac{1}{t} \\ y(t) = t + \frac{1}{t} \end{cases}$$

Neste caso, devido as semelhanças das equações, é mais fácil eliminar o parâmetro.

$$\begin{array}{rl} & x = t - \frac{1}{t} \\ + & y = t + \frac{1}{t} \\ \hline & x + y = 2t \end{array} \qquad \begin{array}{rl} & y = t + \frac{1}{t} \\ - & x = t - \frac{1}{t} \\ \hline & y - x = \frac{2}{t} \end{array}$$

$$\begin{cases} x = t - \frac{1}{t} \\ y = t + \frac{1}{t} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 2t & (I) \\ -x + y = \frac{2}{t} & (II) \end{cases}$$

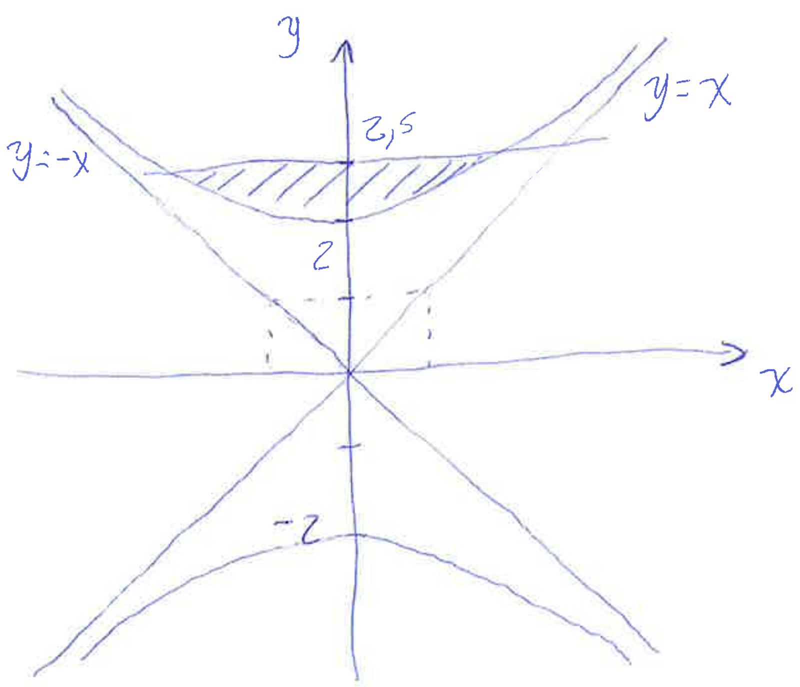
De (I) $t = \frac{x+y}{2}$ e colocando em (II).

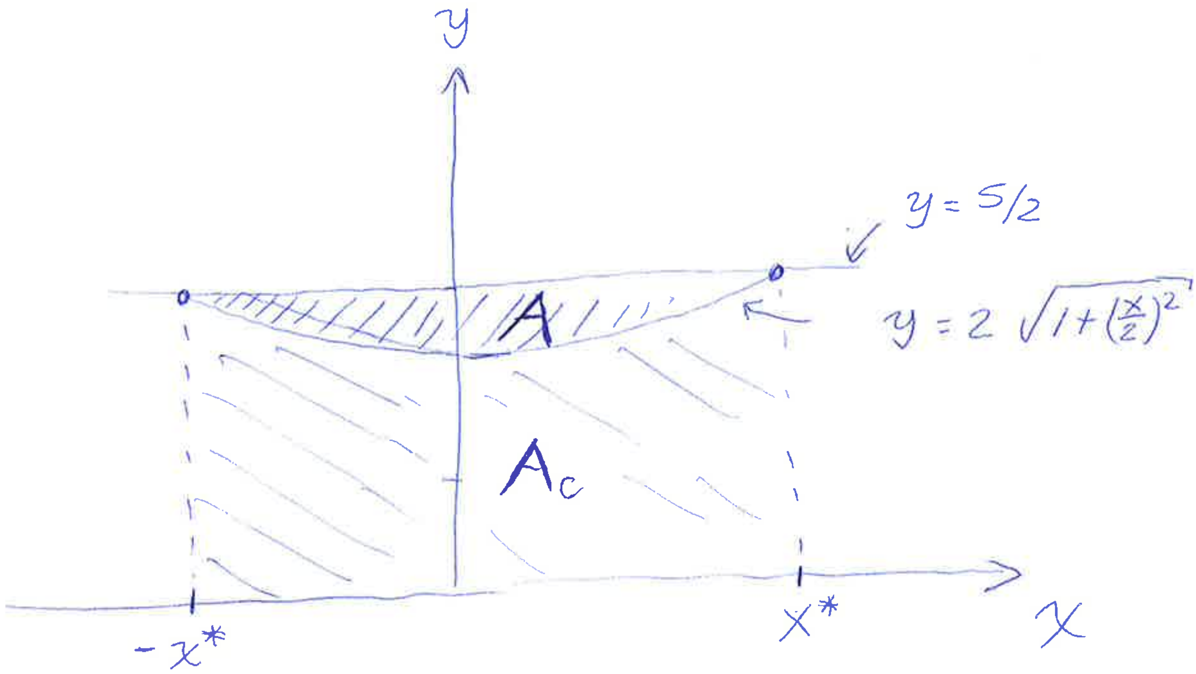
$$-x + y = \frac{2 \cdot 2}{x+y}$$

$$\underbrace{(-x+y)(x+y)}_{\text{Diferença de Quadrados}} = 4$$

$$y^2 - x^2 = 4$$

$$\boxed{\left(\frac{y}{2}\right)^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2 = 1}$$ Eq. de uma Hipérbole.





- Note que as duas funções são pares ; $y(-x) = y(x)$.
- A soma das áreas A e A_c é a área de um retângulo

$$A + A_c = A_{▭} = \cancel{2}x^* \cdot \frac{5}{\cancel{2}} = 5x^*$$

- Para encontrar x^* deve ser satisfeito o sistema

$$\begin{cases} y = 5/2 \\ y = 2\sqrt{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2} \end{cases}$$

ou

$$\frac{5}{2} = 2\sqrt{1+\left(\frac{x^*}{2}\right)^2}$$

$$\frac{5}{4} = \sqrt{1+\left(\frac{x^*}{2}\right)^2}$$

$$\frac{25}{16} = 1 + \left(\frac{x^*}{2}\right)^2$$

$$\frac{25}{16} - \frac{16}{16} = \frac{9}{16} = \left(\frac{x^*}{2}\right)^2$$

$$\frac{3}{\cancel{4}_2} = \frac{x^*}{\cancel{2}}$$

$$\boxed{x^* = \frac{3}{2}}$$

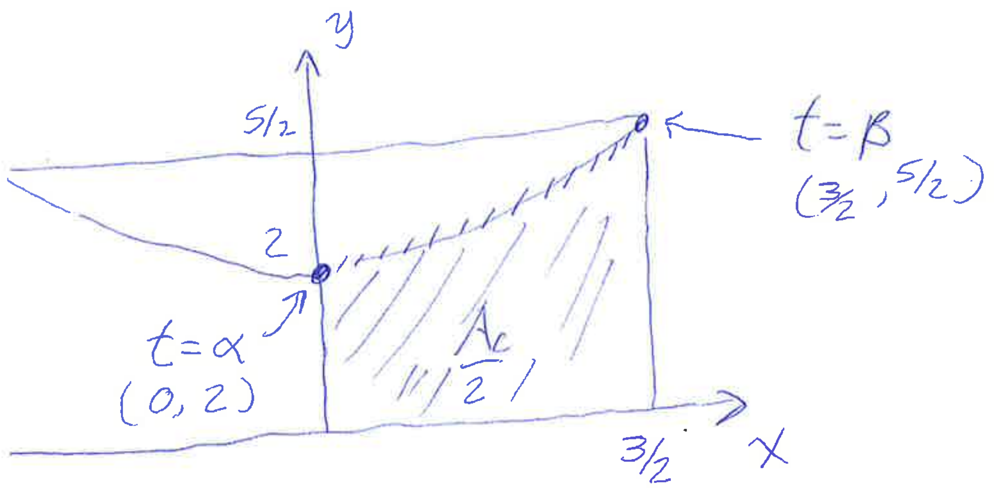
$$A_c = 2\int_0^{3/2} y(x)\,dx$$

$$A_c = 2\int_0^{3/2} 2\sqrt{1+\left(\tfrac{x}{2}\right)^2}\,dx$$

$$A_c = 4\int_0^{3/2} \sqrt{1+\left(\tfrac{x}{2}\right)^2}\,dx$$

Essa integral pode ser resolvida diretamente, mas é mais simples se for calculada de forma paramétrica.

$$\frac{A_c}{2} = \int_\alpha^\beta y(t)\,x'(t)\,dt$$



Quem é α?

$$\begin{cases} x(t) = t - \frac{1}{t} \\ y(t) = t + \frac{1}{t} \end{cases}$$

$t = \alpha \rightarrow (x,y) = (0,2)$

$$0 = \alpha - \frac{1}{\alpha}$$
$$+\quad 2 = \alpha + \frac{1}{\alpha}$$
$$2 = 2\alpha$$
$$\boxed{\alpha = 1}$$

5

- Quem é β?

$$\begin{cases} x(t) = t - \frac{1}{t} \\ y(t) = t + \frac{1}{t} \end{cases}$$

$$t = \beta \rightarrow (x, y) = \left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)$$

$$\frac{3}{2} = \beta - \frac{1}{\beta}$$

$$+ \quad \frac{5}{2} = \beta + \frac{1}{\beta}$$

$$\frac{3}{2} + \frac{5}{2} = \frac{8}{2} = 4 = 2\beta$$

$$\boxed{\beta = 2}$$

- Quem é $x'(t)$?

$$x'(t) = 1 - \frac{d}{dt}(t^{-1}) = 1 + \frac{1}{t^2}$$

Logo

$$\frac{A_c}{2} = \int_{\alpha}^{\beta} y(t)\, x'(t)\, dt = \int_1^2 \left(t + \frac{1}{t}\right)\left(1 + \frac{1}{t^2}\right) dt$$

$$\frac{A_c}{2} = \int_1^2 \left[t + \frac{1}{t} + \frac{1}{t} + \frac{1}{t^3}\right] dt = \int_1^2 \left(t + \frac{2}{t} + \frac{1}{t^3}\right) dt$$

$$\frac{A_c}{2} = \left(\frac{t^2}{2} + 2\ln(t) - \frac{1}{2}\frac{1}{t^2}\right)\Bigg|_1^2 = \left(2 + 2\ln(2) - \frac{1}{8}\right) - \left(\frac{1}{2} + 0 - \frac{1}{2}\right)$$

$$\frac{A_c}{2} = \frac{15}{8} + 2\ln(2)$$

$$A + A_c = A_{\square} = \cancel{2}x^* \cdot \frac{5}{\cancel{2}} = 5x^*$$

(6)

$$A + A_c = 5 \cdot \frac{3}{2}$$

$$A + A_c = \frac{15}{2}$$

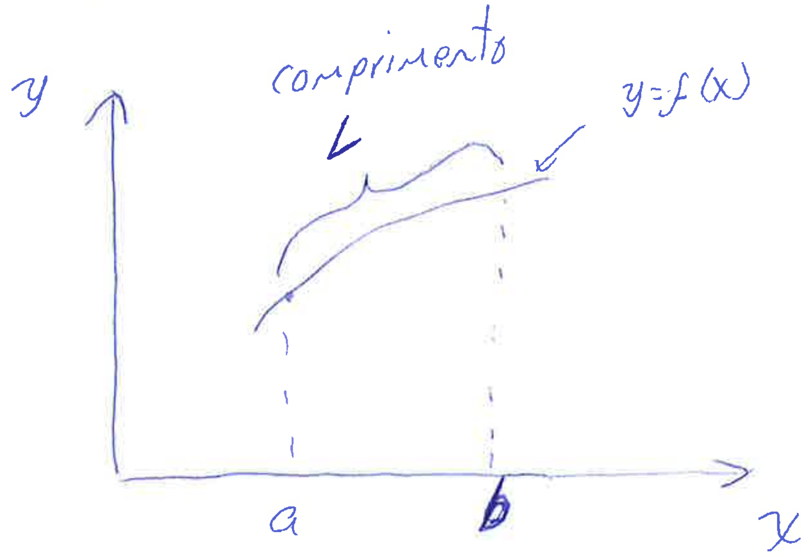
$$A = \frac{15}{2} - A_c$$

$$A = \underbrace{\frac{15}{2} - \frac{15}{4}} \cdot 4\ln(2)$$

$$\boxed{A = \frac{15}{2} - 4\ln(2)}$$

Comprimento de Arco

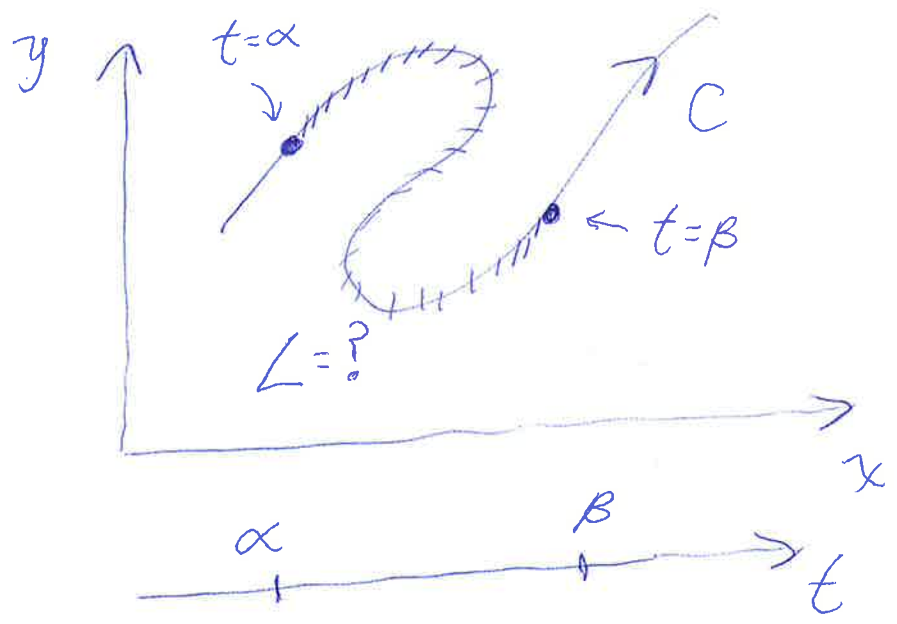
- Se $y = f(x)$ e $a \leq x \leq b$



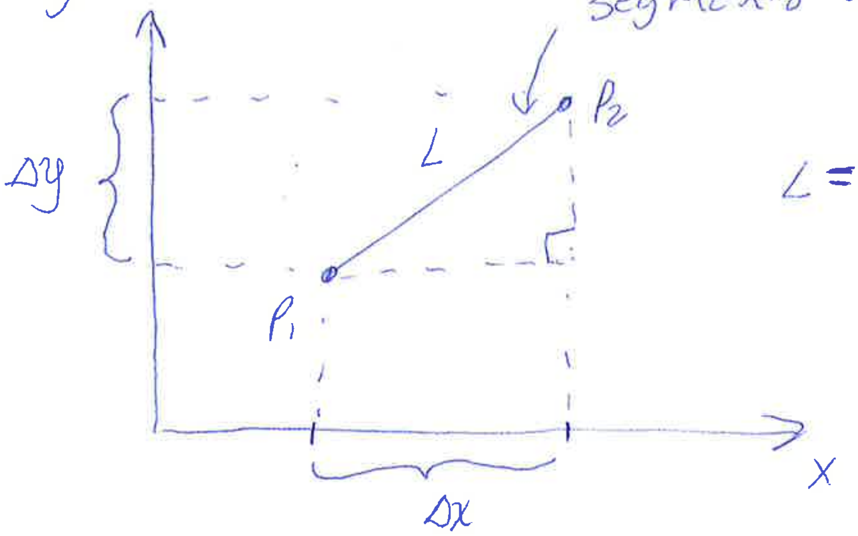
Do curso de Cálculo I sabemos que é $L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx$

- Queremos resolver o mesmo problema para uma curva paramétrica

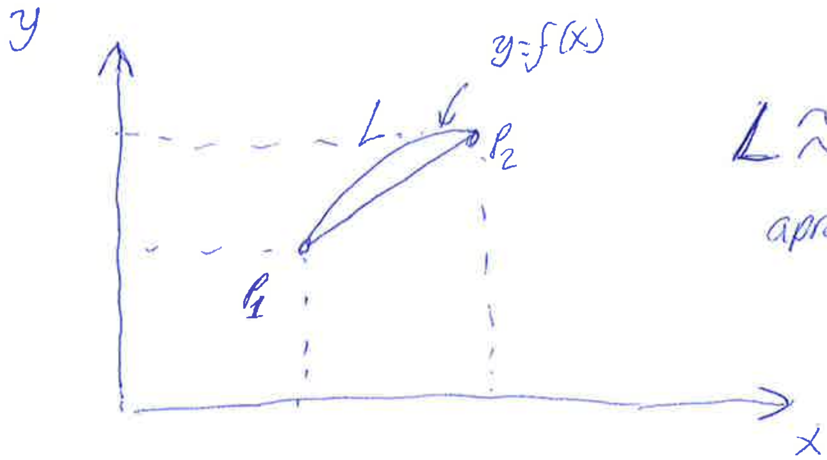
$$C = \begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases} \quad \alpha \leq t \leq \beta$$



Note que se $y(x) = mx + b$
segmento de reta



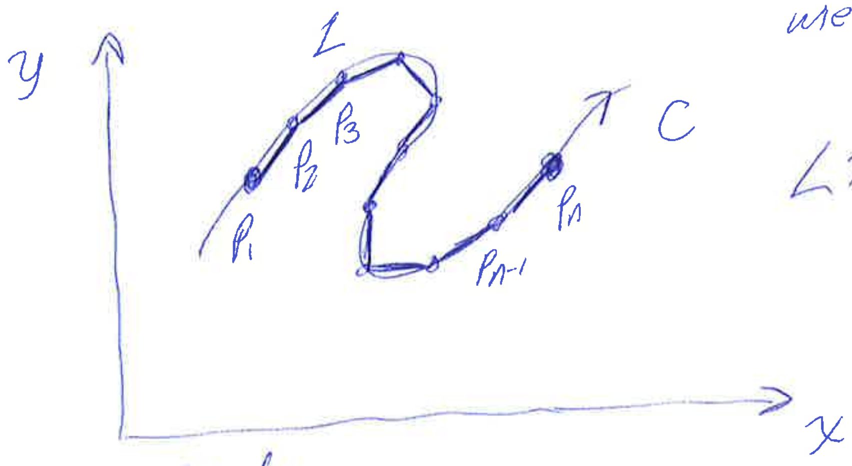
$$L = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = |\overrightarrow{P_1P_2}|$$



$$L \approx |\overrightarrow{P_1P_2}|$$

aproximadamente

melhor aproximação



$$L \approx \sum_{i=1}^{n-1} |\overrightarrow{P_iP_{i+1}}|$$

igualdade

$$L \doteq \lim_{n\to\infty} \left[\sum_{i=1}^{n-1} |\overrightarrow{P_iP_{i+1}}| \right] \quad (I).$$

- Subdividir a curva em um conjunto de segmentos de retas (pontos) equivale a subdividir o eixo do parâmetro:

$$\underset{\alpha}{t_1} \quad t_2 \quad t_3 \quad \dots \quad t_{n-1} \quad \underset{\beta}{t_n} \quad t$$

(3)

Como $C = \begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t). \end{cases}$

$$\frac{dx}{dt} = f'(t) \quad e \quad \frac{dy}{dt} = g'(t).$$

- Para cada intervalo $[t_i, t_{i+1}]$ pelo Teorema do Valor Médio existe um t_i^* tal que (dentro do mesmo intervalo)

$$\Delta x_i = f'(t_i^*)\,\Delta t_i$$

- Análogamente, existe t_i^{**} tal que

$$\Delta y_i = g'(t_i^{**})\,\Delta t_i$$

- Logo. $|\overrightarrow{P_i P_{i+1}}| = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2}$

$$= \sqrt{[f'(t_i^*)\,\Delta t_i]^2 + [g'(t_i^{**})\,\Delta t_i]^2}$$

$$\Delta L_i = |\overrightarrow{P_i P_{i+1}}| = \sqrt{[f'(t_i^*)]^2 + [g'(t_i^{**})]^2}\;\Delta t_i$$

Voltando em (I).

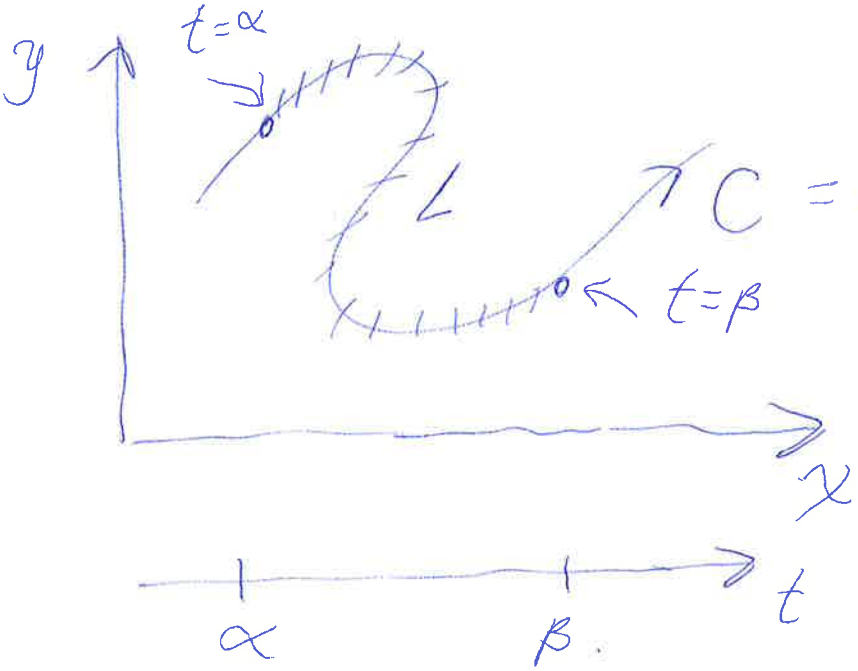
$$L = \lim_{n \to \infty} \left[\sum_{i=1}^{n-1} \sqrt{[f'(t_i^*)]^2 + [g'(t_i^{**})]^2}\;\Delta t_i \right]$$

Isso é parecido a uma soma de Riemann.
Quando o número de subintervalos (n) cresce $t_i^* \approx t_i^{**}$

e $\boxed{L = \int_\alpha^\beta \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2}\,dt}$

Equivalentemente

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\, dt$$



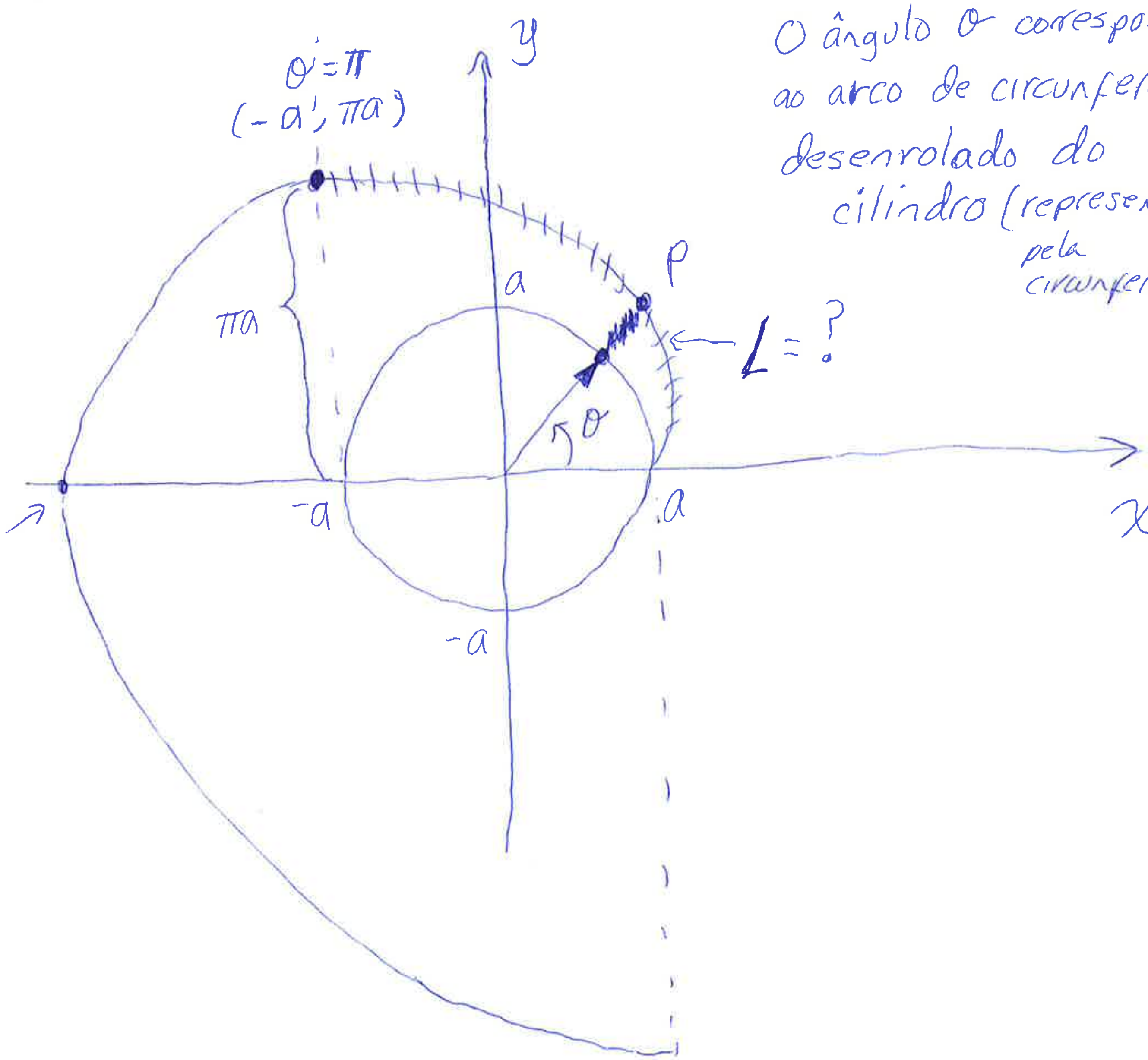
$$C = \begin{cases} x(t) \\ y(t) \end{cases} \quad \alpha \leq t \leq \beta$$

Exemplo de Cálculo de Comprimento Evolvente de uma Circunferência

Calcule o comprimento da curva

$$\begin{cases} x(\theta) = a[\cos(\theta) + \theta \operatorname{sen}(\theta)] \\ y(\theta) = a[\operatorname{sen}(\theta) - \theta\cos(\theta)] \\ \quad 0 \leq \theta \leq \pi \end{cases}$$

As duas primeiras equações representam a curva evolvente de uma circunferência de raio a.



O ângulo θ corresponde ao arco de circunferência desenrolado do cilindro (representado pela circunferência)

2

$$\boxed{L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[x'(\theta)]^2 + [y'(\theta)]^2}\, d\theta}$$

Fórmula para Calcular Comprimento de Arco de uma Curva Paramétrica

No nosso problema $\alpha = 0$ e $\beta = \pi$.
São os extremos do parâmetro: $0 \leq \theta \leq \pi$.

- Vamos calcular as derivadas: $x'(\theta)$ e $y'(\theta)$

$$x(\theta) = a[\cos(\theta) + \theta \operatorname{sen}(\theta)]$$

$$x'(\theta) = a[\cancel{-\operatorname{sen}(\theta)} + \cancel{\operatorname{sen}(\theta)} + \theta\cos(\theta)]$$

$$\boxed{x'(\theta) = a\theta\cos(\theta)}$$

$$y(\theta) = a[\operatorname{sen}(\theta) - \theta\cos(\theta)]$$

$$y'(\theta) = a[\cancel{\cos(\theta)} - \cancel{\cos(\theta)} + \theta \operatorname{sen}(\theta)]$$

$$\boxed{y'(\theta) = a\theta \operatorname{sen}(\theta)}$$

- Elevando ao quadrado

$$[x'(\theta)]^2 = (a\theta)^2\cos^2(\theta)$$

$$+\ [y'(\theta)] = (a\theta)^2 \operatorname{sen}^2(\theta)$$

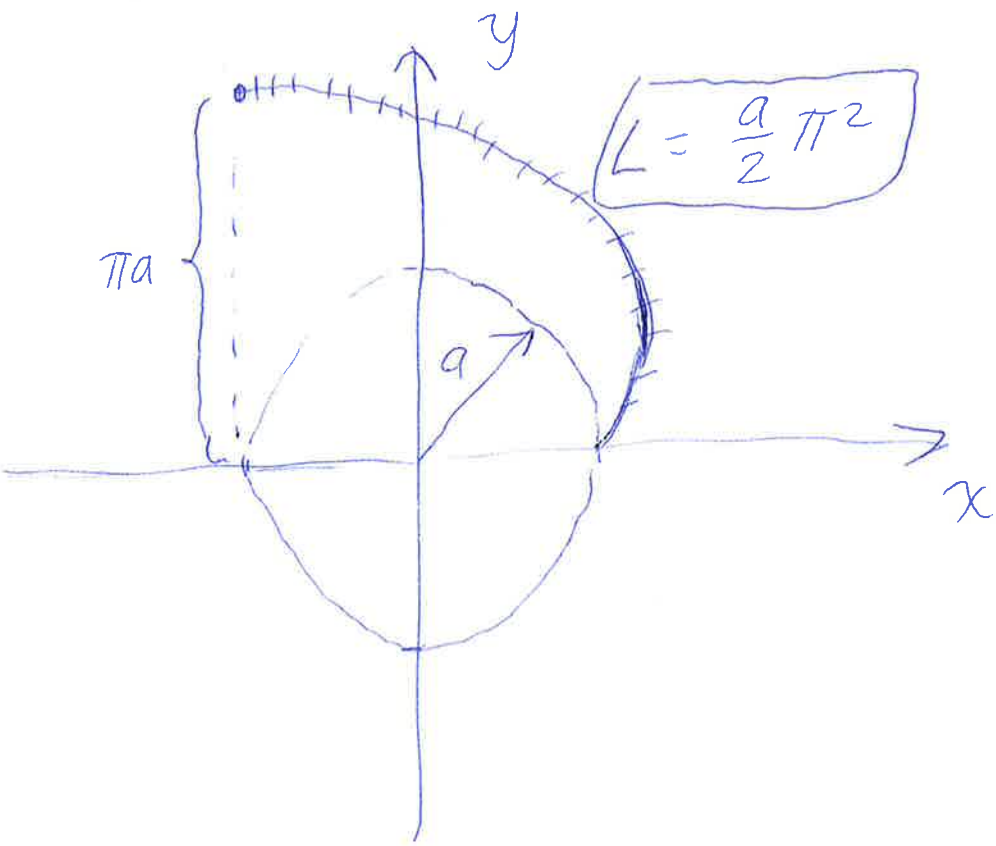
$$[x'(\theta)]^2 + [y'(\theta)]^2 = (a\theta)^2 \underbrace{[\cos^2(\theta) + \operatorname{sen}^2(\theta)]}_{1}$$

$$\sqrt{[x'(\theta)]^2 + [y'(\theta)]^2} = a\theta$$

Voltando na integral

$$L = \int_0^{\pi} a\theta \, d\theta = a\frac{\theta^2}{2}\Big|_0^{\pi}$$

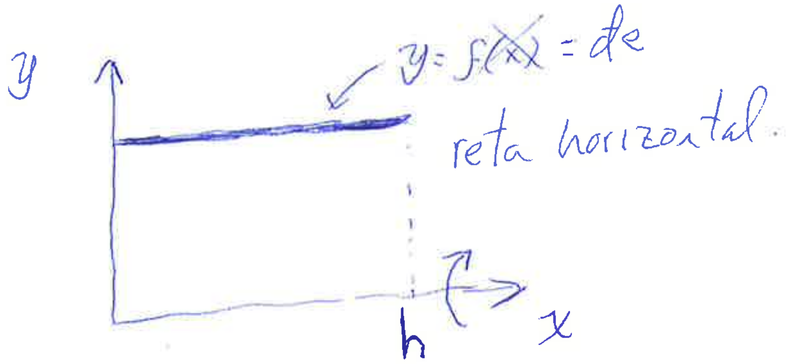
$$\boxed{L = \frac{a}{2}\pi^2}$$

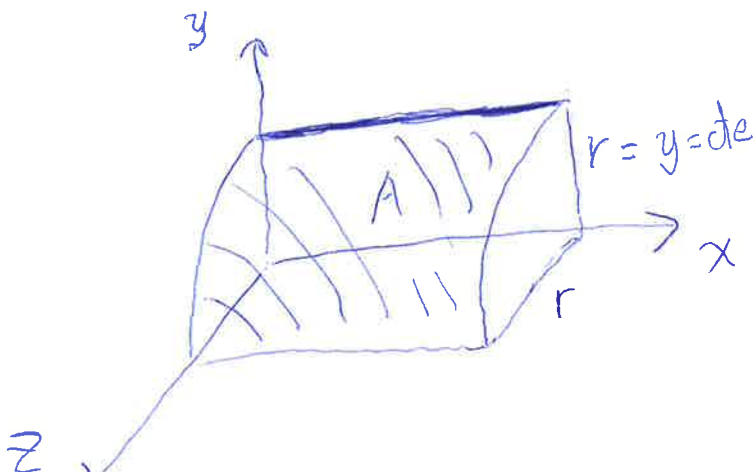


Área de uma Superfície de Revolução

- Uma superfície de revolução é formada quando uma curva é girada em torno de uma reta. Essa superfície determina um sólido de revolução.

- A superfície de revolução mais simples é a superfície lateral de um cilindro:

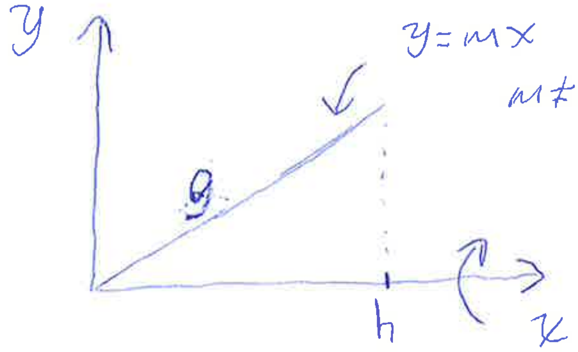


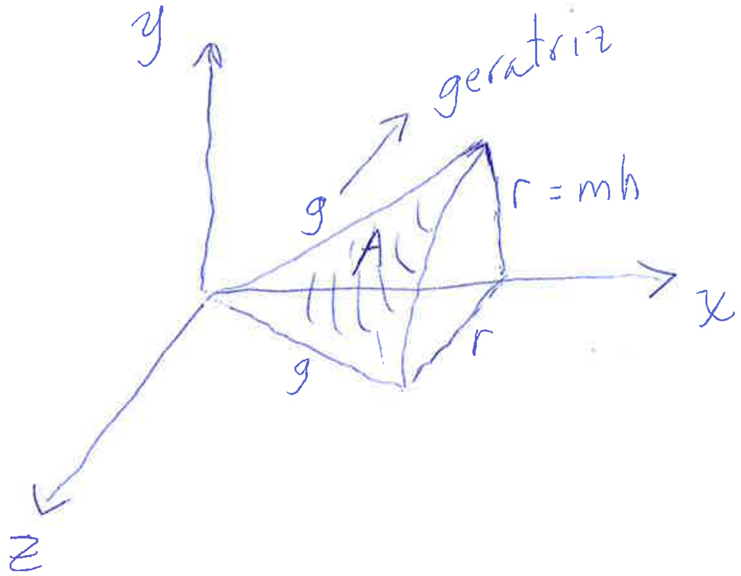


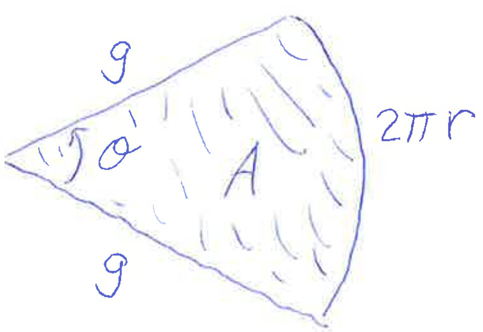
planificação

$$\boxed{A_{\text{cilindro}} = 2\pi y \cdot h}$$

- Uma segunda superfície de revolução simples é a superfície lateral de um cone. ②







Planificação

Setor Circular

de raio g.

Em radianos

$$\theta = \frac{2\pi r}{g} = \frac{\text{comprimento de arco}}{\text{raio}}$$

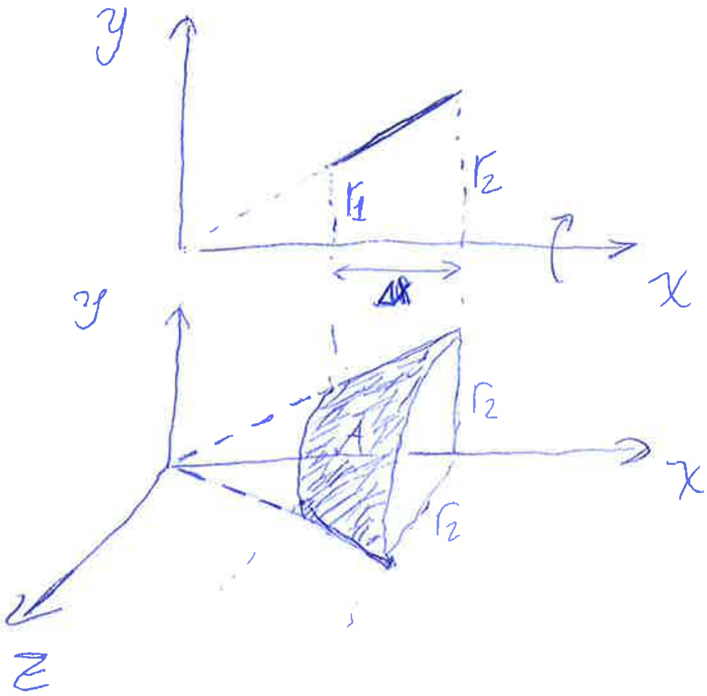
Área do Setor Circular  $\Rightarrow A = \frac{1}{2}\beta R^2$

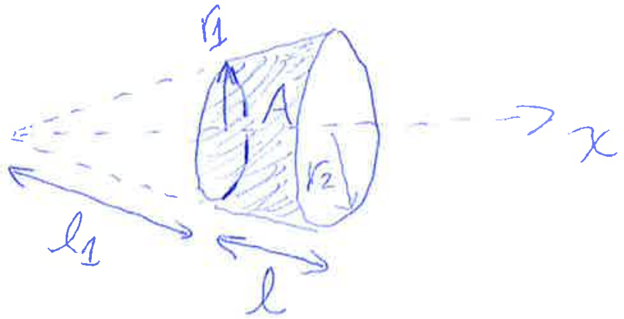
Logo.

$$A_{cone} = \frac{1}{\cancel{2}} \frac{\cancel{2}\pi r}{\cancel{g}} \cdot g^2$$

$$\boxed{A_{cone} = \pi \cdot r \cdot g}$$

- Mas precisamos calcular a área lateral de um troco de cone.





$A_{TC} =$

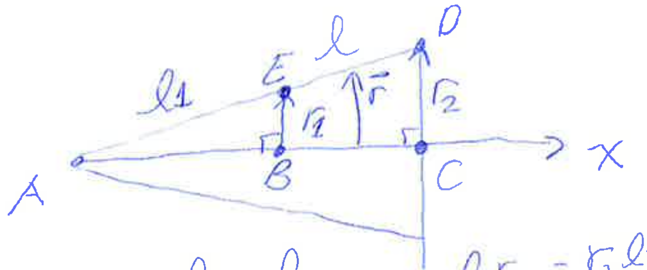
$$A_{TC} = \pi r_2 (\underbrace{l + l_1}_{g}) - \pi r_1 \cdot l_1$$

$$A_{TC} = \pi r_2 l + \pi r_2 l_1 - \pi r_1 l_1$$

$$\text{(I)} \quad \boxed{A_{TC} = \pi r_2 l + \pi l_1 (r_2 - r_1)}$$

Planificação de um troco de cone

Usando a semelhança dos triângulos ACD e ABE



$$\frac{l_1}{r_1} = \frac{l_1 + l}{r_2} \Rightarrow l_1 r_2 = r_1 l_1 + r_1 l$$

$$\text{(II)} \quad l_1 (r_2 - r_1) = r_1 l$$

Colocando (II) em (I).

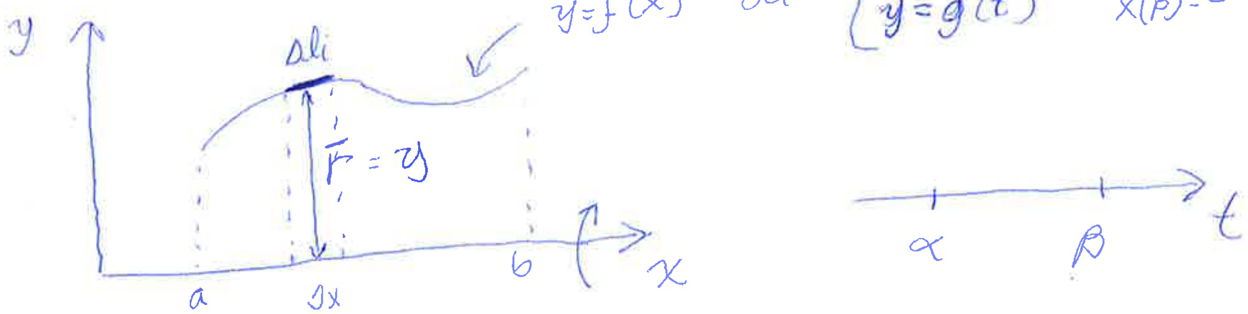
$$A_{TC} = \pi r_2 l + \pi r_1 l$$

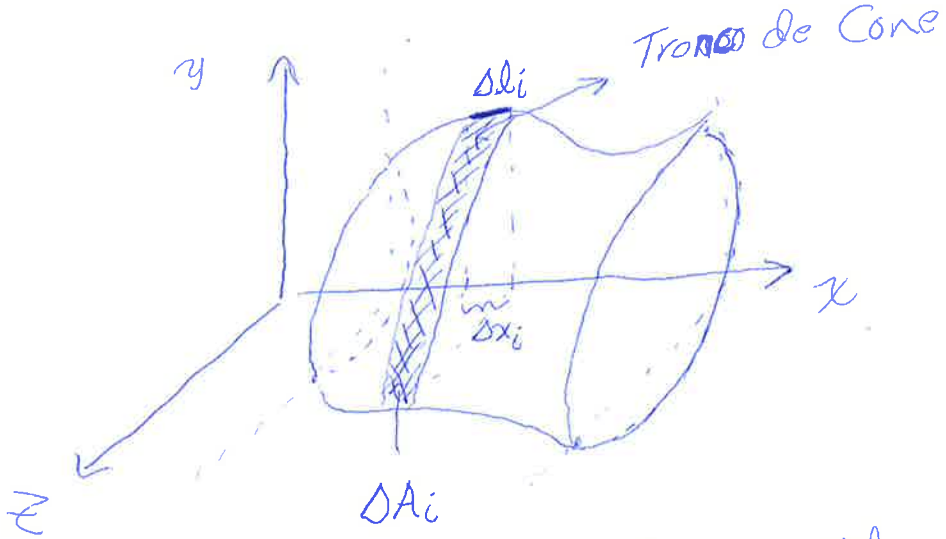
$$A_{TC} = \pi l (r_2 + r_1)$$

$$\boxed{A_{TC} = 2\pi l \left(\frac{r_2 + r_1}{2}\right) = 2\pi l \bar{r}}$$

Agora vamos considerar uma curva mais complicada

$y = f(x)$ ou $\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$ $\begin{matrix} x(\alpha) = a \\ x(\beta) = b \end{matrix}$





$$A \approx \sum_{i=1}^{n} \Delta A_i = \sum_{i=1}^{n} 2\pi y \, \Delta l.$$

$$A = \lim_{n \to \infty} \left[\sum_{i=1}^{n} 2\pi y \, \Delta l \right] \leftarrow \text{Soma de Riemann}$$

Se $\boxed{y(x)} \Rightarrow \boxed{dl = \sqrt{1 + [y'(x)]^2}\, dx}$

$$A_{x} = \int_a^b 2\pi y(x) \sqrt{1 + [y'(x)]^2}\, dx$$

Se $\begin{cases} x(t) \\ y(t) \end{cases} \quad \alpha \leq t \leq \beta \rightarrow d\ell = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\, dt$ (5)

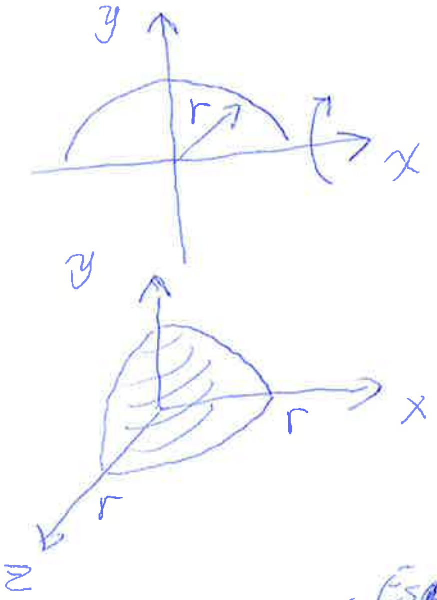
$$A_{\circlearrowleft x} = \int_{\alpha}^{\beta} 2\pi y(t) \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\, dt$$

A fórmula é análoga caso a rotação da curva aconteça ao redor do eixo y.

$$A_{\circlearrowleft y} = \int_{\alpha}^{\beta} 2\pi x(t) \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\, dt$$

Exemplo de Cálculo de Área de Revolução

1) Calcule a área de revolução de uma semicircunferência de raio r e centrada na origem.



Esfera

Encontramos uma parametrização para a semicircunferência

$$\begin{cases} x(\theta) = r\cos(\theta) \\ y(\theta) = r\,\text{sen}(\theta) \end{cases} \quad 0 \leq \theta \leq \pi$$

$$\boxed{A_{\circlearrowleft x} = \int_{\alpha}^{\beta} 2\pi y(\theta)\sqrt{[x'(\theta)]^2 + [y'(\theta)]^2}\, d\theta}$$

Fórmula para Encontrar a área de uma superfície paramétrica de revolução

$$A_{\substack{\text{esfera}\\(\circlearrowleft x)}} = \int_0^{\pi} 2\pi r\,\text{sen}(\theta) \underbrace{\sqrt{[-r\,\text{sen}(\theta)]^2 + [r\cos(\theta)]^2}}_{r}\, d\theta$$

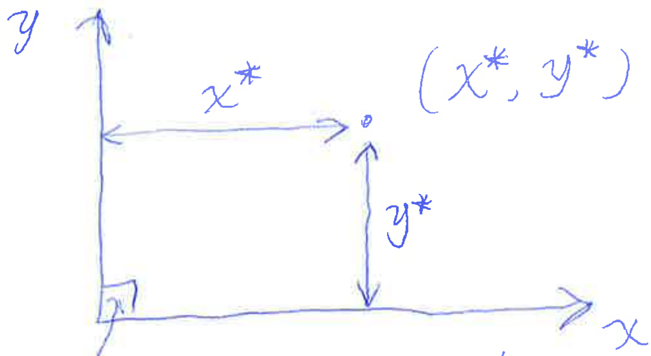
$$A_{\text{esfera}} = 2\pi \int_0^{\pi} r^2 \text{sen}(\theta)\, d\theta = 2\pi r^2 \int_0^{\pi} \text{sen}(\theta)\, d\theta$$

$$A_{\text{esfera}} = 2\pi r^2 [-\cos(\theta)]\Big|_0^{\pi} = -2\pi r^2 \underbrace{[\underbrace{\cos(\pi)}_{-1} - \underbrace{\cos(0)}_{1}]}_{-2}$$

$$\boxed{A_{\text{esfera}} = 4\pi r^2}$$

Coordenadas Polares

Coordenadas Cartesianas

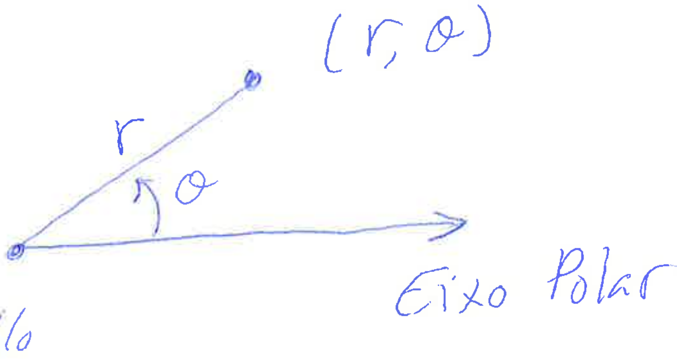


eixos perpendiculares.

$x^* \rightarrow$ distância do ponto ao eixo y

$y^* \rightarrow$ distância do ponto ao eixo x.

Coordenadas Polares.

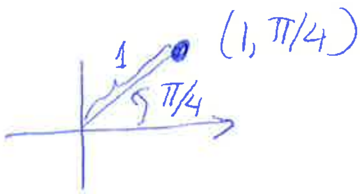


$r \rightarrow$ distância do pólo ao ponto

θ - ângulo com o eixo polar

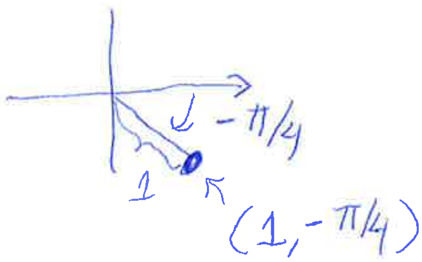
- Se θ é positivo $(\theta > 0)$ o ângulo é medido em sentido antihorário

  Ex. Ponto $(1, \pi/4) \longrightarrow$



- Se θ é negativo $(\theta < 0)$ o ângulo é medido em sentido horário

  Ex. Ponto $(1, -\pi/4) \longrightarrow$



②

- Os ângulos devem ser escritos sempre em radianos.

$$\theta(rad) \longrightarrow \pi$$
$$\theta(°) \longrightarrow 180°$$

$$\boxed{\theta(rad) = \frac{\theta(°)}{180°} \cdot \pi}$$

Ex. Quanto é 60° em radianos?

$$\theta(rad) = \frac{60°}{180°}\pi = \frac{\pi}{3}$$

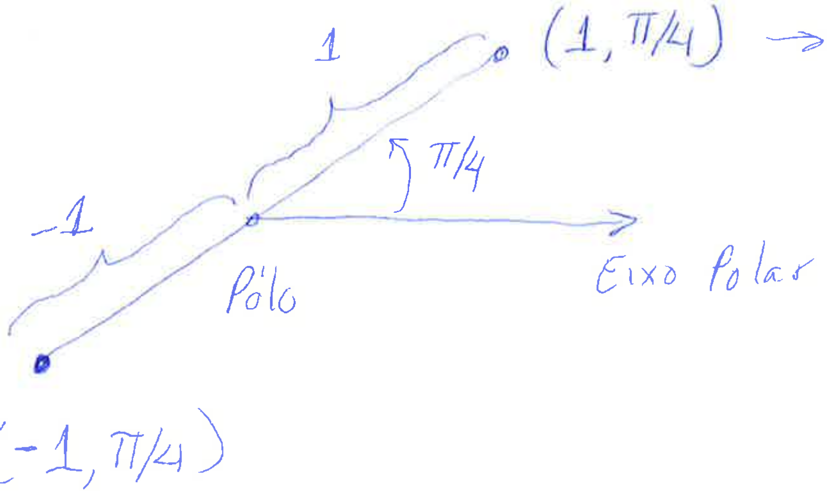
- Se $\theta > 2\pi$ reduza o mesmo para um valor entre 0 e 2π.

Ex. Ponto $(1, \frac{7\pi}{3}) = (1, \pi/3)$.

$$\frac{7\pi}{3} - \underbrace{2\pi}_{\text{uma volta}} = \frac{7\pi}{3} - \left(\frac{3}{3}\right)^{1} \cdot 2\pi = \frac{7\pi}{3} - \frac{6\pi}{3} = \frac{\pi}{3}$$

- O Pólo é representado com $\boxed{r=0}$ para qualquer valor de θ: $(0, 7\pi/15) = (0, 99\pi/44) =$ Pólo

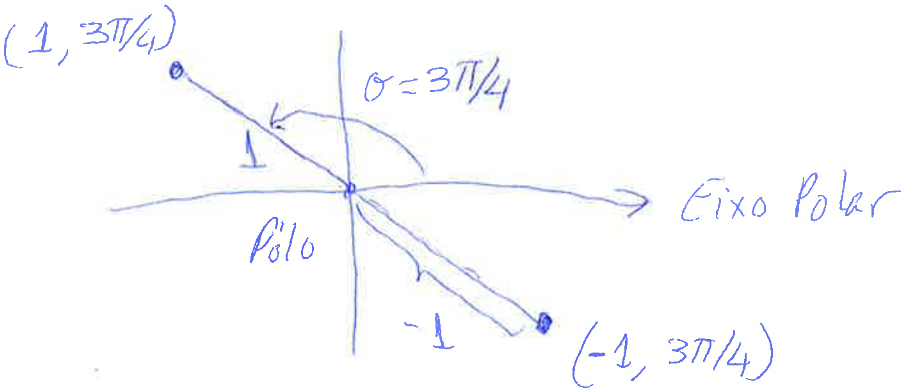
- Vamos considerar que r pode ser positivo ou negativo.
  - Se $r > 0$ o ponto está no mesmo quadrante que o ângulo θ
  - Se $r < 0$ o ponto está no quadrante oposto (diagonalmente) ao ângulo θ.



$\rightarrow$ Ângulo e Ponto no Primeiro Quadrante

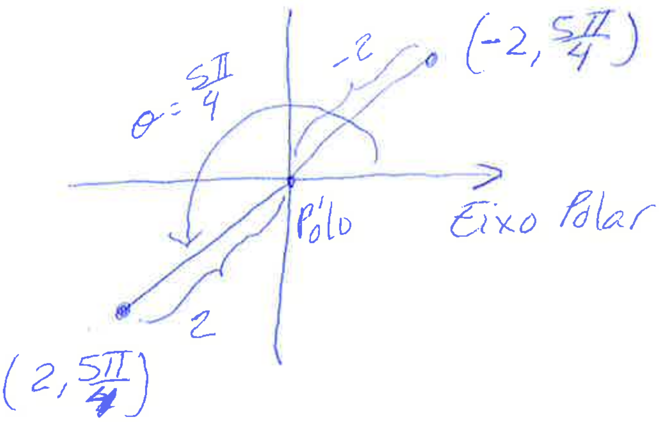
$\uparrow$

$r<0 \rightarrow$ Ângulo do Primeiro Quadrante
Ponto do Terceiro ″



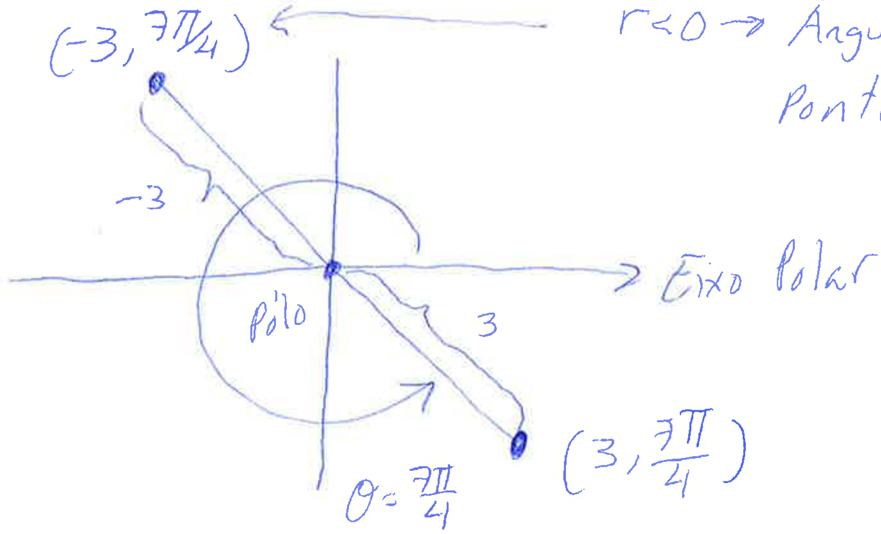
$\uparrow$

$r<0 \rightarrow$ Ângulo do Segundo Quadrante
Ponto do Quarto ″

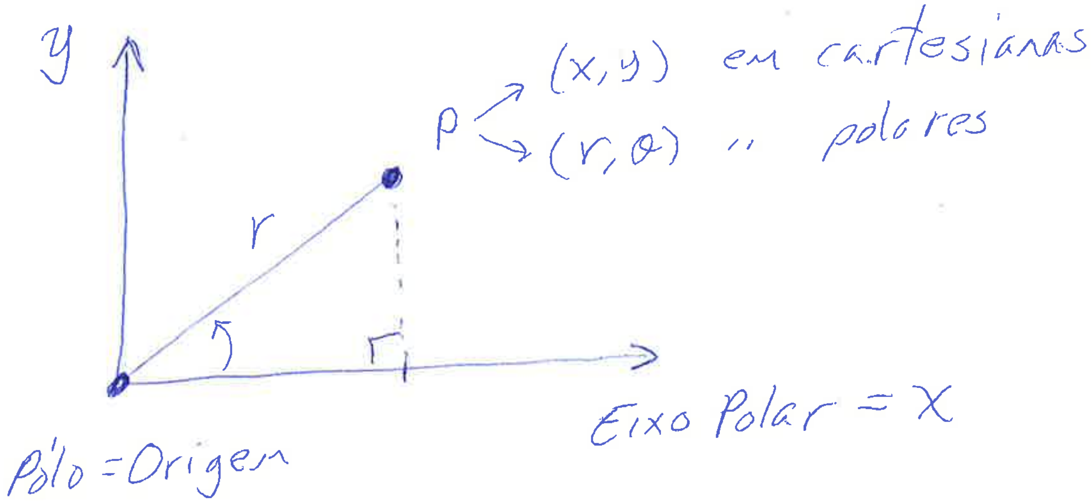


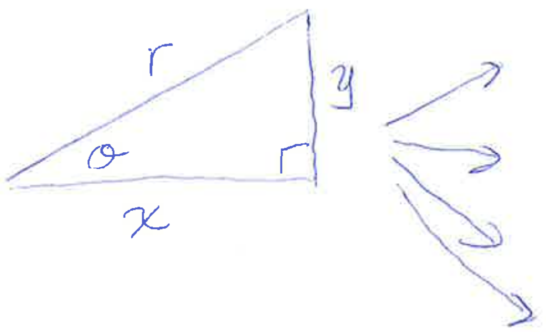
$\leftarrow r<0$
Ângulo do Terceiro Quadrante
Ponto do Primeiro ″

$r<0 \rightarrow$ Ângulo do 4to quadrante (4)
Ponto do 2do "



Relação entre Cartesianas e Polares





$\cos(\theta) = \frac{x}{r}$ — Definição de cosseno e seno.

$\text{sen}(\theta) = \frac{y}{r}$

$r^2 = x^2 + y^2$ ← Teorema de Pitágoras

$\tan(\theta) = \frac{\text{sen}(\theta)}{\cos(\theta)} = \frac{y}{x}$

Cartesianas ← Polares

$$\begin{cases} x(r,\theta) = r\cos(\theta) \\ y(r,\theta) = r\,\text{sen}(\theta) \end{cases}$$

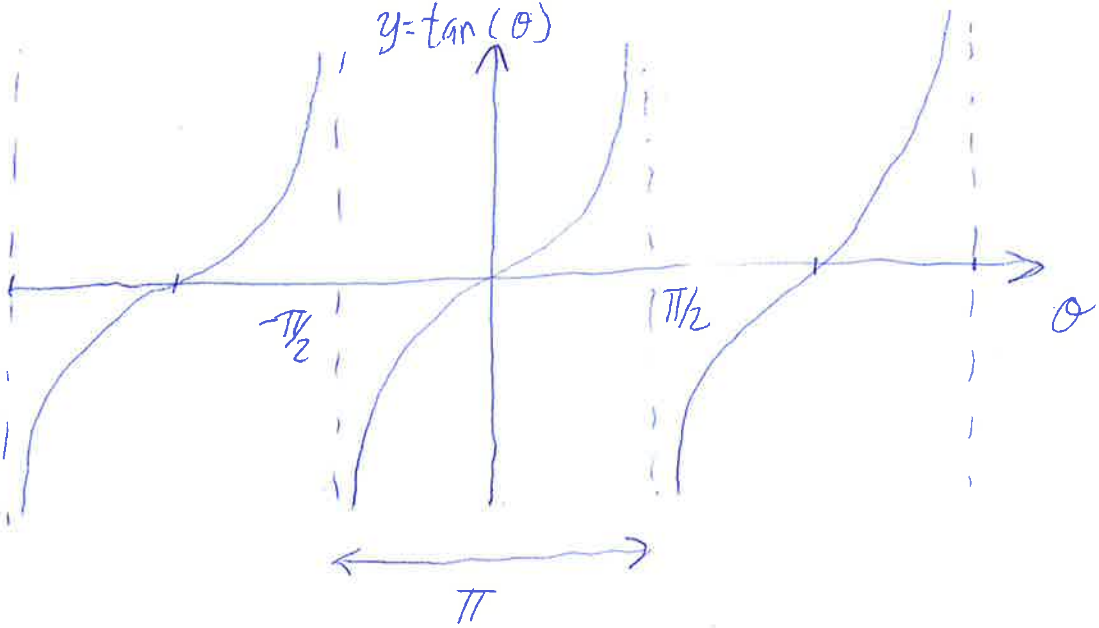
Transformação não linear, mas única (solução única).

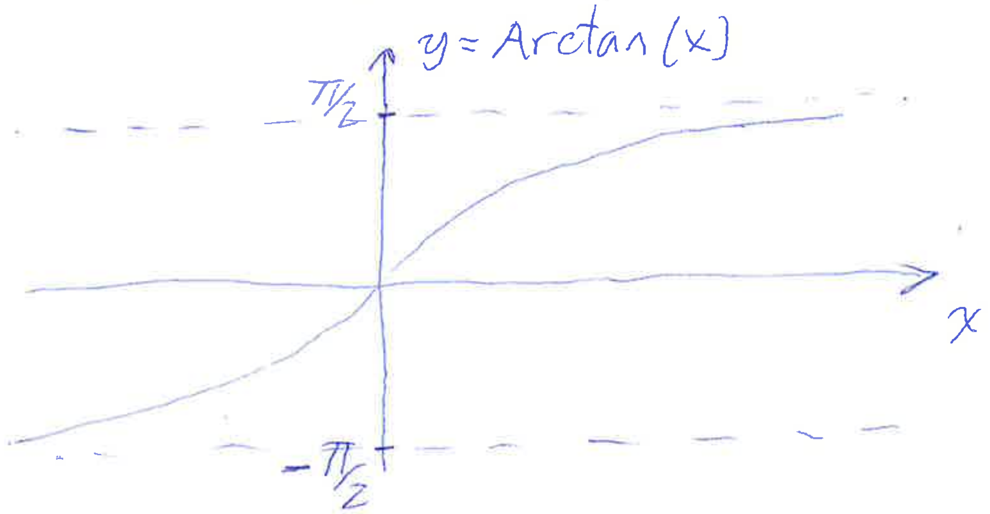
Polares ← Cartesianas

$$\begin{cases} r(x,y) = \pm\sqrt{x^2+y^2} \\ \theta(x,y) = \text{Arctan}\left(\frac{y}{x}\right) \end{cases}$$

Transformação não linear e <u>não</u> é única

Note que a periodicidade da função tan(x) e π e não 2π. Logo, em uma volta na circunferência existem dois ângulos com o mesmo valor de tangente.





Exemplo: Converta o ponto $(-1, 1)$ de Cartesianas a Polares.

Polares $\longleftarrow$ Cartesianas

$$\begin{cases} r(x,y) = \pm\sqrt{x^2+y^2} & \longrightarrow \quad r(-1,1) = \sqrt{(-1)^2+1^2} = \pm\sqrt{2} \\ \theta(x,y) = \text{Arctan}\left(\frac{y}{x}\right) & \longrightarrow \quad \underbrace{\theta(-1,1) = \text{Arctan}\left(\frac{1}{-1}\right)}_{\text{ou } \tan(\theta) = -1\ ?} \end{cases}$$

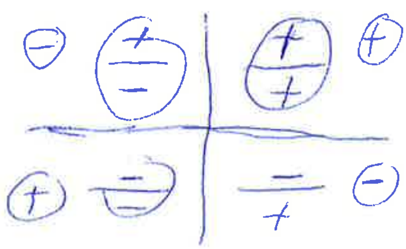
$$\tan(\theta) = \frac{\text{sen}(\theta)}{\cos(\theta)} = 1$$

$$\Downarrow$$

$$\text{sen}(\theta) = \cos(\theta)$$

$$\Downarrow$$

$45°$ ou $\pi/4$



tan(θ) é negativa no II e IV quadrantes.

3

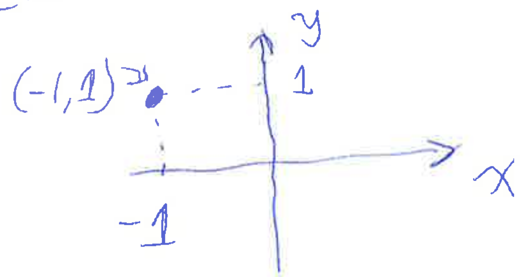
Logo θ é o equivalente a $\pi/4$ no segundo e no quarto quadrantes:

$$\theta_1 = 3\pi/4 \quad e \quad \theta_2 = \frac{7\pi}{4}$$

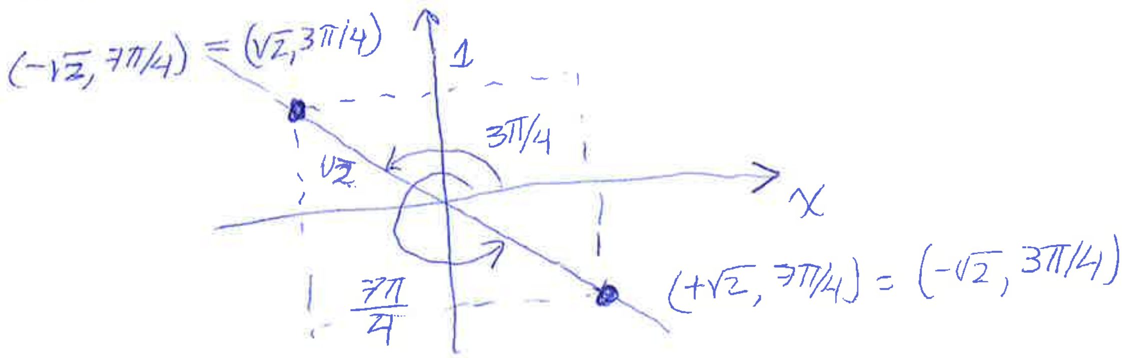
Como $r_1 = +\sqrt{2}$ e $r_2 = -\sqrt{2}$, temos quatro possibilidades

① $(+\sqrt{2}, 3\pi/4)$ ② $(+\sqrt{2}, \frac{7\pi}{4})$ ③ $(-\sqrt{2}, 3\pi/4)$ ④ $(-\sqrt{2}, 7\pi/4)$

Em cartesianas sabemos a posição do ponto



Em Polares esboçamos os quatro resultados



Cartesiana		Polares
$(-1, 1)$	$\rightarrow$	$(-\sqrt{2}, 7\pi/4)$
	$\rightarrow$	$(+\sqrt{2}, 3\pi/4)$

Solução

Exemplo: Converta o ponto $(1, \pi/6)$ de polares para cartesianas. 4

Cartesianas $\leftarrow$ Polares

$$x(r,\theta) = r\cos(\theta) \longrightarrow x(1,\pi/6) = 1\cos(\pi/6) = \sqrt{3}/2$$

$$y(r,\theta) = r\,\text{sen}(\theta) \longrightarrow y(1,\pi/6) = 1\,\text{sen}(\pi/6) = 1/2$$

Logo, Polares $\qquad$ Cartesianas

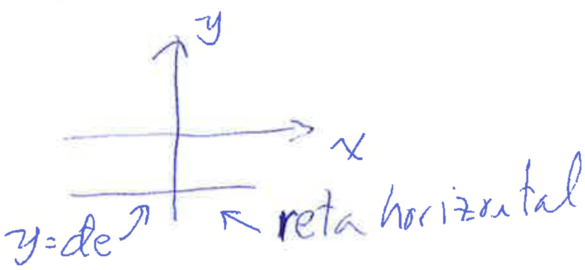
$$(1, \pi/6) \longrightarrow \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

Gráficos de Equações Polares

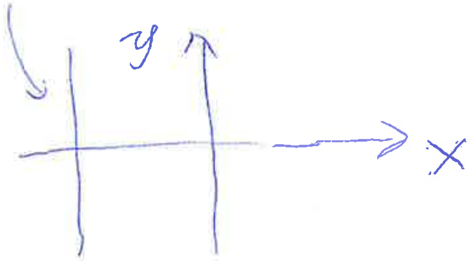
- Em Cartesianas temos dois tipos de funções:

$y = f(x)$ ou $x = g(y)$

caso mais simples → $y = cte$

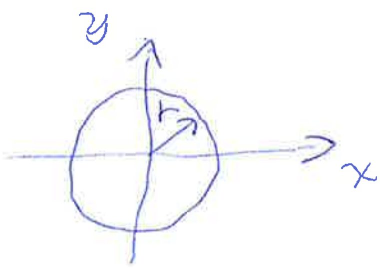


caso mais simples → $x = cte$ (reta vertical)

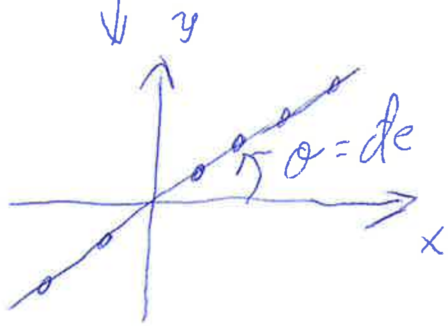


- Em Polares teremos dois tipos de funções também: $r = f(\theta)$ ou $\theta = g(r)$

caso mais simples → $r = cte$ (circunferência centrada no Pólo)



caso mais simples → $\theta = cte$ (reta que passa pelo Pólo)



Exercício: Esboce a curva com equação

$r(\theta) = -3\cos(\theta)$.

Sol.: Gráfico Auxiliar (Fictício)

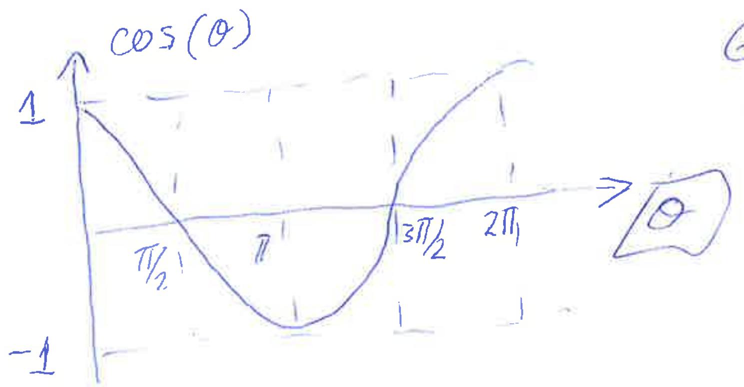


Gráfico Cartesiano com θ

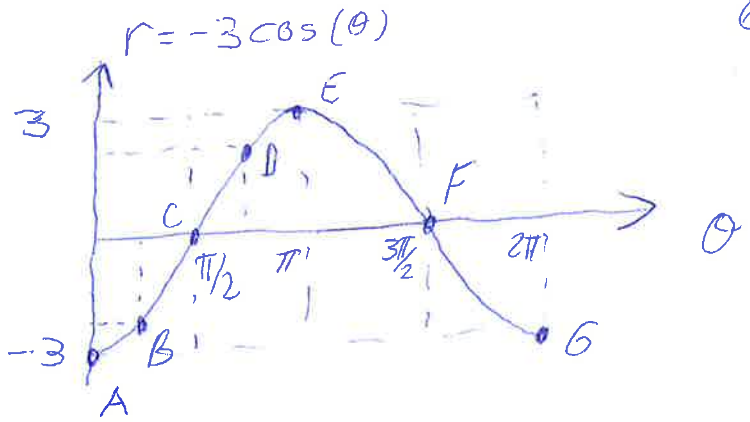


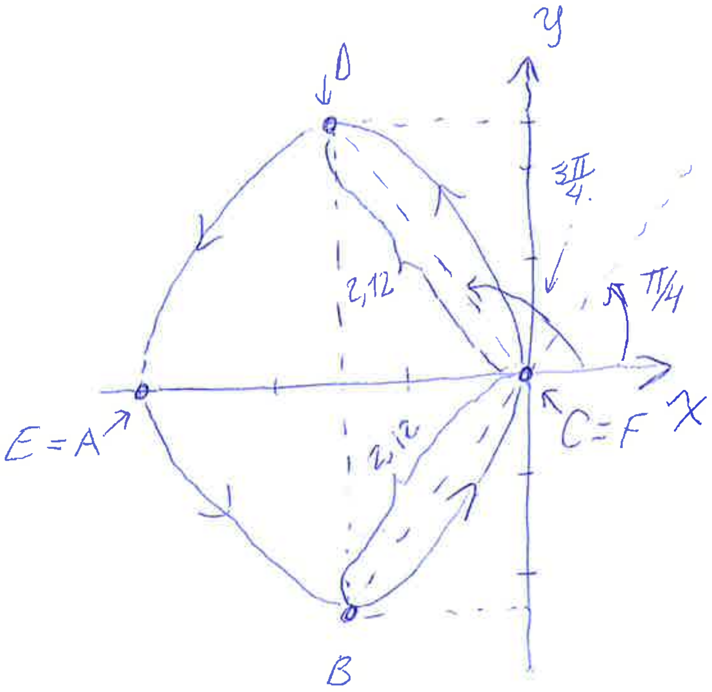
Gráfico Cartesiano com r v.s. θ (Fictício).

Tabela de "Força Bruta"

	θ	r
A	0	-3
B	$\pi/4$	$-3\frac{\sqrt{2}}{2} \approx -2{,}12$
C	$\pi/2$	0
D	$3\pi/4$	$3\frac{\sqrt{2}}{2} \approx 2{,}12$
E	π	3
F	$3\pi/2$	0
G	2π	-3

primeira volta

segunda volta



③

Neste caso é possível tranformar a curva de polares a uma equação cartesiana simples de interpretar. Isso raramente é possível.

$$r = f(\theta) \longrightarrow \begin{cases} f(x,y) = 0 \\ \text{ou} \\ y = f(x) \\ \text{ou} \\ x = g(y) \end{cases}$$

Ferramentas

$x = r\cos(\theta)$

$y = r\,\text{sen}(\theta)$

$r^2 = x^2 + y^2$

$\tan(\theta) = y/x$

$$r = -3\cos(\theta)$$

mas $x = r\cos(\theta) \rightarrow \cos(\theta) = \frac{x}{r}$

$$r = -3\,\frac{x}{r}$$

$$r^2 = -3x$$

mas $r^2 = x^2 + y^2$

$$\boxed{x^2 + y^2 = -3x} \leftarrow \text{Eq. do tipo } f(x,y) = 0.$$

$$\boxed{x^2 + y^2 + 3x = 0}$$

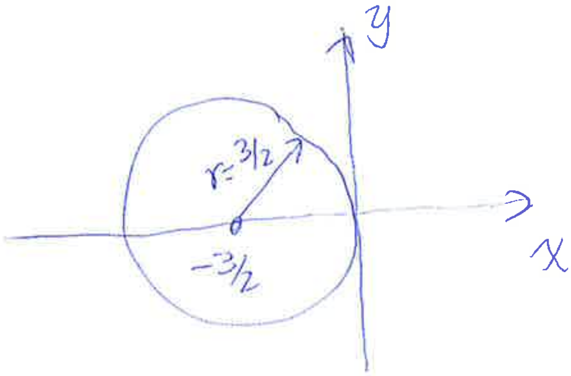
Vamos Completar quadrados em x

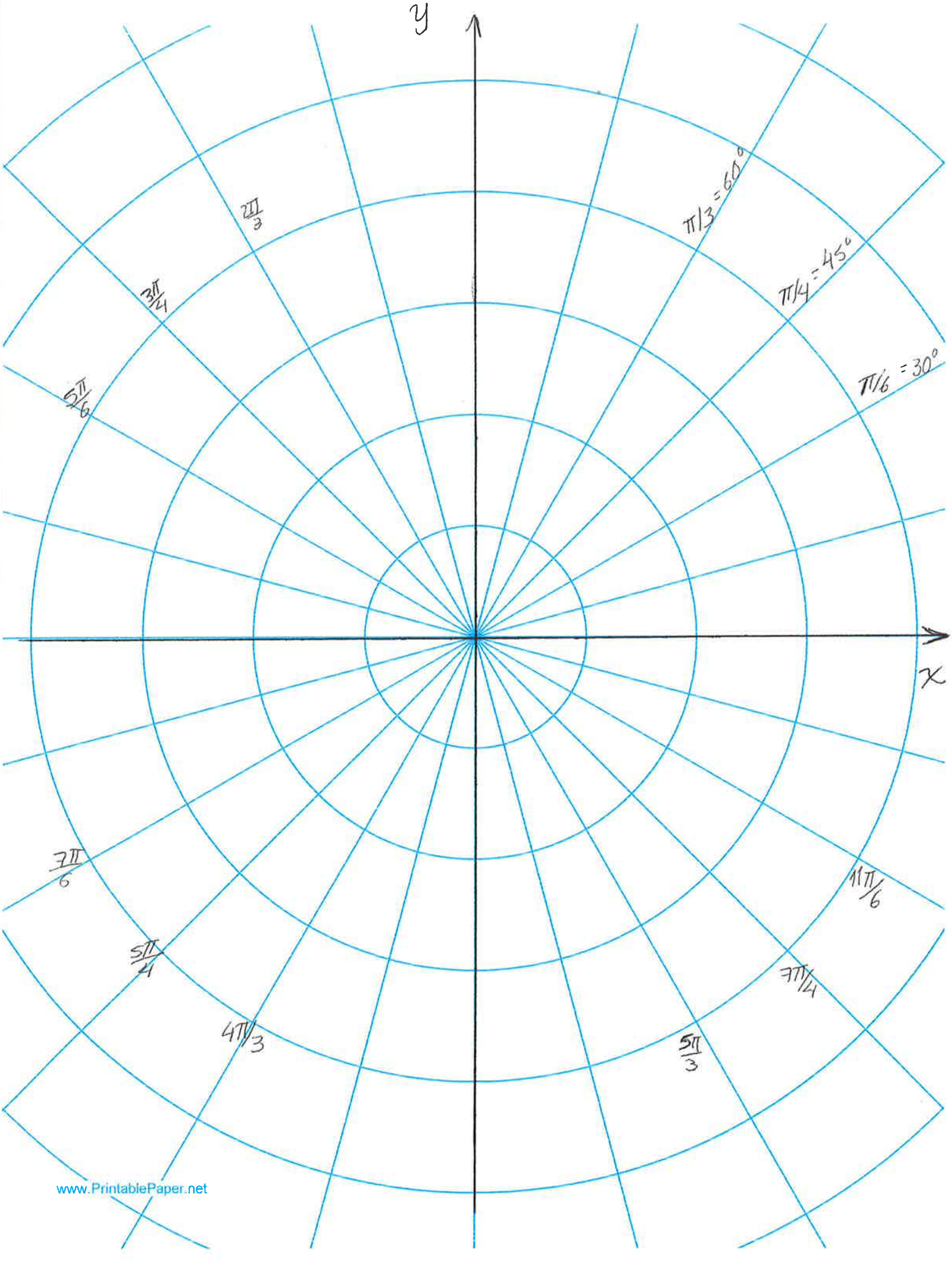
$$\overbrace{x^2 + 3x + \left(\tfrac{3}{2}\right)^2}\underbrace{\vphantom{\left(\tfrac{3}{2}\right)^2}\ - \left(\tfrac{3}{2}\right)^2}_{0} + y^2 = 0$$

$$\left(x+\frac{3}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2$$

4

Circunferência com centro em $\left(-\frac{3}{2}, 0\right)$ e raio $\frac{3}{2}$

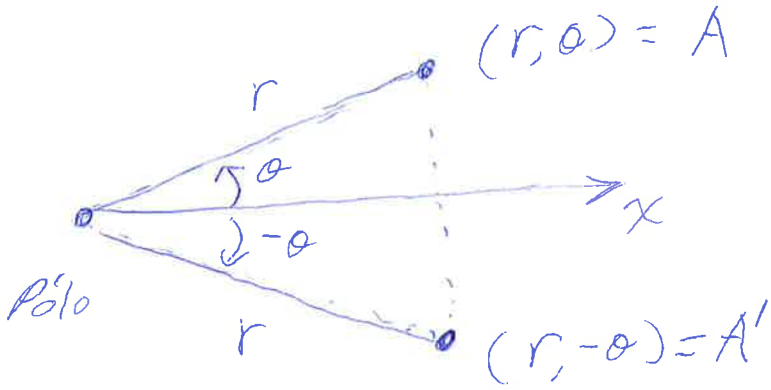



y
x
π/3 = 60°
π/4 = 45°
π/6 = 30°
2π/3
3π/4
5π/6
7π/6
5π/4
4π/3
5π/3
7π/4
11π/6

Simetrias em Curvas Polares

Vamos estudar três tipos

① Simetria respeito ao eixo polar (eixo x).



A' é o simétrico de A respeito ao eixo X.

Se na troca de $\boxed{\theta}$ por $\boxed{-\theta}$ não muda $r(\theta)$:

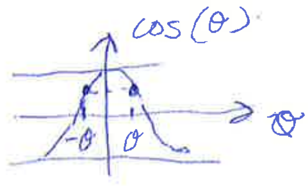
$$r(-\theta) = r(\theta)$$

$\Downarrow$ então

Existe simetria em relação ao eixo X.

Ex. $r(\theta) = \cos(\theta)$

troco $\theta \to -\theta$ em $r(\theta)$



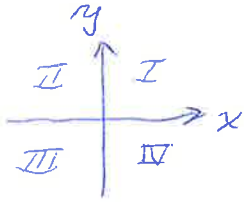
$$r(-\theta) = \underbrace{\cos(-\theta) = \cos(\theta)}_{\text{função par}}$$

$$r(-\theta) = r(\theta)$$

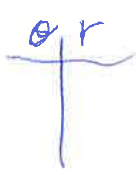
$\Downarrow$

Existe simetria em relação ao eixo X

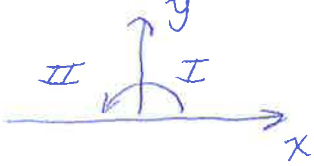
Logo, não estudo



para

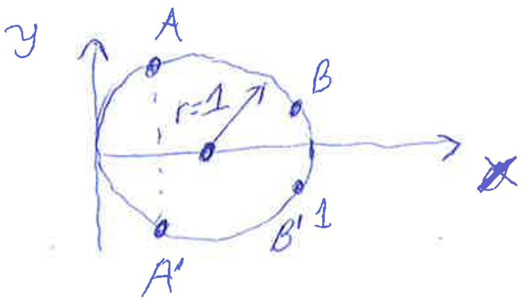


$0 \leq \theta \leq 2\pi$

Estudo somente  $0 \leq \theta \leq \pi$

Os outros dois quadrantes esboço por simetria.

$r(\theta) = \cos(\theta)$



Exemplos de
Pares Simétricos: A e A'
B e B'

Ex.: $r(\theta) = \cos(2\theta)$

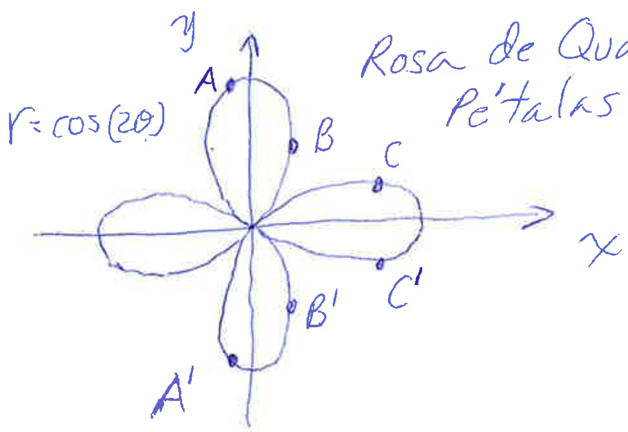
troco $\theta \to -\theta$ em $r(\theta)$

$r(-\theta) = \underbrace{\cos(2(-\theta)) = \cos(2\theta)}_{\text{par}}$

$r(-\theta) = r(\theta)$

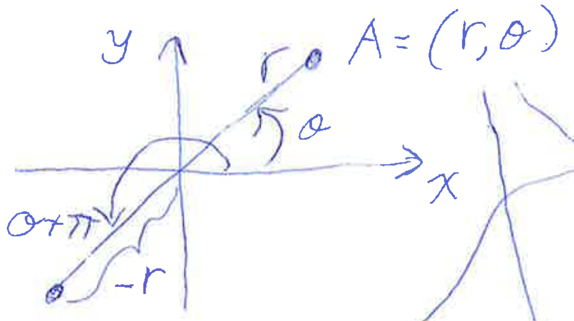
$\Downarrow$ Existe Simetria em torno do eixo x

Estudo $0 \leq \theta \leq \pi$



Rosa de Quatro
Pétalas

② Simetria ao redor do Pólo.



$A'=(r,\theta+\pi)$

ou

$A'=(-r,\theta)$

Troco $\theta \to \theta+\pi$ em $r(\theta)$
Existe a simetria se
$r(\theta+\pi)=r(\theta)$.

Troco $r \to -r$ em $\theta(r)$
Existe a simetria se
$\theta(-r)=\theta(r)$.

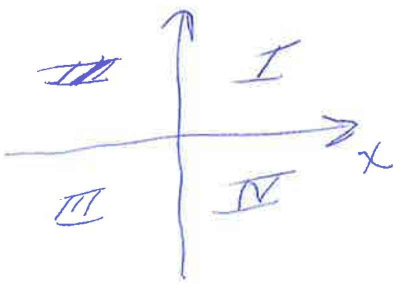
Ex. $r(\theta)=\cos(2\theta)$

Troco $\theta \to \theta+\pi$ em $r(\theta)$

$$r(\theta+\pi)=\cos(2(\theta+\pi))=\cos(2\theta+\underbrace{2\pi}_{\text{período do cosseno}})$$
$$=\cos(2\theta)$$

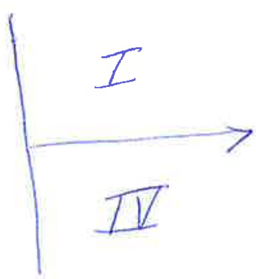
Logo, $\cos(\theta+\pi)=\cos(\theta)$,
Existe simetria em torno do Pólo

Em lugar de estudar

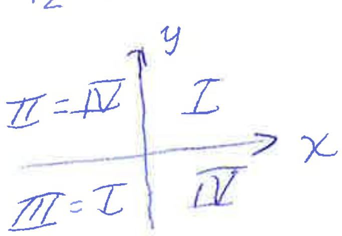


$0 \leq \theta \leq 2\pi$

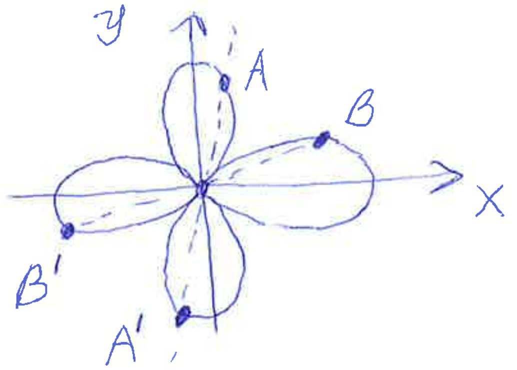
Estudo



$-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$.

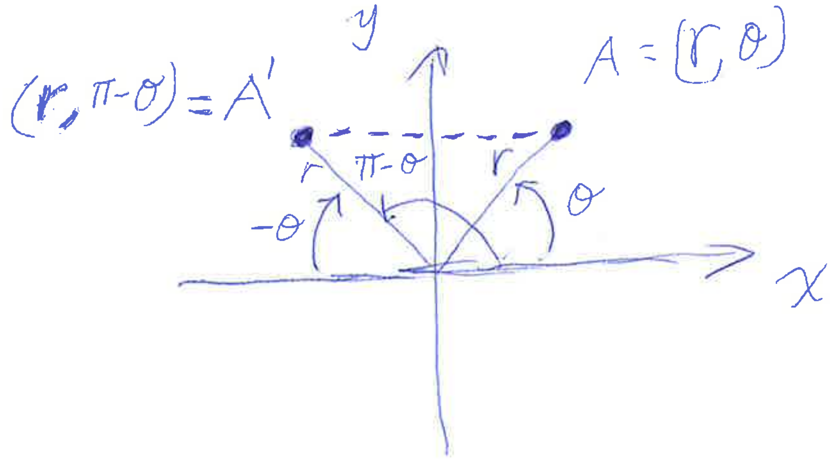


Considerando que essa função tem duas simetrias (em relação ao eixo x e ao Pólo) basta estudar o primeiro quadrante: $0 \leq \theta \leq \pi/2$



Simetria Polar
A, A'
B, B'

3 Simetria ao redor do eixo y



Troco $\theta \to \pi - \theta$ em $r(\theta)$

Se $r(\pi-\theta) = r(\theta)$ existe simetria ao redor do eixo y.

Ex. $r(\theta) = \cos(2\theta)$

troco $\theta \to \pi - \theta$ em $r(\theta)$

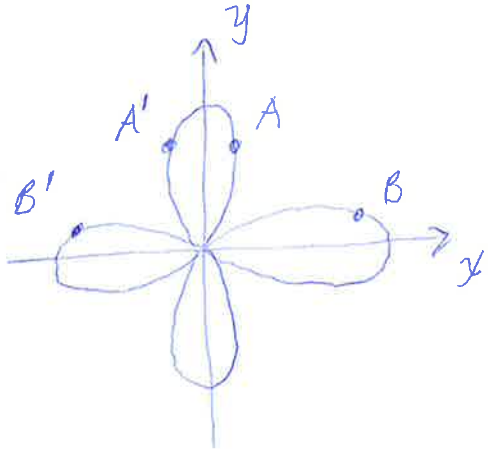
$$r(\pi-\theta) = \cos(2(\pi-\theta)) = \cos(\underbrace{2\pi}_{\text{período}} - 2\theta)$$

$$r(\pi-\theta) = \cos(-2\theta) \underset{\text{par}}{=} \cos(2\theta)$$

$r(\pi-\theta) = \cos(2\theta)$

Logo, $r(\pi-\theta) = r(\theta) \to$ Existe Simetria ao redor do eixo y.

Podemos estudar um intervalo reduzido de ângulos. Não todo θ entre 0 e 2π. (5)



Pares simétricos em torno do eixo y.

A e A'

B e B'

Veremos como funciona o estudo de simetrias para esboçar outras curvas.

Gráficos Polares Usando o Computador

(1) $r(\theta) = \cos(\theta - \delta)$

a) $\delta = \frac{4\pi}{2} = 2\pi \longrightarrow r(\theta) = \cos(\theta)$

b) $\delta = \frac{3\pi}{2} \longrightarrow r(\theta) = -\operatorname{sen}(\theta)$

c) $\delta = \frac{2\pi}{2} = \pi \longrightarrow r(\theta) = -\cos(\theta)$

d) $\delta = \frac{\pi}{2} \longrightarrow r(\theta) = \operatorname{sen}(\theta)$

e) $\delta = \frac{\pi}{6}$

(2) $r(\theta) = \cos(a\theta)$

a) $a = 2$
b) $a = 3$
c) $a = 4$
d) $a = 5$
e) $a = 2{,}5$

(3) $r(\theta) = \theta^2 - 2$

(4) $r(\theta) = \theta$

(5) $r(\theta) = \theta + \cos(a\theta) + \theta^a$

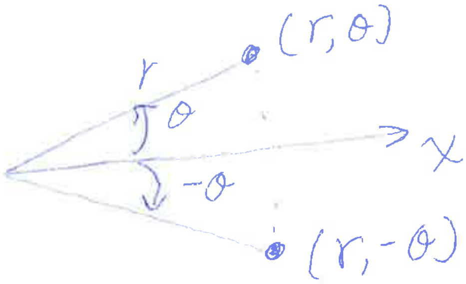
a) $a = -1$ b) $a = -1/2$, c) $a = 0$, d) $a = 1$, e) $a = 2$

Cardióide

Esboce a curva $r(\theta) = 1 - \text{sen}(\theta)$.

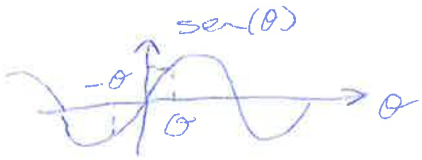
Sol.: Vamos procurar se existem simetrias para essa curva.

1 Simetria respeito ao eixo x



Trocar $\theta \to -\theta$ em $r(\theta)$

$$r(-\theta) = 1 - \text{sen}(-\theta)$$



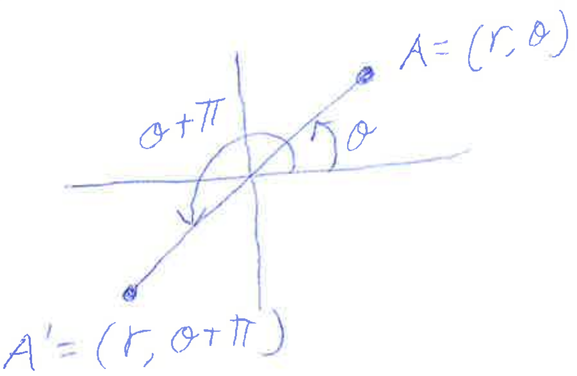
ÍMPAR : $\text{sen}(-\theta) = -\text{sen}(\theta)$

$$r(-\theta) = 1 + \text{sen}(\theta)$$

$$r(\theta) \neq r(-\theta)$$

Logo, a curva que queremos estudar não possui simetria ao redor do eixo x.

2 Simetria respeito ao Pólo.

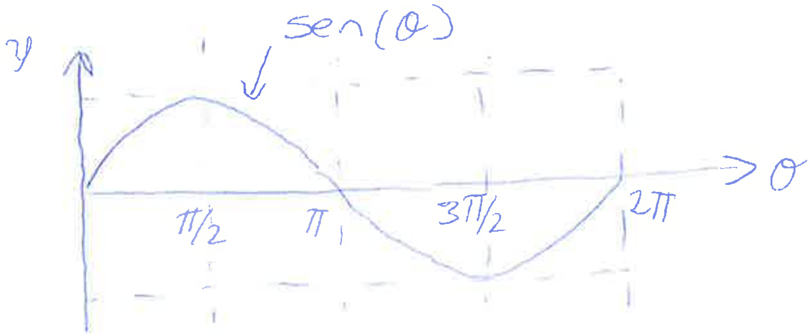


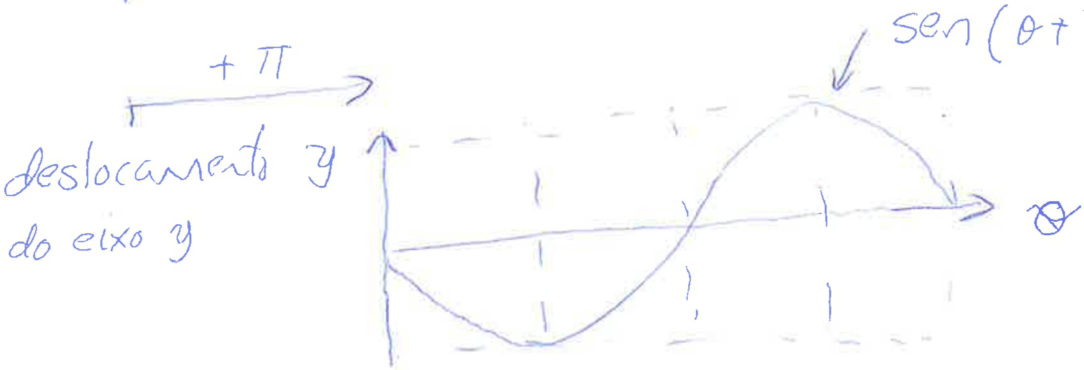
Trocar $\theta \to \theta + \pi$ em $r(\theta)$

$$r(\theta) = 1 - \text{sen}(\theta)$$

$$r(\theta + \pi) = 1 - \text{sen}(\theta + \pi)$$

Veja que $sen(\theta+\pi) = -sen(\theta)$





Também será verdade que $cos(\theta+\pi) = -cos(\theta)$.

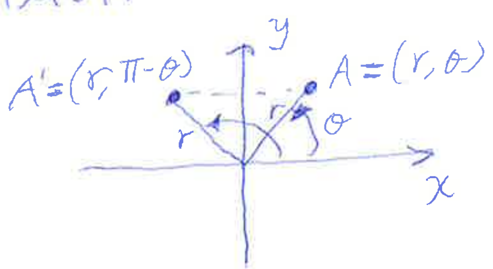
Logo, $r(\theta+\pi) = 1 - sen(\theta+\pi)$

$r(\theta+\pi) = 1 + sen(\theta)$

$r(\theta+\pi) \neq r(\theta)$

Não existe simetria respeito ao Pólo.

③ Simetria respeito ao eixo y



Trocar $\theta \to \pi - \theta$

em $r(\theta)$.

$r(\theta) = 1 - sen(\theta)$

$r(\pi - \theta) = 1 - sen(\pi - \theta)$

$\gamma = -\theta$

$sen(\pi + \gamma) = -sen(\gamma)$

$= 1 + sen(-\theta)$

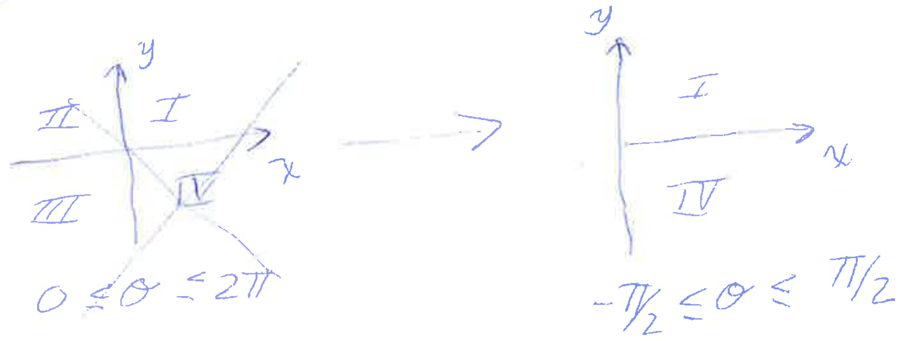
ÍMPAR

$sen(-\theta) = -sen(\theta)$

$r(\pi - \theta) = 1 - sen(\theta)$

Logo $r(\theta) = r(\pi - \theta)$ e existe simetria em relação ao eixo y!

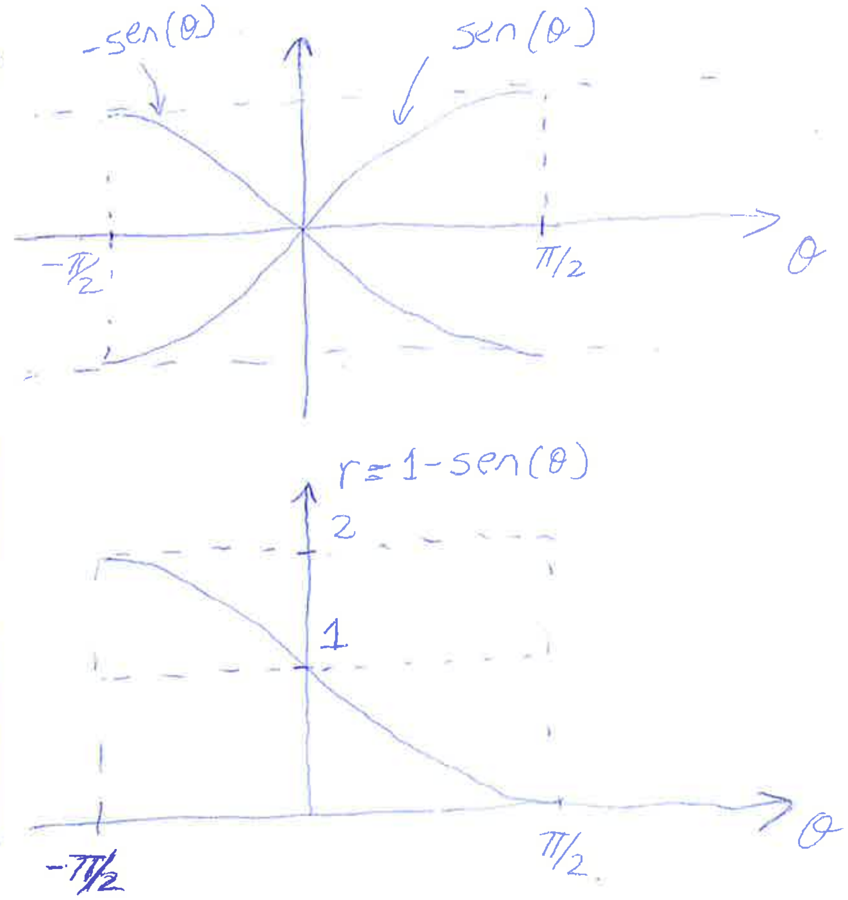
Isso permite estudar somente dois quadrantes. Os outros dois encontramos por simetria.

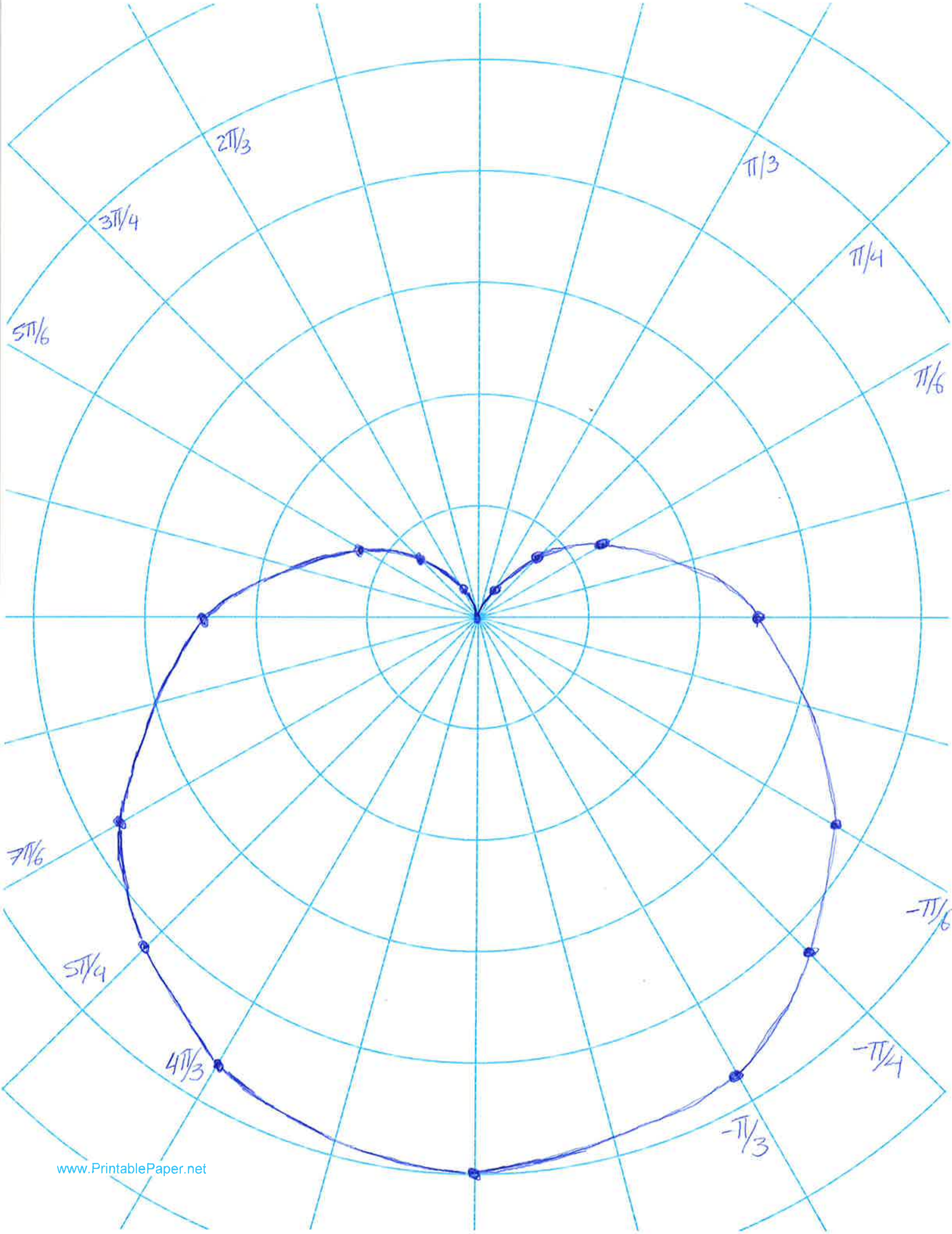


$r(\theta) = 1 - sen(\theta)$

	θ	r
A	$-\pi/2$	2
B	$-\pi/3$	$1+\sqrt{3}/2 \approx 1{,}9$
C	$-\pi/4$	$1+\sqrt{2}/2 \approx 1{,}7$
D	$-\pi/6$	$1+{}^{1}/_{2} = 1{,}5$
E	0	1
F	$\pi/6$	$1-1/2 = 0{,}5$
G	$\pi/4$	$1-\frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0{,}3$
H	$\pi/3$	$1-\frac{\sqrt{3}}{3} \approx 0{,}1$
I	$\pi/2$	0

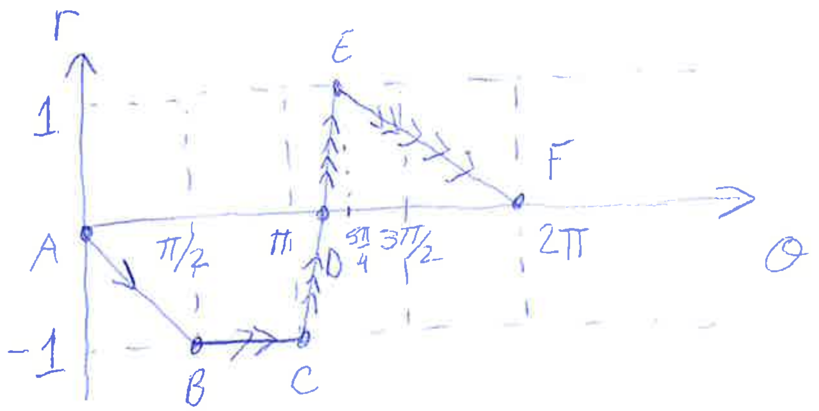
Gráficos Auxiliares (Fictícios)




2π/3
π/3
3π/4
π/4
5π/6
π/6
7π/6
-π/6
5π/4
-π/4
4π/3
-π/3

Exemplo de Gráfico Polar

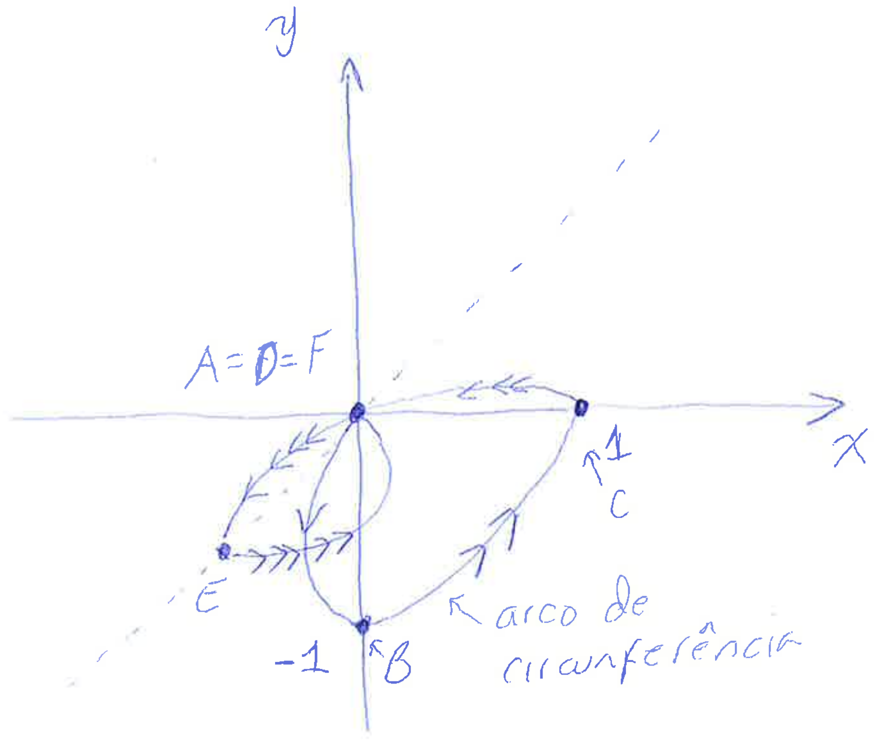
Esboce o gráfico polar correspondente ao gráfico fictício dado:



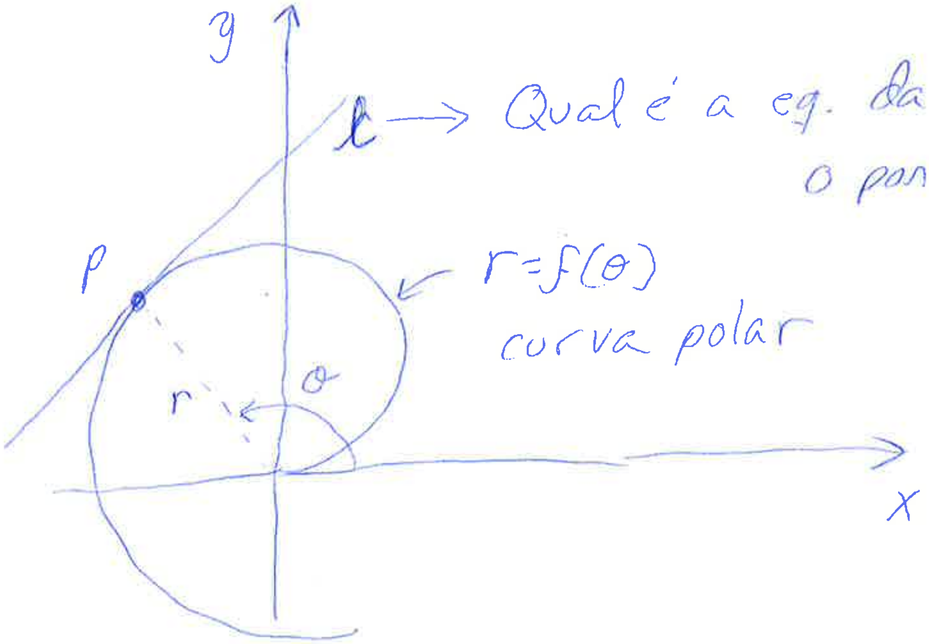
Sol.:

Tabela

θ	r	
0	0	A
$\pi/2$	-1	B
π	-1	C
$5\pi/8$	0	D
$5\pi/4$	1	E
2π	0	F



Tangentes a Curvas Polares



$\ell \longrightarrow$ Qual é a eq. da reta tangente para o ponto P? $\frac{dy}{dx} = ?$

$r = f(\theta)$ curva polar

$$\left\{\begin{array}{l} r = f(\theta) \leftarrow \text{Eq. da curva Polar} \\ + \\ \left.\begin{array}{l} x(r,\theta) = r\cos(\theta) \\ y(r,\theta) = r\,\text{sen}(\theta) \end{array}\right\} \text{Eq. que transformam de Polares para Cartesianas} \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} x(\theta) = f(\theta)\cos(\theta) \\ y(\theta) = f(\theta)\,\text{sen}(\theta) \end{array}\right.$$

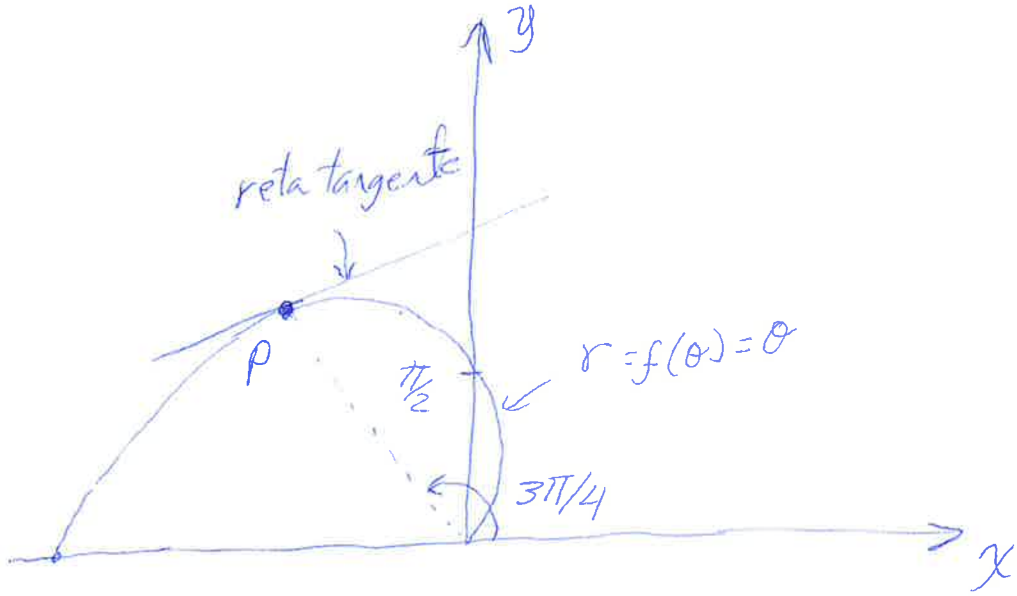
Eq. Paramétricas em Coordenadas Cartesianas, onde o parâmetro é o ângulo θ.

$\downarrow$

Podemos derivar de forma paramétrica

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/d\theta}{dx/d\theta} = \frac{f'(\theta)\,\text{sen}(\theta) + f(\theta)\cos(\theta)}{f'(\theta)\cos(\theta) - f(\theta)\,\text{sen}(\theta)}.$$

Exemplo: Escreva a equação da reta tangente a curva $r=\theta$ quando $\theta = 3\pi/4$.



$$\left\{\begin{array}{l} r=\theta \quad \leftarrow \text{Curva Polar} \\ + \\ \left\{\begin{array}{l} x(r,\theta)=r\cos(\theta) \\ y(r,\theta)=r\,\text{sen}(\theta) \end{array}\right\} \text{ Cartesianas} \leftarrow \text{Polares} \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} x(\theta)=\theta\cos(\theta) \\ y(\theta)=\theta\,\text{sen}(\theta) \end{array}\right.$$

Eq. Paramétricas em Cartesianas sendo θ o parâmetro.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/d\theta}{dx/d\theta} = \frac{\text{sen}(\theta)+\theta\cos(\theta)}{\cos(\theta)-\theta\,\text{sen}(\theta)}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\theta=3\pi/4} = \frac{\text{sen}(3\pi/4)+3\pi/4\cos(3\pi/4)}{\cos(3\pi/4)-3\pi/4\,\text{sen}(3\pi/4)} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{3\pi}{4}\frac{\sqrt{2}}{2}}{-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{3\pi}{4}\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\theta=\pi/4} = -\frac{1-3\pi/4}{1+3\pi/4} = \frac{3\pi/4-1}{1+3\pi/4}$$

As coordenadas do ponto P em polares são (3)

$\left(\frac{3\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right)$.

Transformando em Cartesianas

$$x = r\cos(\theta) = \frac{3\pi}{4}\cos(3\pi/4) = -\frac{3\pi}{4}\frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{3\pi\sqrt{2}}{8} = x_0$$

$$y = r\,\mathrm{sen}(\theta) = \frac{3\pi}{4}\,\mathrm{sen}(3\pi/4) = +\frac{3\pi}{4}\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{3\pi\sqrt{2}}{8} = y_0$$

Logo, a equação da reta que passa pelo ponto P é

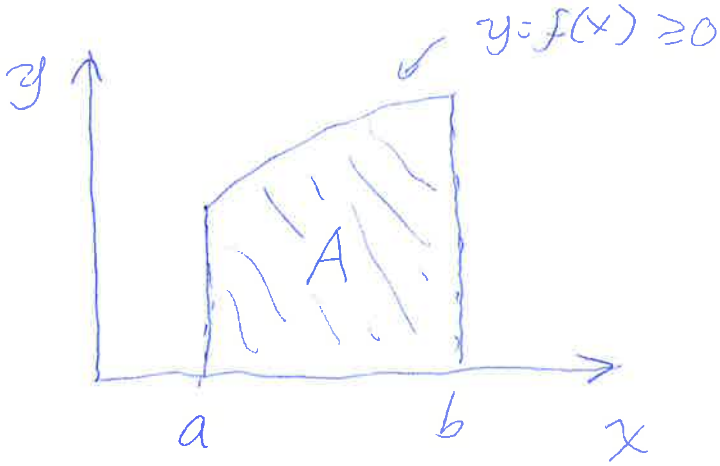
$$(y - y_0) = \underbrace{m}_{\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\theta = 3\pi/4}}(x - x_0)$$

$$\boxed{\left(y - \frac{3\pi\sqrt{2}}{8}\right) = \frac{\frac{3\pi}{4} - 1}{1 + 3\pi/4}\left(x + \frac{3\pi\sqrt{2}}{8}\right)}$$

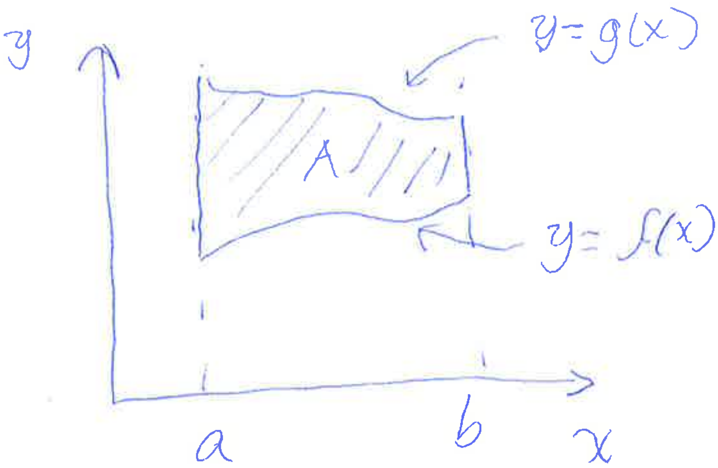
Eq. da Reta Tangente.

Áreas em Coordenadas Polares

Em coordenadas cartesianas

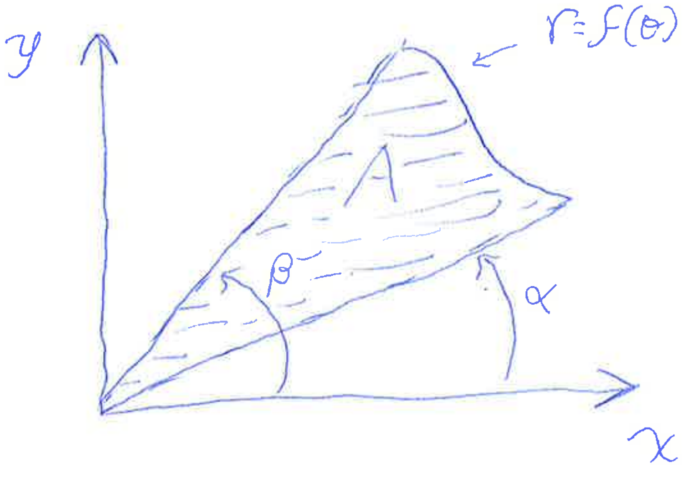


$$A = \int_a^b f(x)\,dx$$

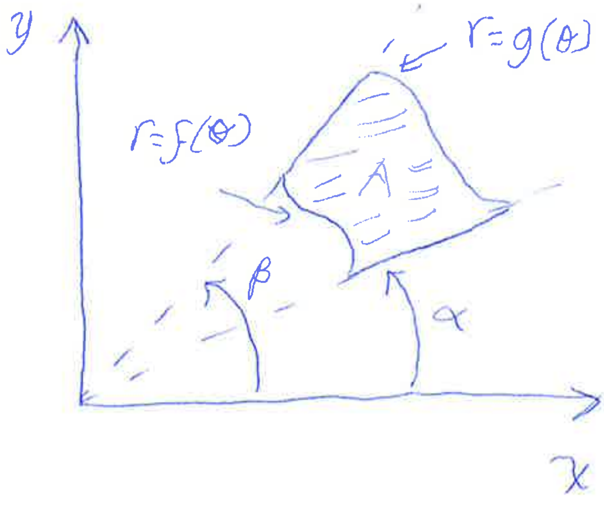


$$A = \int_a^b [g(x) - f(x)]\,dx$$

Em coordenadas polares queremos calcular uma área do tipo:



ou



Vamos começar lembrando qual é a área de uma circunferência:

$$A_{\bullet} = \pi r^2 \longrightarrow 0 \le \theta \le 2\pi$$

$$A_{\triangleleft} \longrightarrow 0 \le \theta \le \theta$$

setor circular

A área de um setor circular é proporcional ao ângulo percorrido na sua formação: Podemos usar uma regla de três:

$$\frac{A_{\bullet}}{A_{\triangleleft}} = \frac{2\pi}{\theta} \longrightarrow \frac{\pi r^2}{A_{\triangleleft}} = \frac{2\pi}{\theta} \longrightarrow A_{\triangleleft} = \cancel{\pi} r^2 \frac{\theta}{2\cancel{\pi}}$$

$$\boxed{A_{\triangleleft} = \frac{1}{2} r^2 \theta}$$

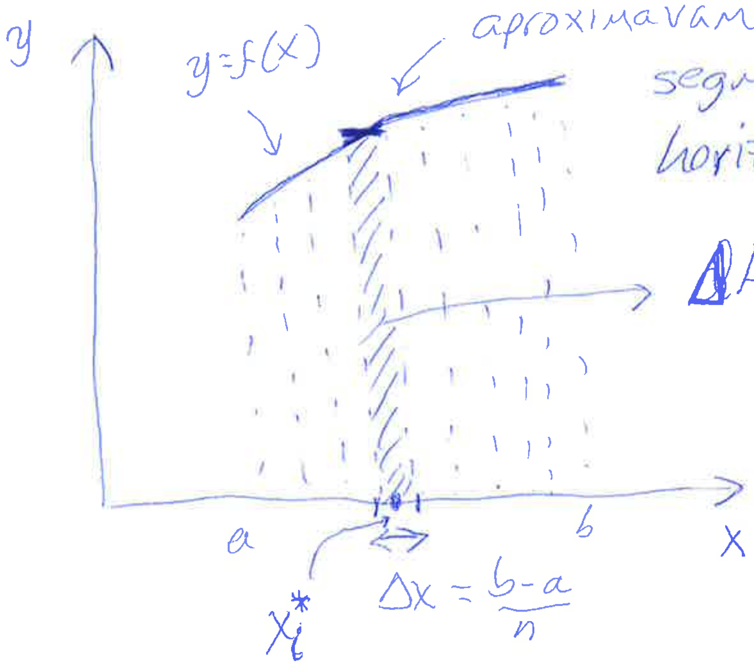
Verifique que se $\theta = 2\pi$
(uma circunferência)

$$A = \frac{1}{\cancel{2}} r^2 \cdot \cancel{2}\pi$$

$$A = \pi r^2 = A_{\bullet}$$

Antes...

aproximavamos a curva por segmentos de reta horizontais



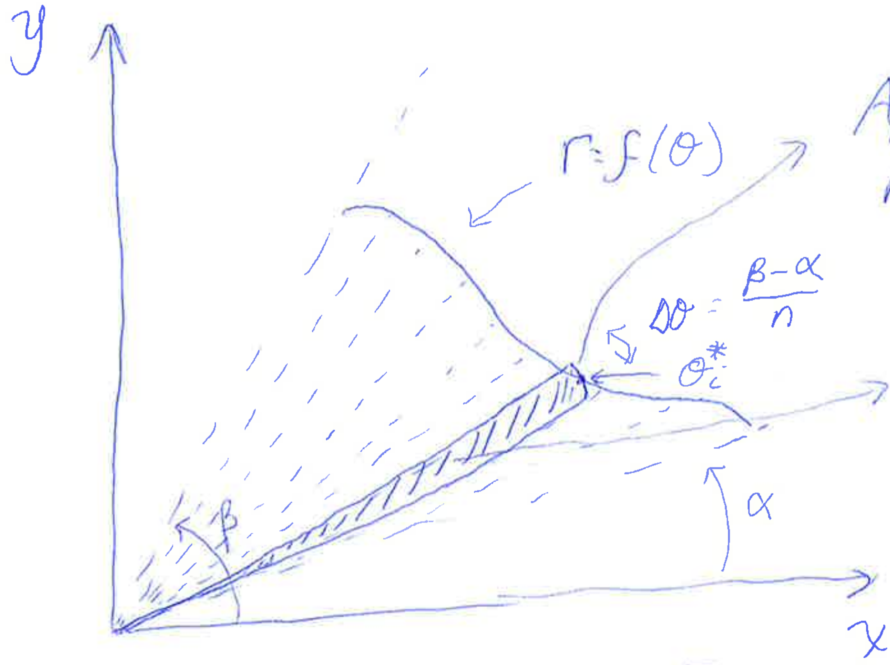
$$\Delta A_i = f(x_i^*)\,\Delta x_i$$

$$A = \lim_{n \to \infty} \left[\sum_{i=1}^{n} (\Delta A_i) \right]$$

$$A = \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b dA$$

Agora...

Aproximamos a curva por arcos de circunferências.



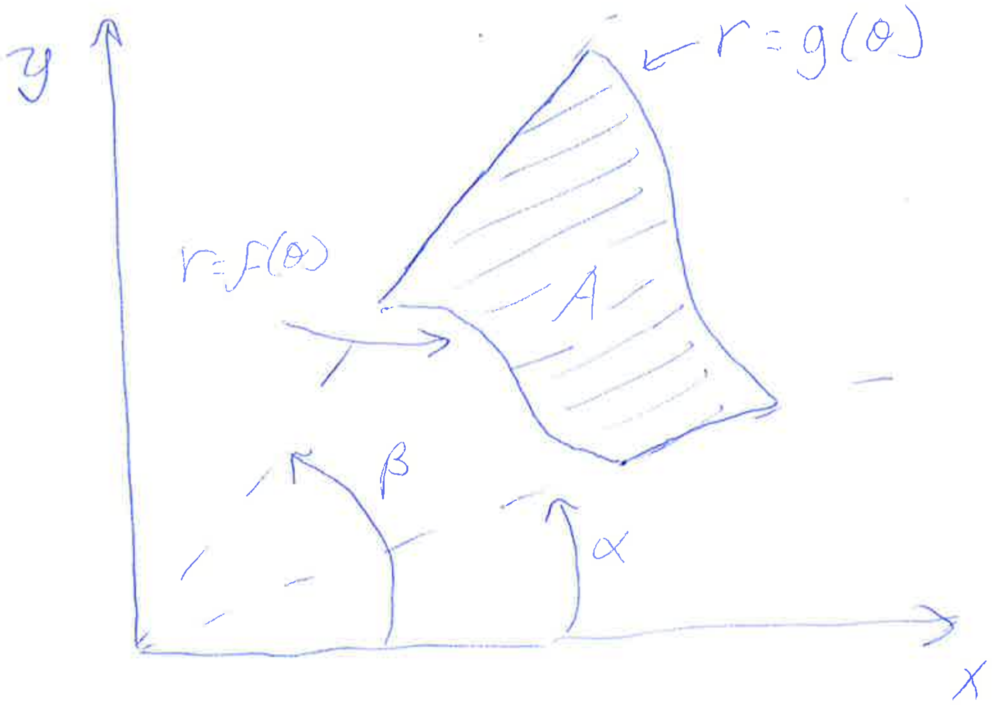
$$\Delta A_i = \frac{1}{2}\left[f(\theta_i^*)\right]^2 \Delta\theta$$

setor circular

$$A = \lim_{n \to \infty} \left[\sum_{i=1}^{n} (\Delta A_i) \right]$$

$$\boxed{A = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \left[f(\theta)\right]^2 d\theta = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2\,d\theta}$$

No caso...

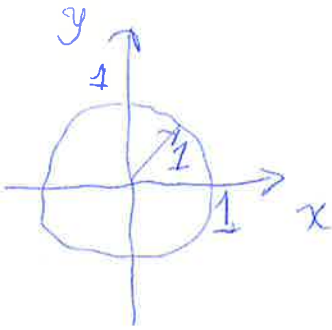


$$A = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} \left[[g(\theta)]^2 - [f(\theta)]^2 \right] d\theta$$

Exemplo de Cálculo de Área Polar
Área da Lua Crescente

Encontre a área fora da circunferência $r=1$ e dentro da circunferência $r=\frac{3}{2}\operatorname{sen}(\theta)$.

Sol.: A circunferência $\boxed{r=1}$ é fácil de esboçar



Para esboçar a circunferência $r=\frac{3}{2}\operatorname{sen}(\theta)$ podemos procurar a eq. cartesiana correspondente.

$$r=\frac{3}{2}\operatorname{sen}(\theta)$$

mas $y=r\operatorname{sen}(\theta) \longrightarrow \operatorname{sen}(\theta)=\frac{y}{r}$

$$r=\frac{3}{2}\frac{y}{r}$$

$$r^2=\frac{3}{2}y$$

mas $r^2=x^2+y^2$

$$x^2+y^2-\frac{3}{2}y=0$$

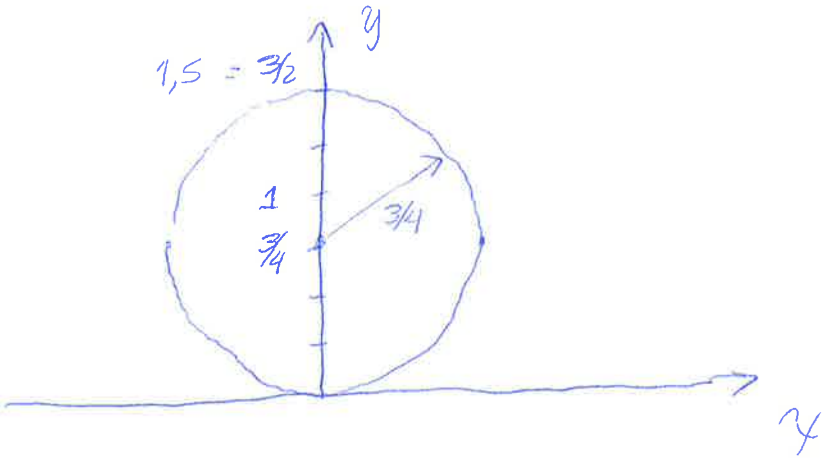
Completando quadrados em y

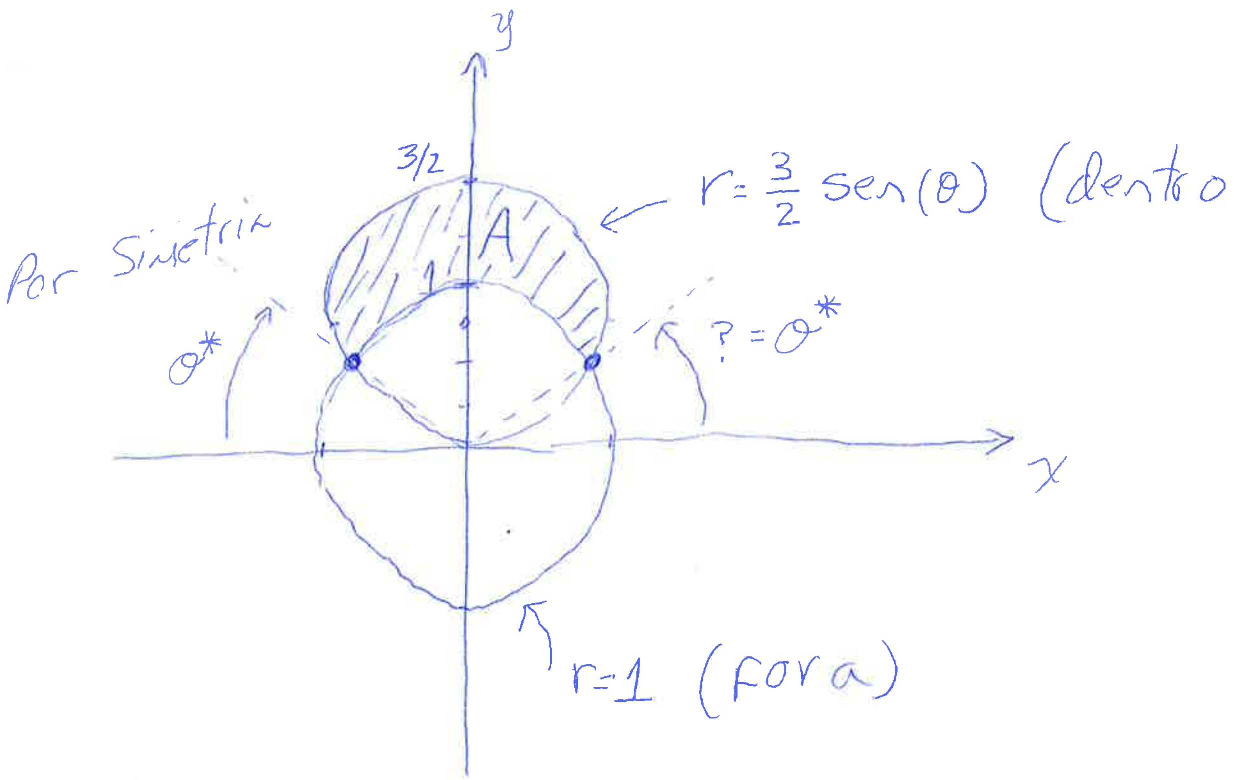
②

$$x^2 + y^2 - \frac{3}{2}y + \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \left(\frac{3}{4}\right)^2$$

$$x^2 + \left(y - \frac{3}{4}\right)^2 = \left(\frac{3}{4}\right)^2$$

Logo, o centro está em $\left(0, \frac{3}{4}\right)$ e o raio é $\frac{3}{4}$.





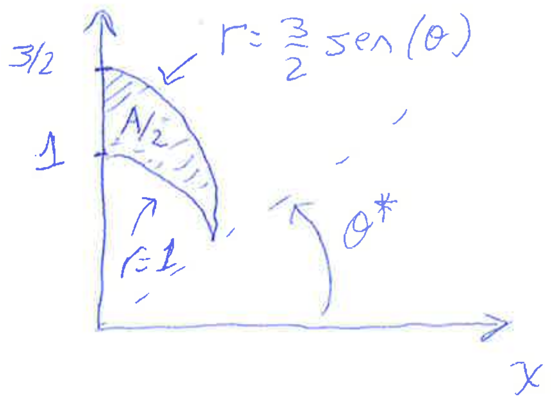
Para encontrar θ^*

$$\begin{cases} r = 1 \\ r = \frac{3}{2}\operatorname{sen}(\theta^*) \end{cases} \Rightarrow 1 = \frac{3}{2}\operatorname{sen}(\theta^*)$$

$$\operatorname{sen}(\theta^*) = \frac{2}{3}$$

$$\theta^* = 0{,}729728 \text{ radianos} \quad (\sim 42°)$$

Por simetria podemos calcular somente a metade da área e depois multiplicar por 2.



$$\boxed{A=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}\left\{[g(\theta)]^2-[f(\theta)]^2\right\}d\theta}$$ Fórmula

No nosso problema

$$\frac{A}{\cancel{2}}=\frac{1}{\cancel{2}}\int_{\theta^*}^{\pi/2}\left\{\left(\frac{3}{2}\right)^2 sen^2(\theta)-1^2\right\}d\theta$$

$$A=\frac{9}{4}\int_{\theta^*}^{\pi/2} sen^2(\theta)\,d\theta-\int_{\theta^*}^{\pi/2}d\theta$$

Para calcular $\int sen^2(\theta)\,d\theta$

$$\cos(2\theta)=\cos^2(\theta)-sen^2(\theta).$$
$$=\{1-sen^2(\theta)\}-sen^2(\theta)$$

$$\cos(2\theta)=1-2\,sen^2(\theta).$$
$$sen^2(\theta)=\frac{1-\cos(2\theta)}{2}$$

$$\int \operatorname{sen}^2(\theta)\,d\theta = \int \left[\frac{1-\cos(2\theta)}{2}\right] d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int d\theta - \frac{1}{2}\int \cos(2\theta)\,d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\theta - \frac{1}{4}\operatorname{sen}(2\theta)$$

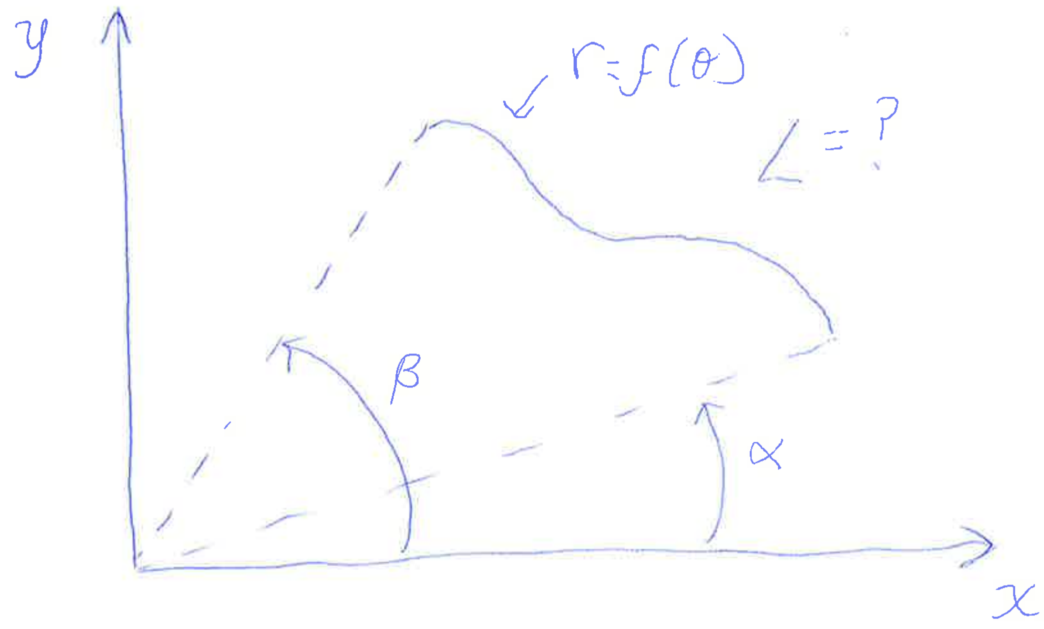
Voltando na integral principal

$$A = \frac{9}{4}\left[\frac{1}{2}\theta - \frac{1}{4}\operatorname{sen}(2\theta)\right]\Bigg|_{\theta^*}^{\pi/2} - \theta\Bigg|_{\theta^*}^{\pi/2}$$

$$A = \frac{9}{4}\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} \cancel{- \frac{1}{4}\cdot 0} - \frac{1}{2}\theta^* + \frac{1}{4}\operatorname{sen}(2\theta^*)\right] - \frac{\pi}{2} + \theta^*$$

$$\boxed{A = 0{,}664151}$$

Comprimento de Arco para Curvas Polares



$$\begin{cases} r = f(\theta) \rightarrow \text{Eq. da Curva} \\ + \\ x(r,\theta) = r\cos(\theta) \\ y(r,\theta) = r\,\text{sen}(\theta) \end{cases}$$

$\rightarrow$ Cartesianas $\leftarrow$ Polares

$$\begin{cases} x(\theta) = f(\theta)\cos(\theta) \\ y(\theta) = f(\theta)\,\text{sen}(\theta) \end{cases}$$

$\rightarrow$ Eq. Paramétricas em Cartesianas com θ como parâmetro.

Para calcular o comprimento de uma curva paramétrica estudamos que devemos usar a integral:

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[x'(\theta)]^2 + [y'(\theta)]^2}\, d\theta$$

Vamos calcular $x'(\theta)$ e $y'(\theta)$:

$$x(\theta) = f(\theta)\cos(\theta)$$

$$x'(\theta) = f'(\theta)\cos(\theta) - f(\theta)\,\mathrm{sen}(\theta)$$

$$y(\theta) = f(\theta)\,\mathrm{sen}(\theta)$$

$$y'(\theta) = f'(\theta)\,\mathrm{sen}(\theta) + f(\theta)\cos(\theta)$$

$$[x'(\theta)]^2 = [f'(\theta)]^2\cos^2(\theta) - \cancel{2f'(\theta)f(\theta)\cos(\theta)\mathrm{sen}(\theta)} + [f(\theta)]^2\mathrm{sen}^2(\theta)$$

$$+\ [y'(\theta)]^2 = [f'(\theta)]^2\mathrm{sen}^2(\theta) + \cancel{2f'(\theta)f(\theta)\cos(\theta)\mathrm{sen}(\theta)} + [f(\theta)]^2\cos^2(\theta)$$

$$[x'(\theta)]^2 + [y'(\theta)]^2 = [f'(\theta)]^2\overbrace{(\cos^2(\theta)+\mathrm{sen}^2(\theta))}^{1} + [f(\theta)]^2\underbrace{(\cos^2(\theta)+\mathrm{sen}^2(\theta))}_{1}$$

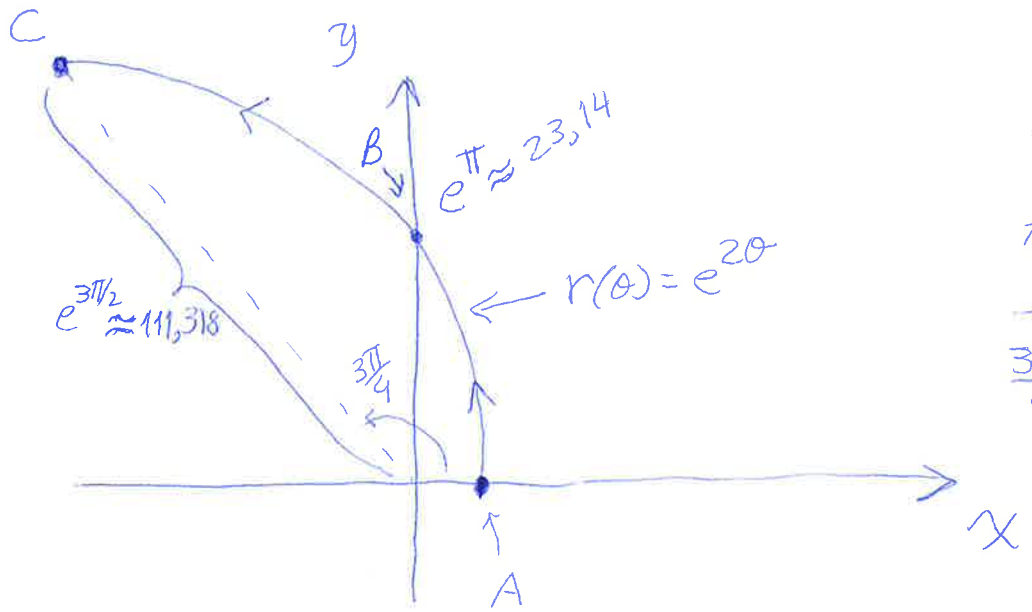
$$[x'(\theta)]^2 + [y'(\theta)]^2 = [f'(\theta)]^2 + [f(\theta)]^2$$

Voltando na integral

$$\boxed{L = \int_\alpha^\beta \sqrt{[f'(\theta)]^2 + [f(\theta)]^2}\,d\theta \quad \text{ou} \quad L = \int_\alpha^\beta \sqrt{[r'(\theta)]^2 + [r(\theta)]^2}\,d\theta}$$

$r = f(\theta)$.

Exemplo: Calcule o comprimento da curva polar $r(\theta) = e^{2\theta}$ quando $0 \leq \theta \leq 3\pi/4$. ③



θ	r	Ponto
0	$e^0 = 1$	A
$\pi/2$	$e^{2\cdot\pi/2} = e^{\pi} \approx 23,14$	B
$\frac{3\pi}{4}$	$e^{2\cdot\frac{3\pi}{4}} = e^{3\pi/2} \approx 111,318$	C

$$r(\theta) = e^{2\theta}$$

$$r'(\theta) = 2e^{2\theta}$$

$$[r(\theta)]^2 = [e^{2\theta}]^2$$

$$+\ [r'(\theta)]^2 = 4[e^{2\theta}]^2$$

$$[r(\theta)]^2 + [r'(\theta)]^2 = 5[e^{2\theta}]^2$$

$$\boxed{L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[r(\theta)]^2 + [r'(\theta)]^2}\, d\theta} \leftarrow \text{fórmula}$$

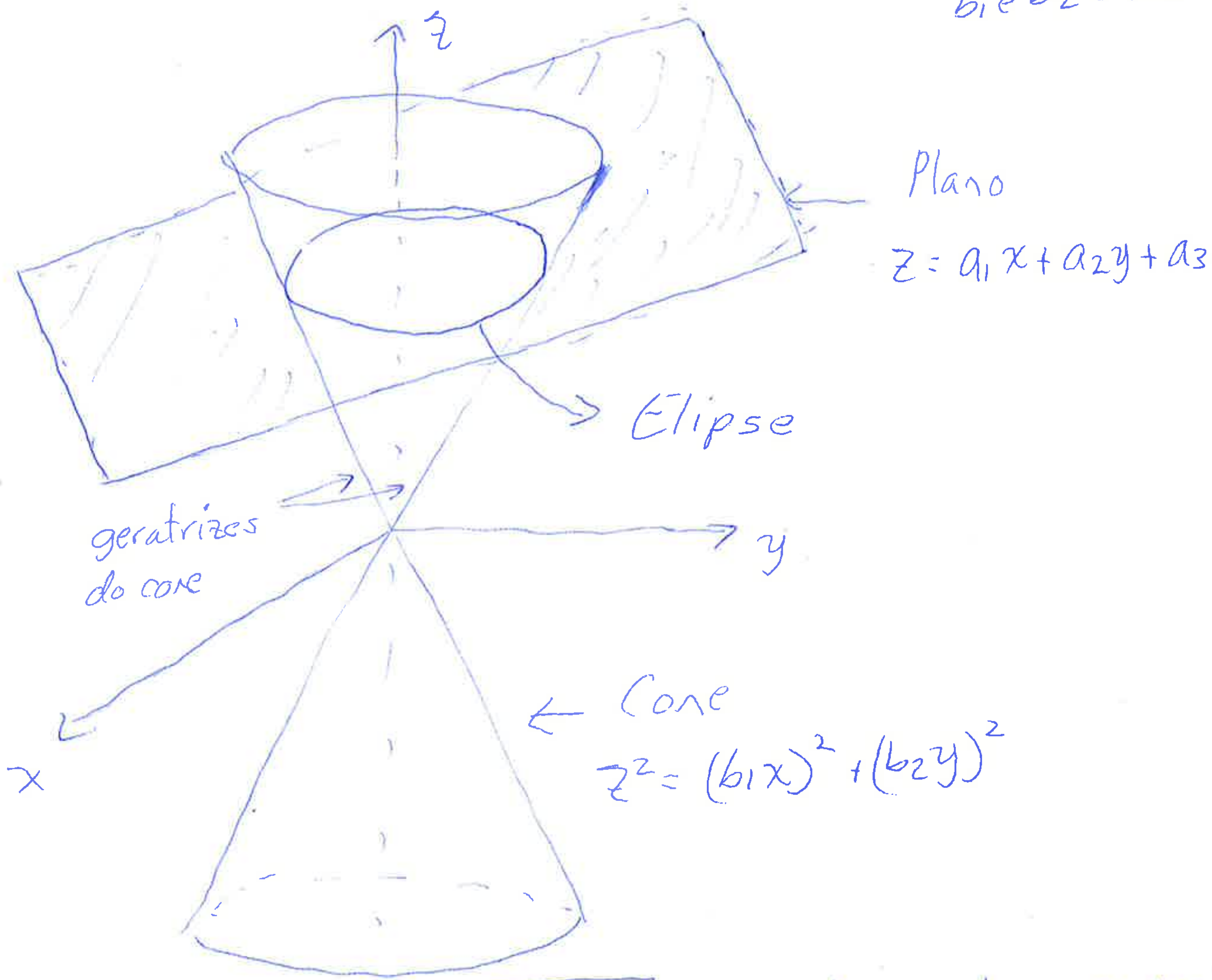
$$L = \int_0^{3\pi/4} \sqrt{5[e^{2\theta}]^2}\, d\theta = \int_0^{3\pi/4} \sqrt{5}\, e^{2\theta}\, d\theta = \frac{\sqrt{5}}{2} e^{2\theta} \Big|_0^{3\pi/4}$$

$$\boxed{L = \frac{\sqrt{5}}{2}\left[e^{3\pi/2} - 1\right] \approx 123,339}$$

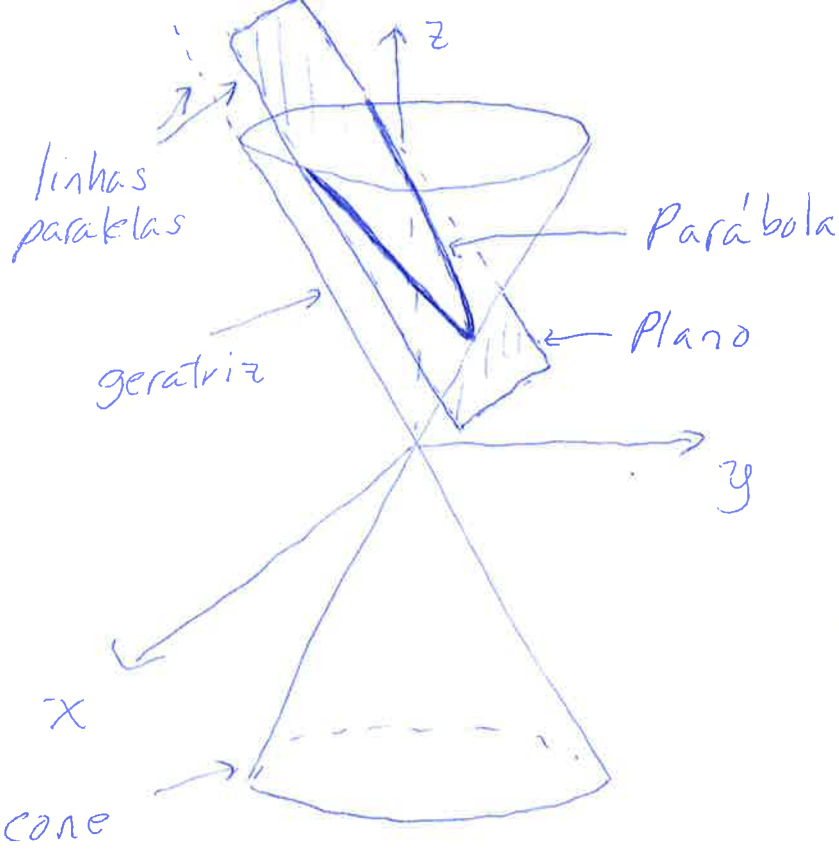
Seções Cônicas

As seções cônicas resultam da interseção de um cone com um plano:

$$\text{Seção Cônica} = \begin{cases} z = a_1 x + a_2 y + a_3 & \leftarrow \text{Eq. de um Plano } a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R} \\ z^2 = (b_1 x)^2 + (b_2 y)^2 & \leftarrow \text{Eq. de um Cone com eixo de simetria o eixo } z. \ b_1 \text{ e } b_2 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

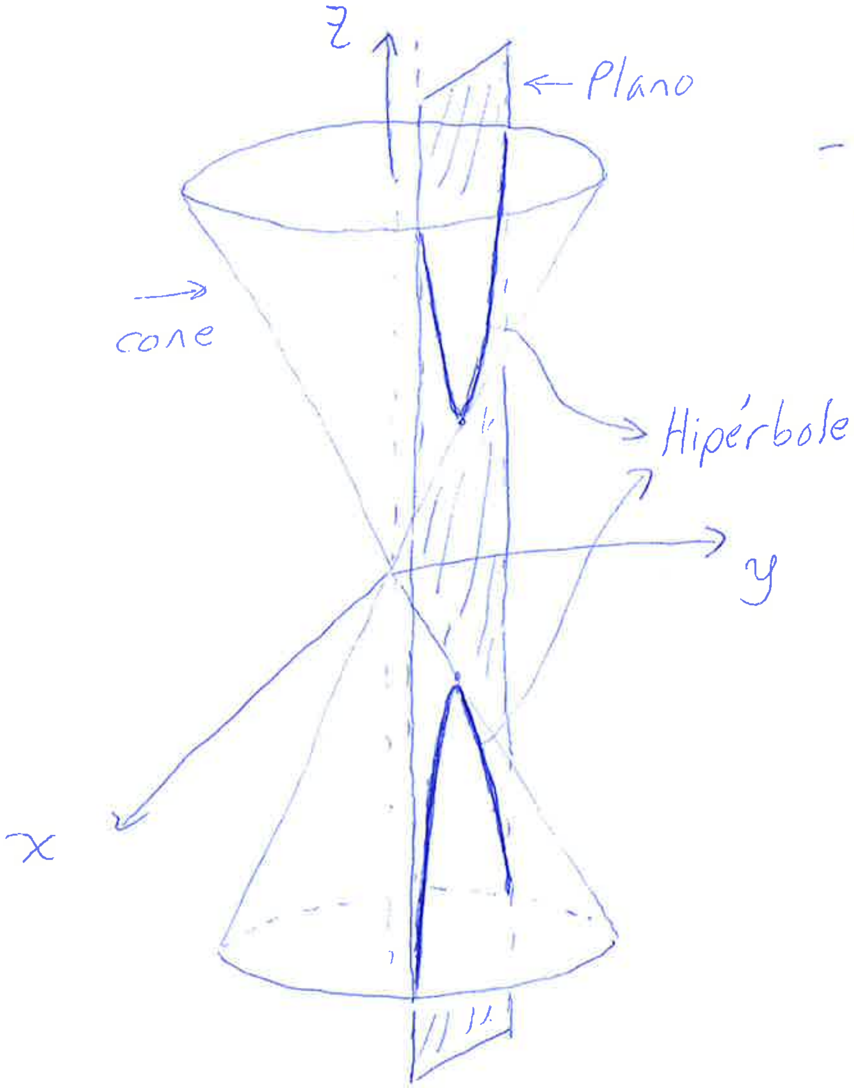


A "cônica" é uma $\boxed{\text{Elipse}}$ quando o plano somente corta um dos lados do cone e o plano não é paralelo a uma das geratrizes do cone.



- A "cônica" é uma $\boxed{\text{Parábola}}$ quando o plano é paralelo, mas não coincidente, com uma das geratrizes do cone.

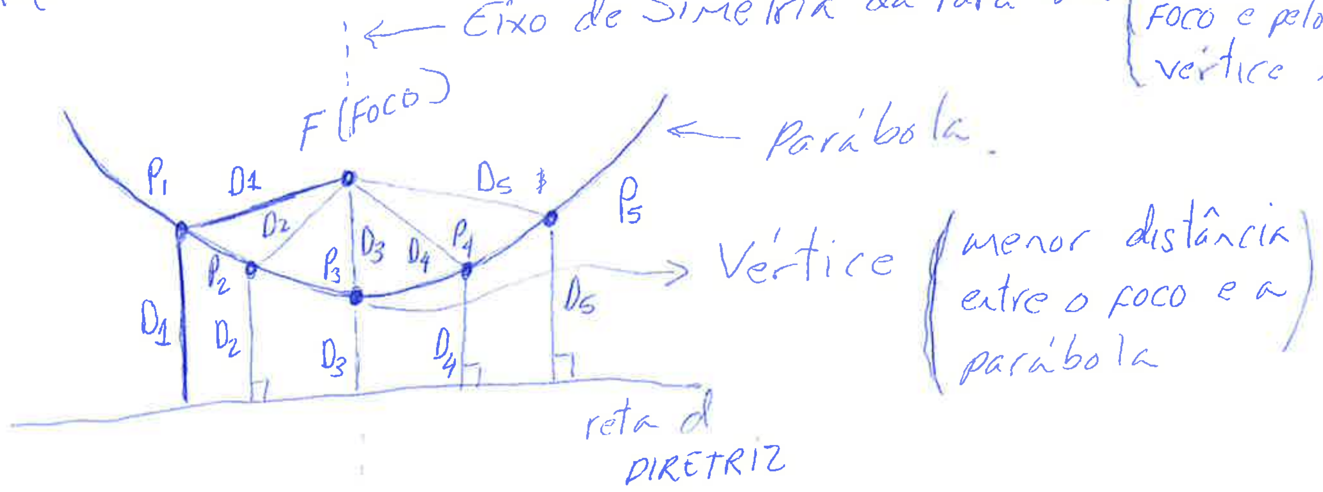
- A "cônica" é uma reta quando a geratriz do cone está contida completamente no plano de corte.

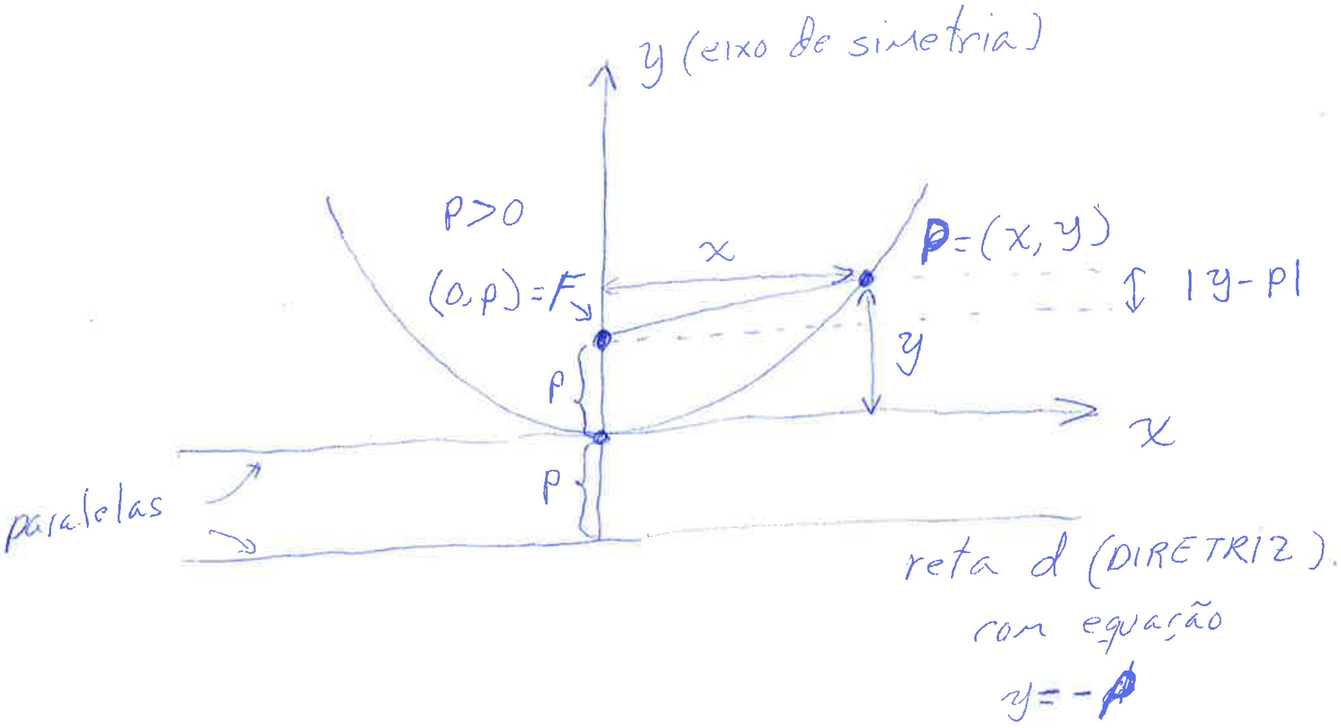


- A "cônica" é uma $\boxed{\text{Hipérbole}}$ quando o plano corta os dois lados do cone e o plano não coincide com uma das geratrizes do cone.

Parábolas

Uma parábola é o conjunto de pontos em um plano cujas distâncias a um ponto fixo F (FOCO) e a uma reta fixa d (DIRETRIZ) são iguais.





- A distância entre o foco F e o ponto P é

$$|FP| = \sqrt{x^2+(y-p)^2}$$

- A distância entre a reta diretriz d e o ponto P é

$$D(d,P) = |y+p|$$ Assumimos que $p>0$ e $p\in\mathbb{R}$

Pela definição de PARÁBOLA essas duas distâncias são iguais ②

$$|FP| = D(d, P)$$

$$\sqrt{x^2 + (y-p)^2} = |y+p|$$

Elevando ao quadrado dos dois lados

$$x^2 + (y-p)^2 = (y+p)^2$$

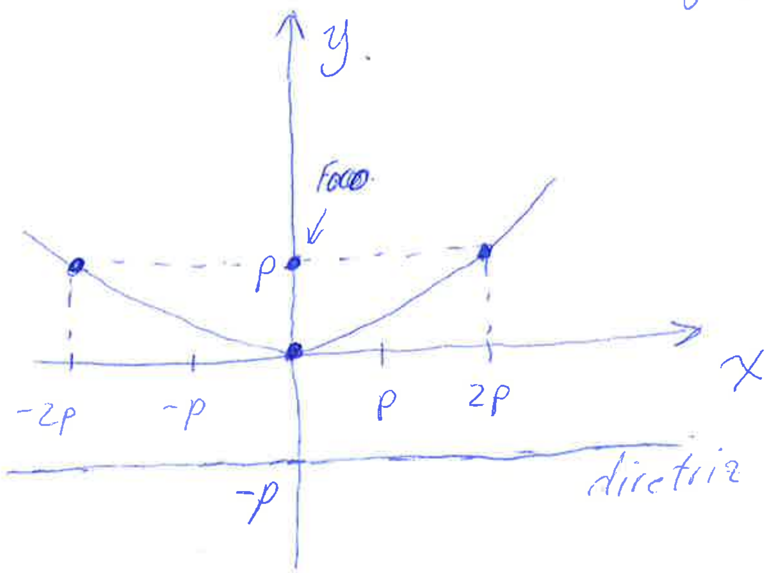
$$x^2 + \cancel{y^2} - 2py + \cancel{p^2} = \cancel{y^2} + 2py + \cancel{p^2}$$

$$\boxed{x^2 = 4py} \quad \text{ou}$$

$$\boxed{y = \frac{1}{4p} x^2}$$

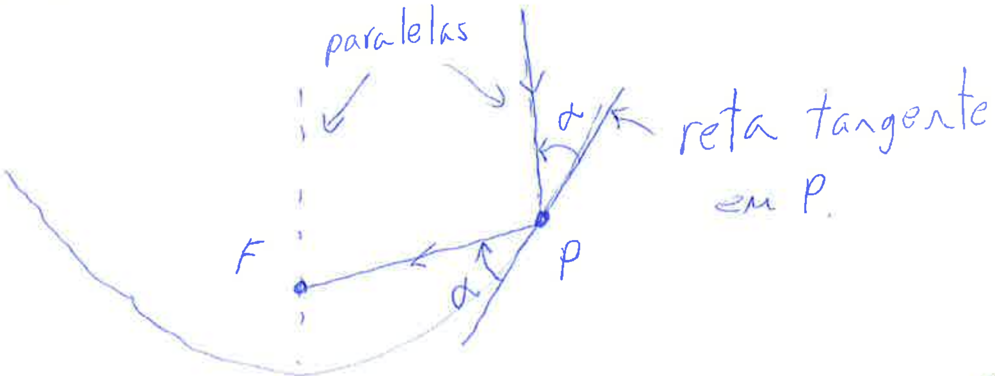
Note que se $x = 2p$ ou $x = -2p$ $\Longrightarrow$ $y = \frac{1}{4p}(2p)^2 = \frac{4p^2}{4p} = p$

$y = p$.

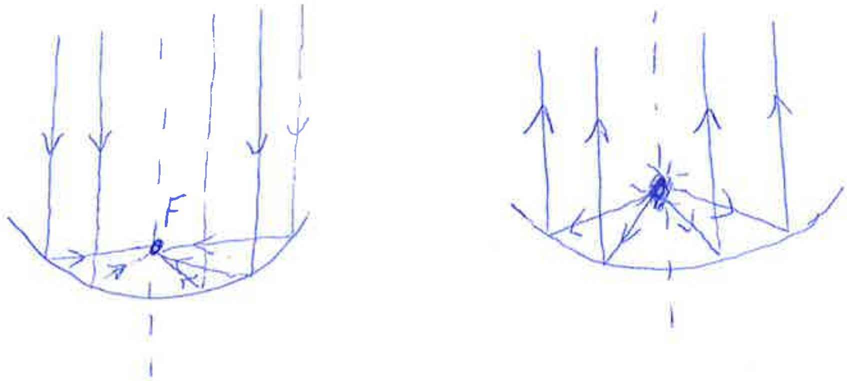


Teorema (Propriedade de Reflexão da Parábola)

A reta tangente em um ponto P da parábola faz ângulos iguais com a reta que passa por P paralela ao eixo de simetria e com a reta que passa por P e o foco.

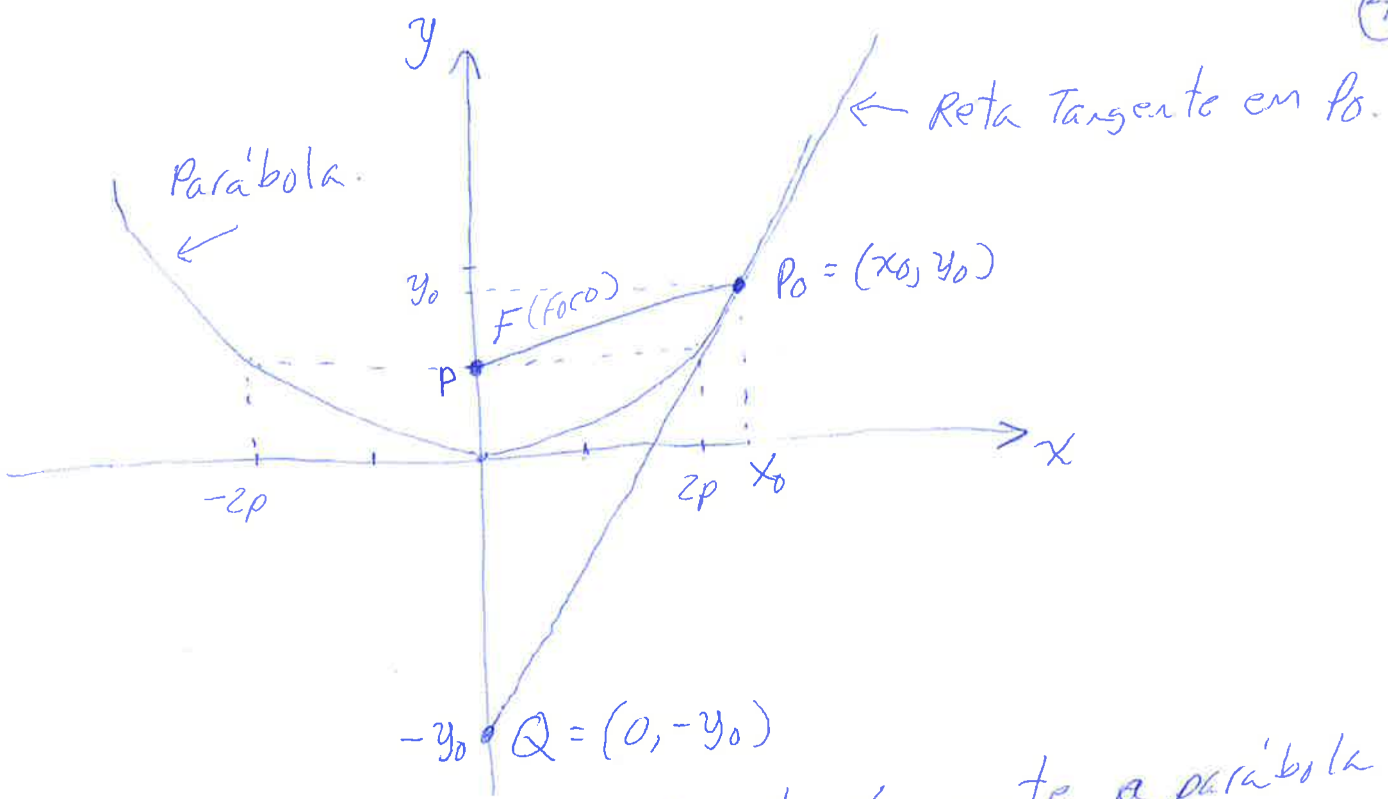


Isto é, um feixe de raios paralelos ao eixo de simetria da parábola é refletido (concentrado) no foco. Ou, uma fonte pontual de luz no foco, após refletida na parábola forma um feixe de raios paralelos.



Prova: Vamos considerar uma parábola com equação $y = \frac{1}{4p} x^2$ e um ponto da mesma $(x_0, y_0) = P_0$. Isto é,

$$y_0 = \frac{1}{4p} x_0^2.$$



Para encontrar a eq. da reta tangente a parábola em Po. devemos derivar $y(x) = \frac{1}{4p} x^2$.

$$y'(x) = \frac{2x}{4p} = \frac{x}{2p}$$

em Po.

$$y'(x_0) = \frac{x_0}{2p}.$$

Logo, a eq. da reta tangente é

$$(y - y_0) = \underbrace{\frac{x_0}{2p}}_{m} (x - x_0)$$

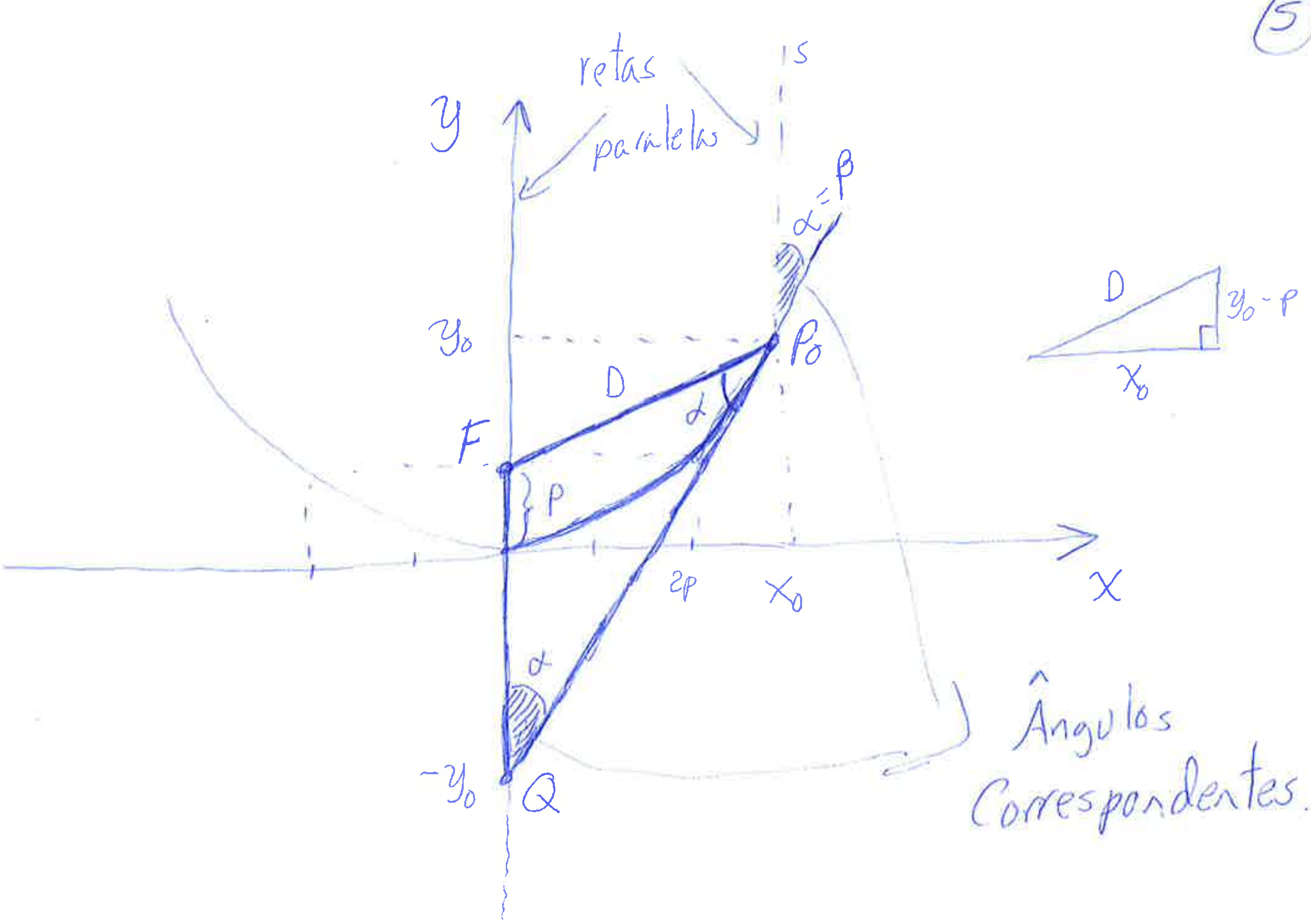
Se $x = 0 \Rightarrow (y - y_0) = \frac{x_0}{2p}(0 - x_0)$

$$y = y_0 - \frac{x_0^2}{2p}$$

mas $y_0 = \frac{x_0^2}{4p} = \frac{1}{2}\left(\frac{x_0^2}{2p}\right) \rightarrow 2y_0 = \frac{x_0^2}{2p}$

$$y = y_0 - 2y_0 = -y_0$$

A intersecção da reta tangente com o eixo y é o ponto $Q = (0, -y_0)$.



A distância entre F e P_0 é

$$D = \sqrt{x_0^2 + (y_0 - p)^2}$$

mas $y_0 = \frac{1}{4p} x_0^2$ ou $x_0^2 = 4p y_0$

$$D = \sqrt{4py_0 + y_0^2 - 2y_0 p + p^2}$$

$$D = \sqrt{y_0^2 + 2y_0 p + p^2}$$

$$D = \sqrt{(y_0 + p)^2}$$

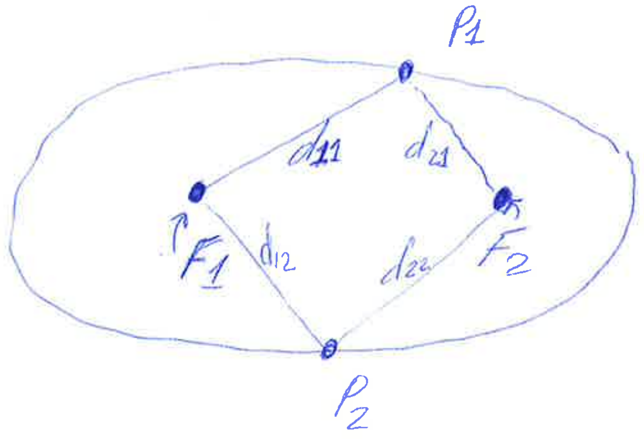
$$D = y_0 + p.$$

Logo, $|FP_0| = |FQ|$ e o triângulo é isósceles com base $\overline{QP_0}$. Os ângulos $F\hat{Q}P_0$ e $F\hat{P_0}Q$ são iguais. O eixo y e a reta s são paralelas e $\beta = \alpha$. O que demostra o Teorema. ∎

Elipses

Uma elipse é o conjunto de pontos em um plano cuja soma das distâncias a dois pontos fixos F_1 e F_2 é uma constante.

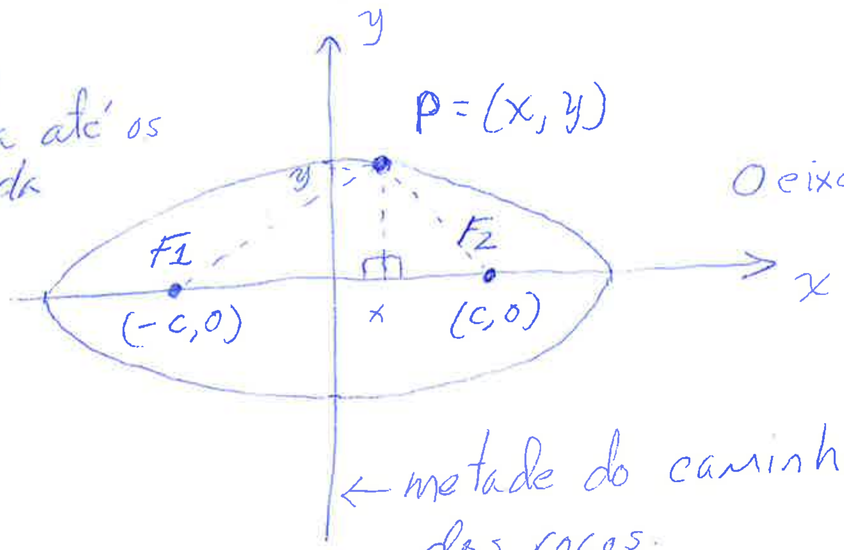
P_1 e P_2 pontos da Elipse



$$\underbrace{d_{11}+d_{21}}_{\text{para } P_1} = \underbrace{d_{12}+d_{22}}_{\text{para } P_2} = \text{cte}$$

F_1 e F_2 são chamados de focos da Elipse

$c>0$
distância até os focos da origem



O eixo x passa pelos dois focos

← metade do caminho dos focos.

$$|F_1P| + |F_2P| = \text{cte} \quad \leftarrow \text{Definição de Elipse}$$

$$|F_1P| + |F_2P| = 2a \quad , \quad 2a = \text{cte}\ ,\ a>0.$$

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} + \sqrt{(c-x)^2+y^2} = 2a$$

$$\sqrt{(c-x)^2+y^2} = 2a - \sqrt{(x+c)^2+y^2}$$

Elevando ao quadrado nos dois lados

$$(c-x)^2 + \cancel{y^2} = 4a^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2+y^2} + (x+c)^2 + \cancel{y^2}$$

$$\cancel{c^2} - 2cx + \cancel{x^2} = 4a^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2+y^2} + \cancel{x^2} + 2cx + \cancel{c^2}$$

$$\cancel{4}a\sqrt{(x+c)^2+y^2} = \cancel{4}a^2 + \cancel{4}cx$$

$$a\sqrt{(x+c)^2+y^2} = a^2 + cx$$

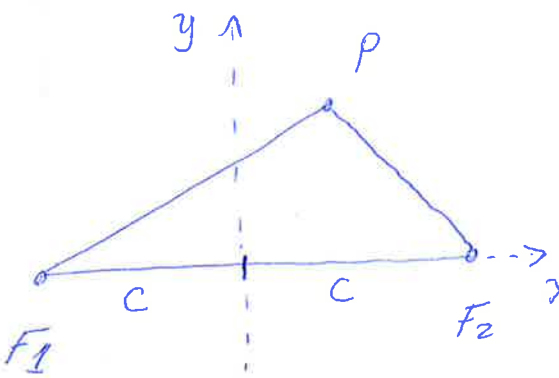
Elevando ao quadrado novamente

$$a^2\left[(x+c)^2+y^2\right] = a^4 + 2a^2cx + c^2x^2$$

$$a^2\left[x^2 + \cancel{2cx} + c^2 + y^2\right] = a^4 + \cancel{2a^2cx} + c^2x^2$$

$$(a^2-c^2)x^2 + a^2y^2 = a^4 - a^2c^2$$

$$(a^2-c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2-c^2)$$



Pela desigualdade triangular

$|F_1P| + |F_2P| = 2a \geq 2c$

Logo, $a \geq c$ e

$a^2 - c^2 \geq 0$

Vamos definir $\boxed{b^2 = a^2 - c^2}$

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

dividindo por a^2b^2

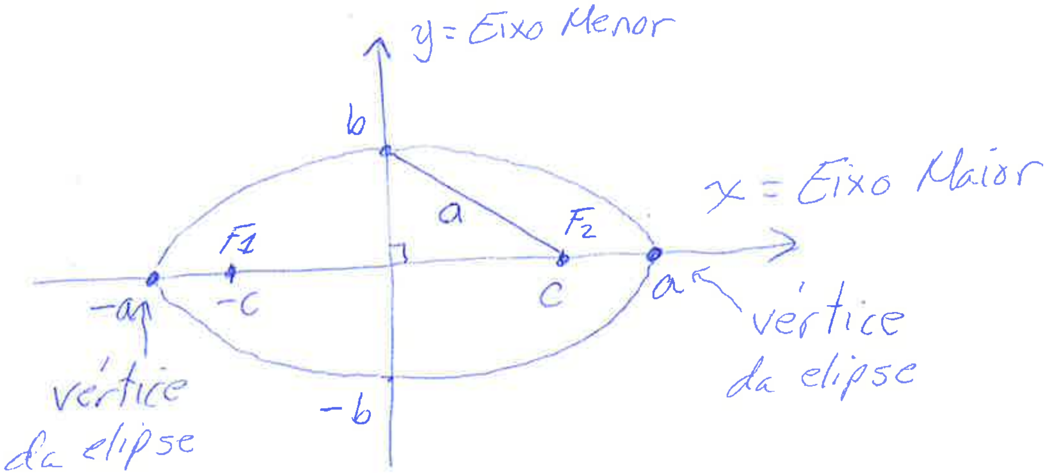
$$\boxed{\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1}$$ Eq. da Elipse

- Como $b^2 = a^2 - c^2 \leq a^2 \Rightarrow b \leq a$

com $b = a = r$ se $c = 0$ (os dois focos estão na origem) $x^2 + y^2 = r^2$
a elipse se transforma numa circunferência

- Para $y = 0 \longrightarrow \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{0}{b}\right)^2 = 1 \longrightarrow x = -a$ e $x = a$

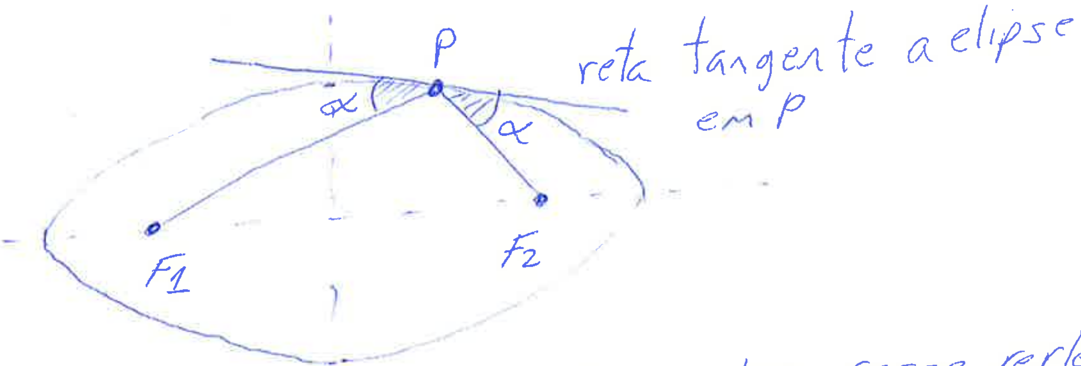
Para $x = 0 \longrightarrow \left(\frac{0}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1 \longrightarrow y = -b$ e $y = a$.



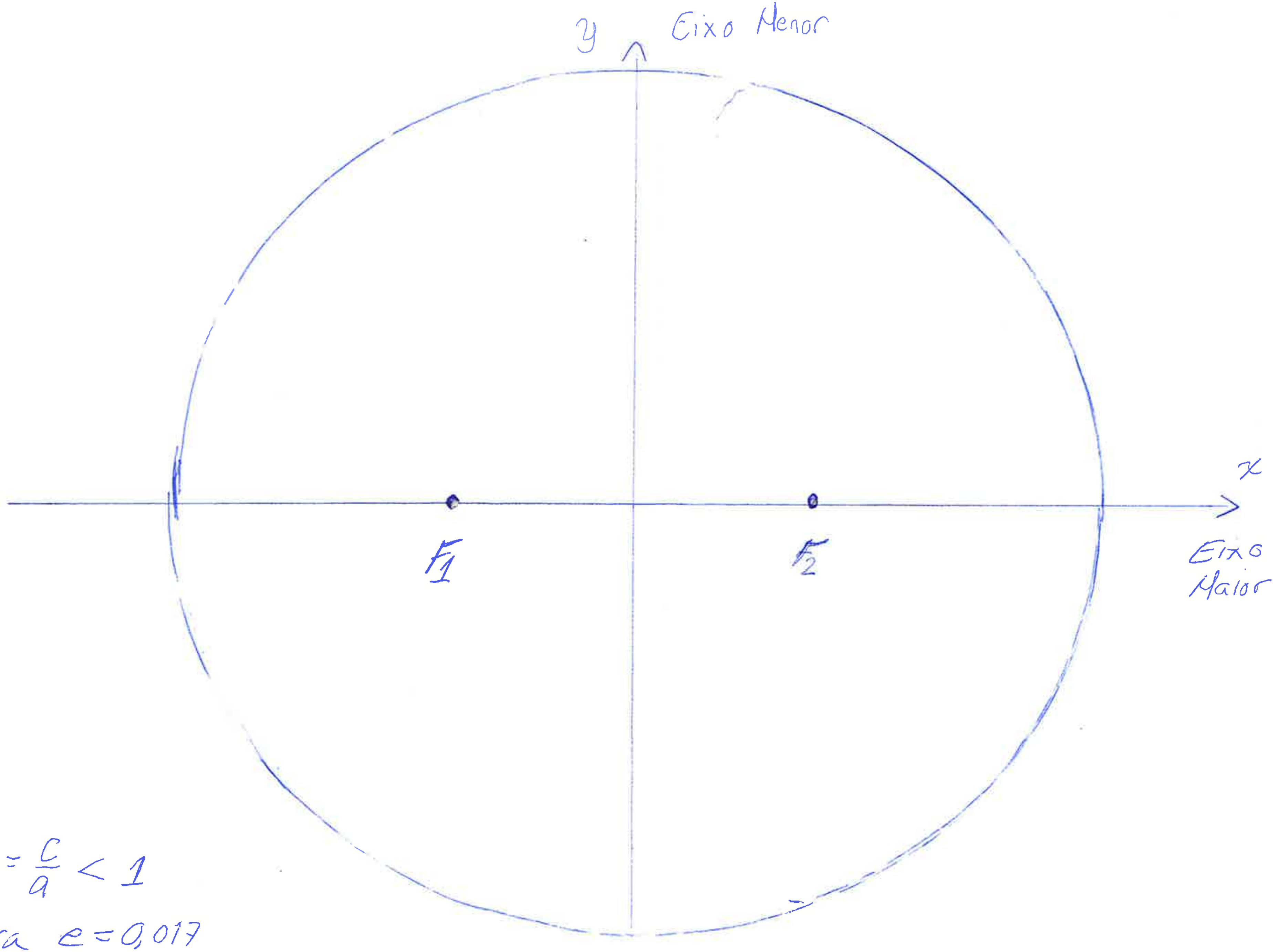
Resumindo: $\boxed{\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1}$ e $\boxed{b^2 = a^2 - c^2}$ $\boxed{\text{Focos em } (-c,0) \text{ e } (c,0)}$

Propriedade da Reflexão da Elipse

Uma reta tangente a uma elipse em um ponto P faz ângulos iguais com as retas que unem P aos focos.



Se tiver uma fonte de luz em F1 e a luz fosse refletida na elipse o feixe de luz seria concentrado em F2.
"enfocado"



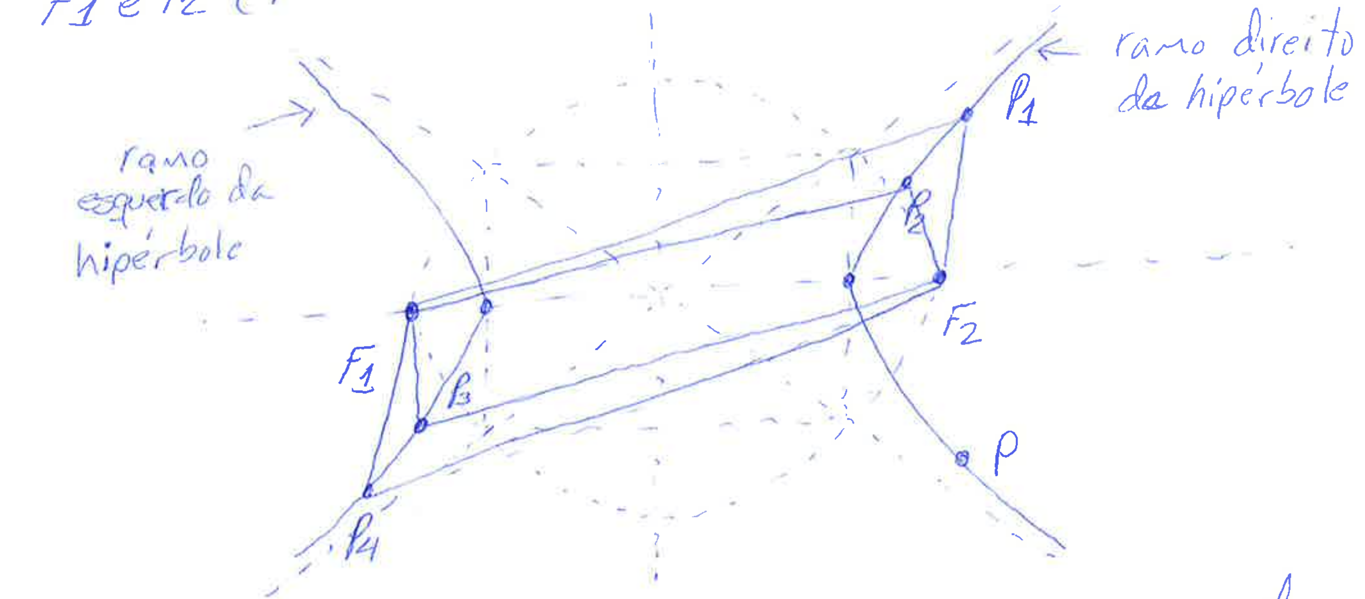
$e = \frac{c}{a} < 1$

Terra $e = 0{,}017$

Cometa Halley $e = 0{,}970$

Hipérbole

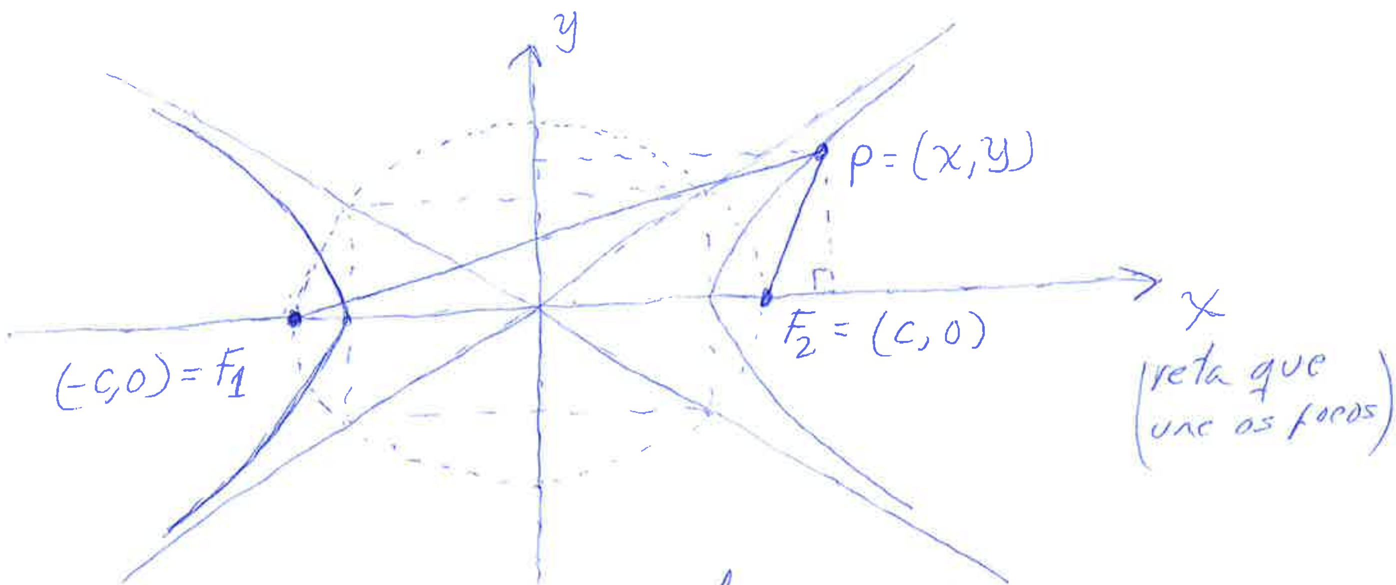
Uma hipérbole é o conjunto de todos os pontos em um plano cuja diferença entre as distâncias a dois pontos fixos, F_1 e F_2 (focos), é constante.



ramo direito → $|F_1P_1| - |F_2P_1| = |F_1P_2| - |F_2P_2| = +2a = cte$, $a>0$

ramo esquerdo → $|F_1P_3| - |F_2P_3| = |F_1P_4| - |F_2P_4| = -2a = cte$, $a>0$.

Vamos deduzir a eq. no caso do ramo direito.



$$|F_1P| - |F_2P| = +2a = cte, \quad a>0.$$

$$\sqrt{\underbrace{(2c+x-c)^2}_{(x+c)^2}+y^2} - \sqrt{(x-c)^2+y^2} = 2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} = 2a + \sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

$$(x+c)^2+\cancel{y^2} = 4a^2+4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+(x-c)^2+\cancel{y^2}$$

$$\cancel{x^2}+2xc+\cancel{c^2} = 4a^2+4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+\cancel{x^2}-2xc+\cancel{c^2}$$

$$\cancel{4}xc-\cancel{4}a^2 = \cancel{4}a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

$$xc-a^2 = a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

$$x^2c^2-\cancel{2xca^2}+a^4 = a^2[x^2-\cancel{2xc}+c^2+y^2]$$

$$x^2c^2+a^4 = a^2x^2+a^2c^2+a^2y^2$$

$$a^2x^2+a^2y^2+a^2c^2 = c^2x^2+a^4$$

$$\cancel{(a^2-c^2)x^2+a^2y^2 = a^4-a^2c^2}$$

$$\cancel{(a^2-c^2)x^2+a^2y^2 = a^2(a^2-c^2)}$$ ← Elipse

$$\cancel{\boxed{b^2=a^2-c^2}}$$

$$\cancel{b^2x^2+a^2}$$

$$(c^2-a^2)x^2-a^2y^2 = a^2c^2-a^4$$

$$(c^2-a^2)x^2-a^2y^2 = a^2(c^2-a^2)$$

$$\boxed{b^2=c^2-a^2}$$ ← Hipérbole $(c>a)$

$$b^2x^2-a^2y^2 = a^2b^2$$

$$\boxed{\left(\frac{x}{a}\right)^2-\left(\frac{y}{b}\right)^2=1}$$

3

- Se $x=0 \rightarrow \left(\frac{0}{a}\right)^2-\left(\frac{y}{b}\right)^2=1 \rightarrow \left(\frac{y}{b}\right)^2=-1$

Não existe solução real. A curva não corta o eixo y $(x=0)$.

- Se $y=0 \rightarrow \left(\frac{x}{a}\right)^2-\left(\frac{0}{b}\right)^2=1 \rightarrow \left(\frac{x}{a}\right)^2=1 \rightarrow \boxed{x=\pm a}$

Vértices da Hipérbole

- Assíntotas Inclinadas da Hipérbole

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \quad \leftarrow \text{Eq. da Hipérbole}$$

$$\frac{y^2}{b^2}=\frac{x^2}{a^2}-1=\frac{x^2-a^2}{a^2}$$

$$y^2=\left(\frac{b}{a}\right)^2(x^2-a^2)$$

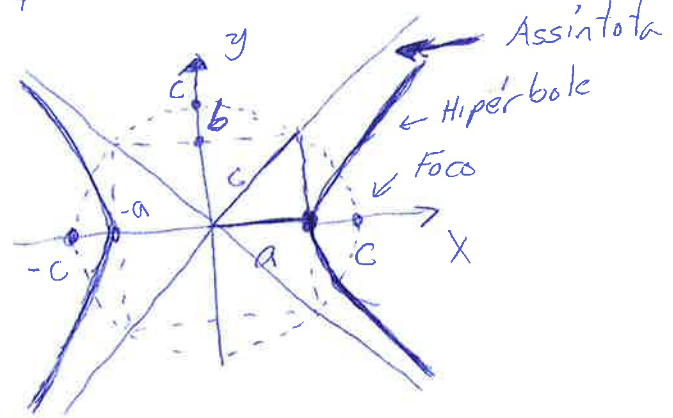
$$y(x)=\pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$$

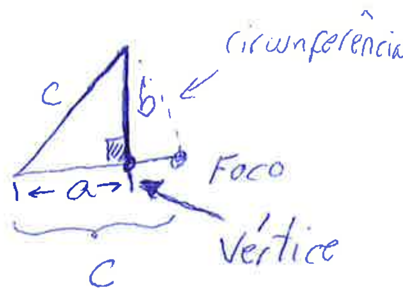
Note que quando $x\rightarrow\pm\infty$, x^2 é muito maior que a^2, e ($x^2 \gg a^2$)

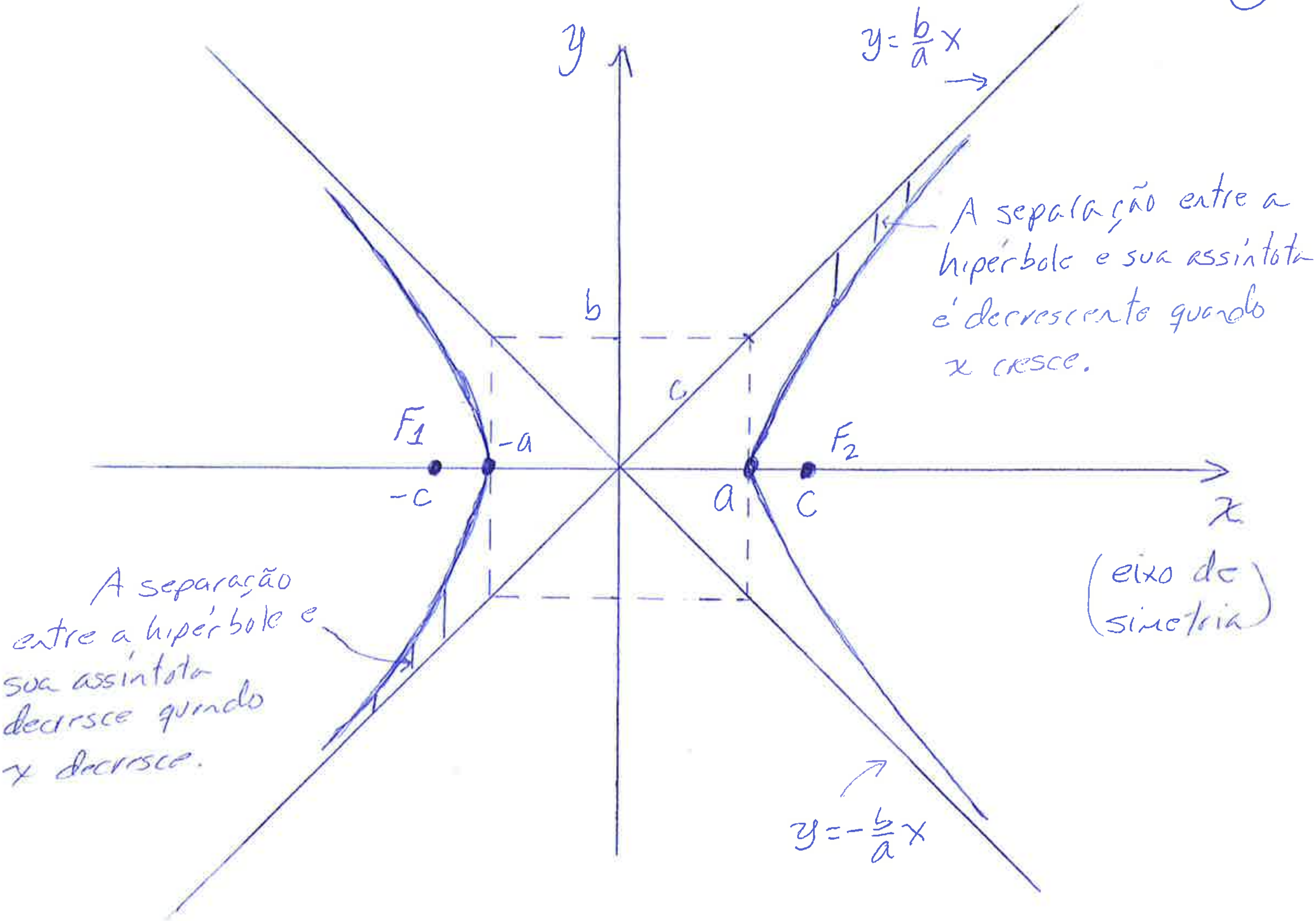
$\sqrt{x^2-a^2}\longrightarrow\sqrt{x^2}=x.$

Logo, as retas $y=\pm\frac{b}{a}x$ serão assíntotas inclinadas da hipérbole.

- Lembrando que na hipérbole $b^2=c^2-a^2$ ou $a^2+b^2=c^2$







- Uma forma rápida de encontrar as assíntotas é trocar $\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = \boxed{1}$

por $\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = \boxed{0}$

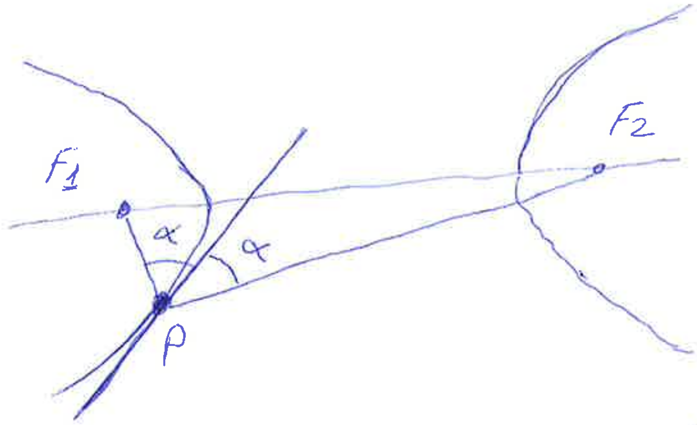
$$\left(\frac{y}{b}\right)^2 = \left(\frac{x}{a}\right)^2$$

$$\boxed{y = \pm \frac{b}{a} x}$$

- Se $a=b$ a hipérbole é chamada equilátera.

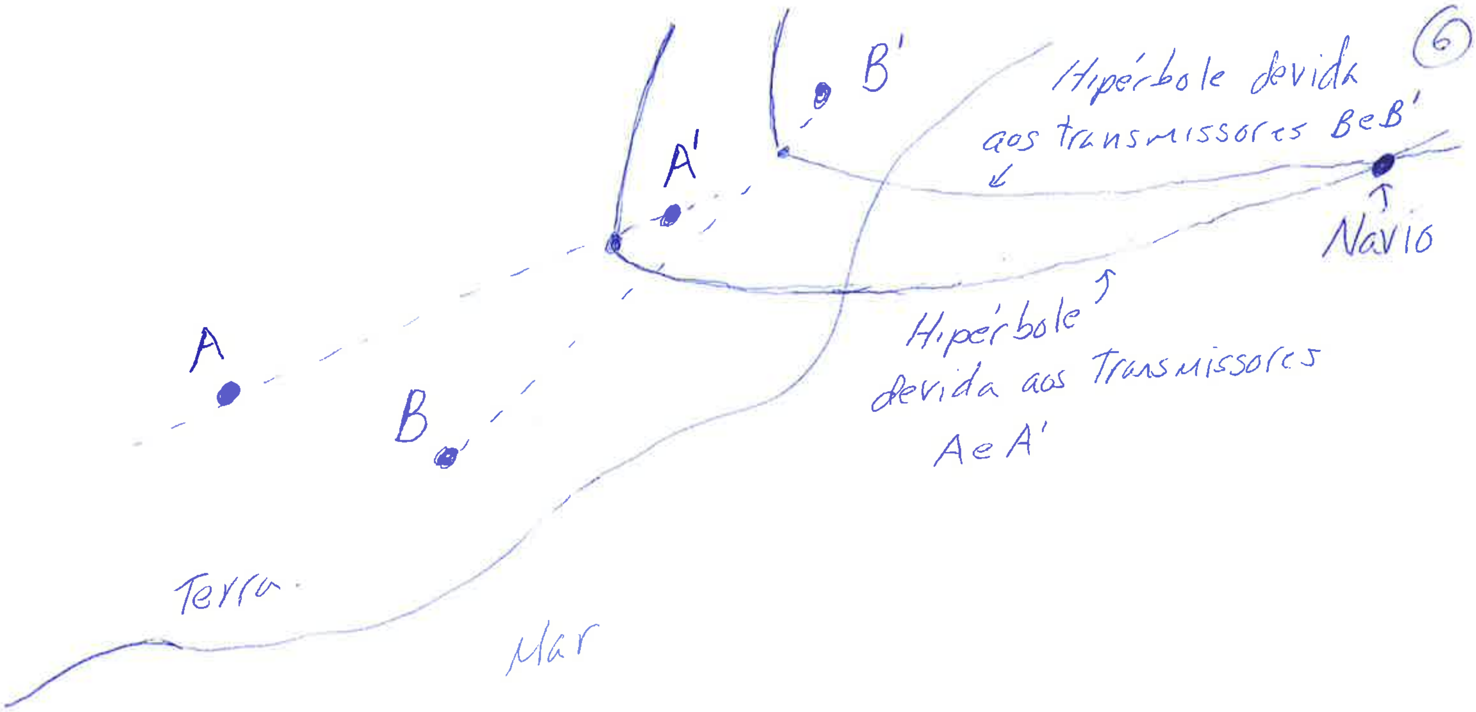
Propriedade de Reflexão da Hipérbole

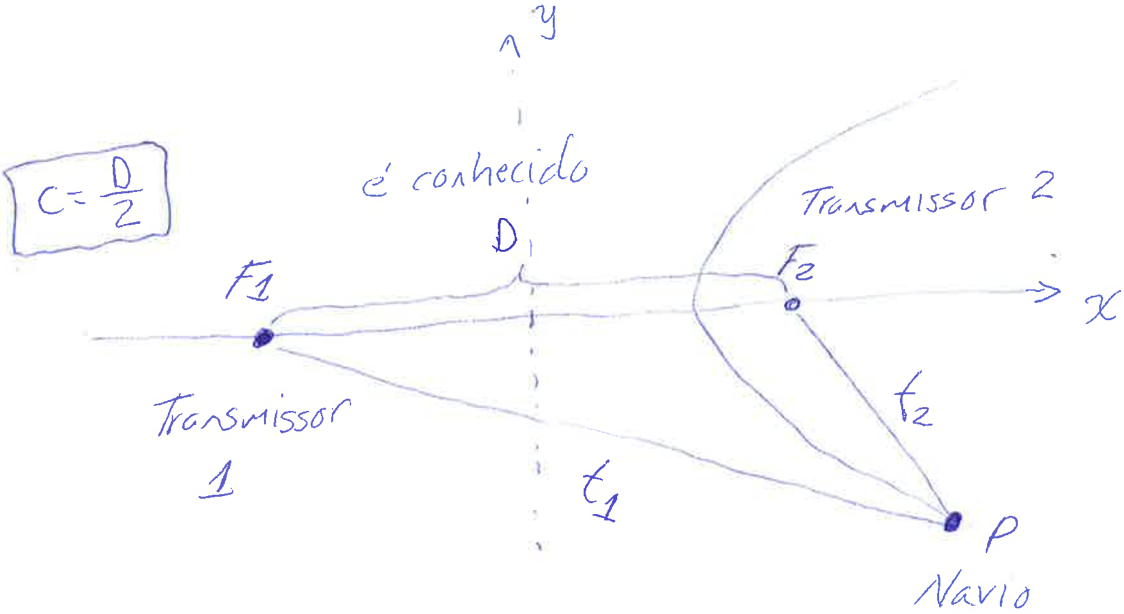
Uma reta tangente à hipérbole em um ponto P faz ângulos iguais com as retas que unem P aos focos.



Sistemas de Navegação Hiperbólicos

Foram desenvolvidos durante a Segunda Guerra Mundial para ajudar na navegação de navios. O navio recebe sinais sincronizados de rádio de dois transmissores a grande distância com suas posições conhecidas. O receptor eletrônico do navio mede a diferença nos tempos de recepção entre os sinais (Δt) e usa esse Δt para calcular a distância entre os transmissores. Essa informação coloca o navio em algum ponto de uma hipérbole com focos nos transmissores. Repetindo-se o processo com um segundo conjunto de transmissores a posição pode ser aproximada pela interseção de duas hipérboles. O GPS atual também é baseado no mesmo princípio. Veja o diagrama na próxima página.





de t_1 e t_2 $\longrightarrow$ $\Delta t = t_1 - t_2$ (conhecido) (medido)

$$\underbrace{|F_1P| - |F_2P|}_{\text{diferença de distância aos transmissores}} = \underbrace{v}_{\text{velocidade de propagação da onda do transmissor}} \cdot \Delta t$$

mas $|F_1P| - |F_2P| = 2a$ $\leftarrow$ Eq. da Hipérbole

logo $\boxed{a = \frac{v \cdot \Delta t}{2}}$

é uma hipérbole $b^2 = c^2 - a^2$

$$b^2 = \frac{D^2}{4} - \frac{v^2 \Delta t^2}{4}$$

$$\boxed{b = \frac{1}{2}\sqrt{D^2 - v^2 \Delta t^2}}$$

$$\left(\frac{2x}{v \cdot \Delta t}\right)^2 - \left(\frac{2y}{\sqrt{D^2 - v^2 \Delta t^2}}\right)^2 = 1$$

$$\boxed{\frac{4}{v^2 \cdot \Delta t^2} x^2 - \frac{4}{D^2 - v^2 \Delta t^2} y^2 = 1}$$

Exemplo de redução de uma cônica na sua forma padrão

- Uma equação do tipo:

$$a_1 x^2 + a_2 y^2 + a_3 xy + a_4 x + a_5 y + a_6 = 0$$

onde a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 e $a_6 \in \mathbb{R}$ representa uma cônica.

- Vamos estudar como reduzir uma eq. de esse tipo a forma ~~[illegible]~~ padrão.

- Primeiro, vamos considerar que não existe o termo mixto "xy". Isto é, $a_3 = 0$. Nesse caso basta completar quadrados.

Ex.: $6x^2 - 4y^2 + 8y - 24x + 16 = 0$

$$(6x^2 - 24x) + (-4y^2 + 8y) = -16$$

$$(\sqrt{6}x - a)^2$$

$$6x^2 - 2\sqrt{6}ax + a^2$$

logo

$$\cancel{2}\sqrt{6}a = \cancel{24}^{\,12}$$

$$a = \frac{12}{\sqrt{6}} = 2\sqrt{6}$$

temos que somar e restar $a^2 = 24$

$$-1(4y^2 - 8y)$$

$$(2y - b)^2 = 4y^2 - 4yb + b^2$$

$$4b = 8 \Rightarrow b = 2$$

Somar e Restar

$$b^2 = 4$$

$$\underbrace{6x^2-24x+\underbrace{24-24}_{0}}-(\underbrace{4y^2-8y+\underbrace{4-4}_{0}})=-16$$

$$(\sqrt{6}x-2\sqrt{6})^2-24-\left[(2y-2)^2-4\right]=-16$$

$$6(x-2)^2-4(y-1)^2=-16+24-4=4$$

$$6(x-2)^2-4(y-1)^2=4$$

$$\frac{6}{4}(x-2)^2-(y-1)^2=1$$

$$\frac{(x-2)^2}{2/3}-\frac{(y-1)^2}{1}=1$$

$$\left(\frac{x-2}{\sqrt{2/3}}\right)^2-\left(\frac{y-1}{1}\right)^2=1$$

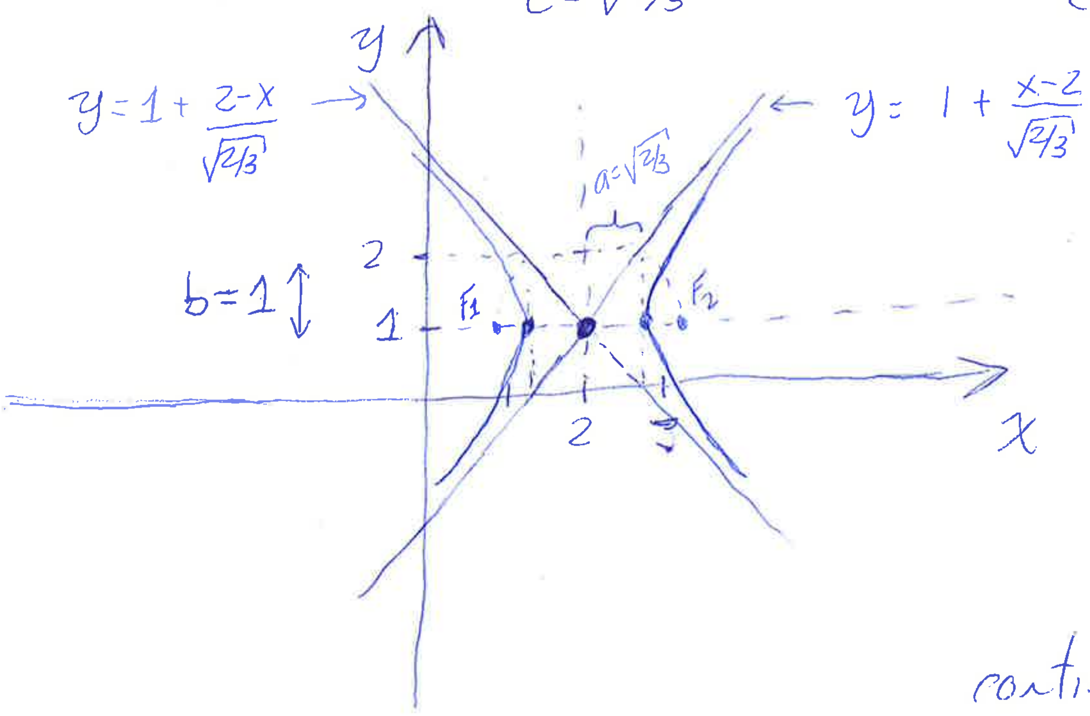
Hipérbole com centro em ~~(2, 1)~~ $(2,1)$

$a=\sqrt{2/3}\approx 0{,}816497$

$b=1,$

$c^2=a^2+b^2=2/3+1=5/3$

$c=\sqrt{5/3}\approx 1{,}29099$



continua...

Para encontrar as assíntotas trocamos 1 por 0 na eq. da Hipérbole

$$\left(\frac{x-2}{\sqrt{2/3}}\right)^2 - \left(\frac{y-1}{1}\right)^2 = 1 \quad \leftarrow \text{Eq. da Hipérbole}$$

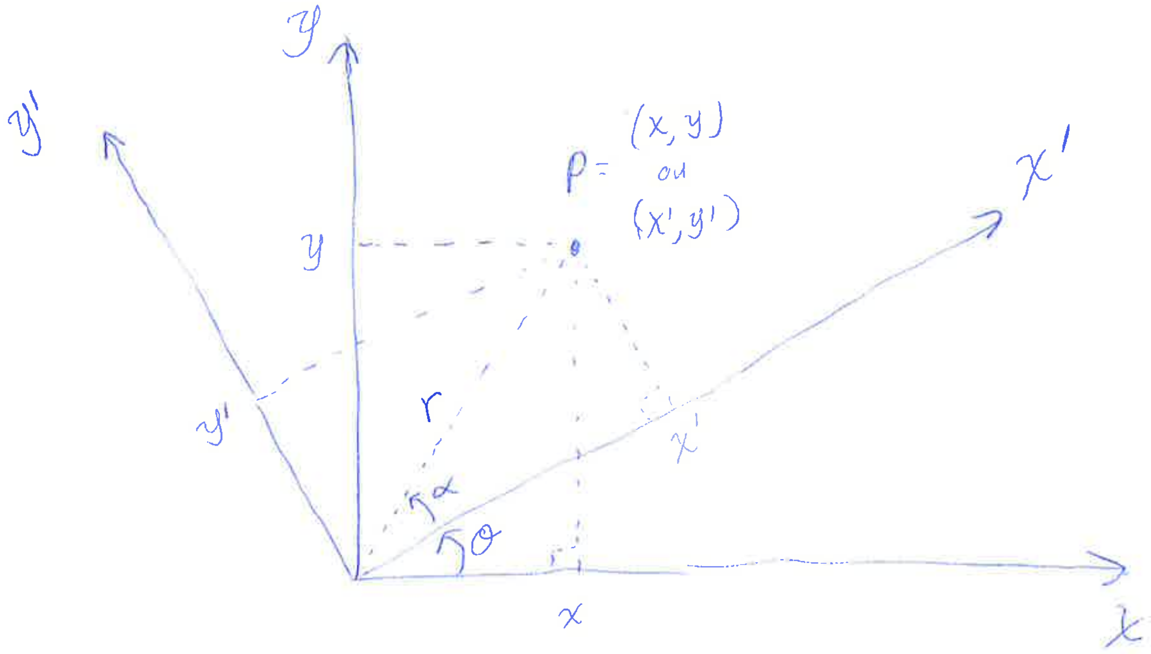
$$\left(\frac{x-2}{\sqrt{2/3}}\right)^2 - \left(\frac{y-1}{1}\right)^2 = 0 \quad \leftarrow \text{Eq. das Assíntotas}$$

$$(y-1)^2 = \left(\frac{x-2}{\sqrt{2/3}}\right)^2$$

$$\boxed{y = 1 + \frac{x-2}{\sqrt{2/3}}}$$

$$\boxed{y = 1 + \frac{2-x}{\sqrt{2/3}}}$$

Rotação de Eixos Coordenados



$$\begin{cases} x = r\cos(\alpha+\theta) \\ y = r\,\mathrm{sen}(\alpha+\theta) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' = r\cos(\alpha) \\ y' = r\,\mathrm{sen}(\alpha) \end{cases}$$

$$\cos(\alpha+\theta) = \cos(\alpha)\cos(\theta) - \mathrm{sen}(\alpha)\mathrm{sen}(\theta)$$
$$\mathrm{sen}(\alpha+\theta) = \mathrm{sen}(\alpha)\cos(\theta) + \cos(\alpha)\mathrm{sen}(\theta)$$

Identidades Trigonométricas

$$\begin{cases} x = \underbrace{r\cos(\alpha)}_{x'}\cos(\theta) - \underbrace{r\,\mathrm{sen}(\alpha)}_{y'}\mathrm{sen}(\theta) \\ y = \underbrace{r\,\mathrm{sen}(\alpha)}_{y'}\cos(\theta) + \underbrace{r\cos(\alpha)}_{x'}\mathrm{sen}(\theta) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = x'\cos(\theta) - y'\,\mathrm{sen}(\theta) \\ y = y'\cos(\theta) + x'\,\mathrm{sen}(\theta) \end{cases}$$

ou

$$\begin{cases} x = x'\cos(\theta) - y'\,\mathrm{sen}(\theta) \\ y = x'\,\mathrm{sen}(\theta) + y'\cos(\theta) \end{cases} \qquad (x,y) \leftarrow (x',y')$$

ou

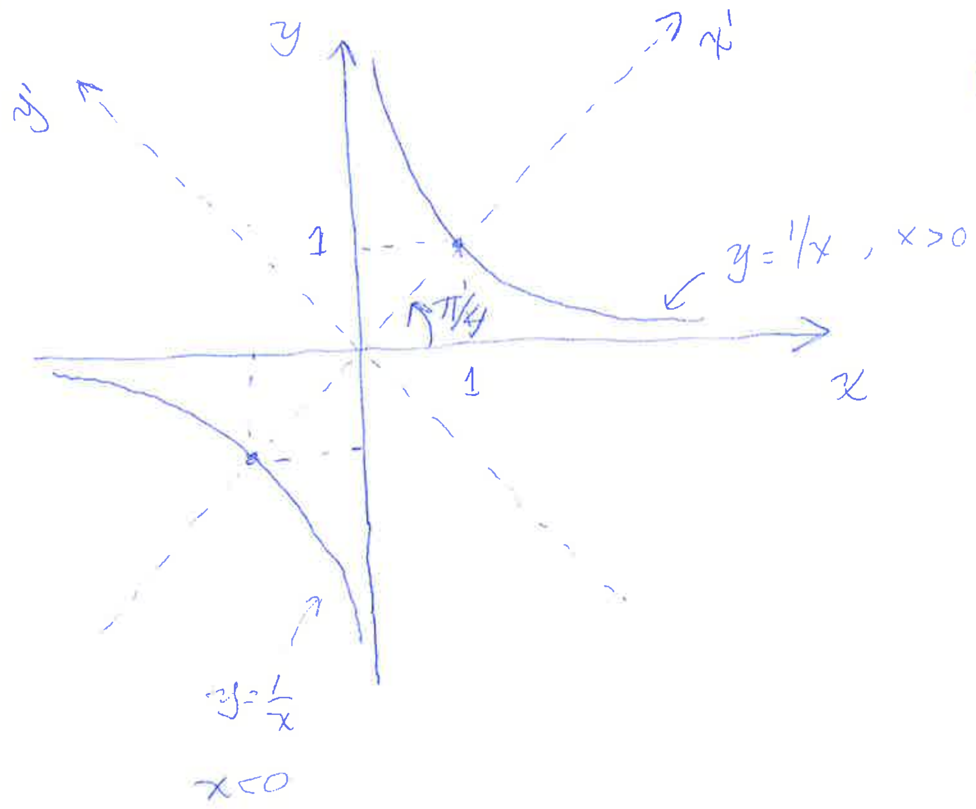
$$(\mathrm{I}) \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\mathrm{sen}(\theta) \\ \mathrm{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

Em forma matricial

A transformação inversa é

$$(\mathrm{II}) \quad \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \mathrm{sen}(\theta) \\ -\mathrm{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad (x',y') \leftarrow (x,y)$$

Exemplo: Mostre que a curva $y = \frac{1}{x}$ é uma hipérbole. Gire os eixos coordenados em 45° em sentido anti-horário.



$$\boxed{y = \frac{1}{x} \quad \text{ou} \quad xy = 1}$$

termo misto

$$\begin{cases} x = x'\cos(\theta) - y'\,\mathrm{sen}(\theta) \\ y = x'\,\mathrm{sen}(\theta) + y'\cos(\theta) \\ \theta = \pi/4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = x'\frac{\sqrt{2}}{2} - y'\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}(x'-y') \\ y = x'\frac{\sqrt{2}}{2} + y'\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}(x'+y') \end{cases}$$

$y = \frac{1}{x}$ ou $xy = 1$

$$\underbrace{\frac{\sqrt{2}}{2}(x'-y')}_{x} \cdot \underbrace{\frac{\sqrt{2}}{2}(x'+y')}_{y} = 1$$

$$\frac{1}{2}(x'-y')(x'+y') = 1$$

$$\frac{1}{2}(x'^2 - y'^2) = 1$$

$$\left(\frac{x'}{\sqrt{2}}\right)^2 - \left(\frac{y'}{\sqrt{2}}\right)^2 = 1 \leftarrow$$ Eq. de uma Hipérbole Equilátera $a = b = \sqrt{2}$

- Teorema: Se a equação da cônica

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

for tal que $B \neq 0$ e se um sistema de coordenadas $x'y'$ tiver sido obtido pela rotação dos eixos xy por um ângulo satisfazendo

$$\mathrm{cotg}(2\theta) = \frac{\cos(2\theta)}{\mathrm{sen}(2\theta)} = \frac{A-C}{B}$$

então, no sistema de coordenadas $x'y'$ a eq da cônica será da forma $A'x'^2 + C'y'^2 + D'x' + E'y' + F' = 0$ $(B'=0)$ ∎

Prova: Pela substituição de

$$\begin{cases} x = x'\cos(\theta) - y'\operatorname{sen}(\theta) \\ y = x'\operatorname{sen}(\theta) + y'\cos(\theta) \end{cases}$$

em

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

obtemos que

$$A'x'^2 + B'x'y' + C'y'^2 + D'x' + E'y' + F' = 0$$

onde

Verifique

$$\begin{cases} A' = A\cos^2(\theta) + B\cos(\theta)\operatorname{sen}(\theta) + C\operatorname{sen}^2(\theta) \\ B' = B\cos(2\theta) + (C-A)\operatorname{sen}(2\theta) \\ C' = A\operatorname{sen}^2(\theta) - B\operatorname{sen}(\theta)\cos(\theta) + C\cos^2(\theta) \\ D' = D\cos(\theta) + E\operatorname{sen}(\theta) \\ E' = -D\operatorname{sen}(\theta) + E\cos(\theta) \\ F' = F \end{cases}$$

Adicionalmente, note que se $B' = 0$ então

$$0 = B\cos(2\theta) + (C-A)\operatorname{sen}(2\theta)$$

$$(A-C)\operatorname{sen}(2\theta) = B\cos(2\theta)$$

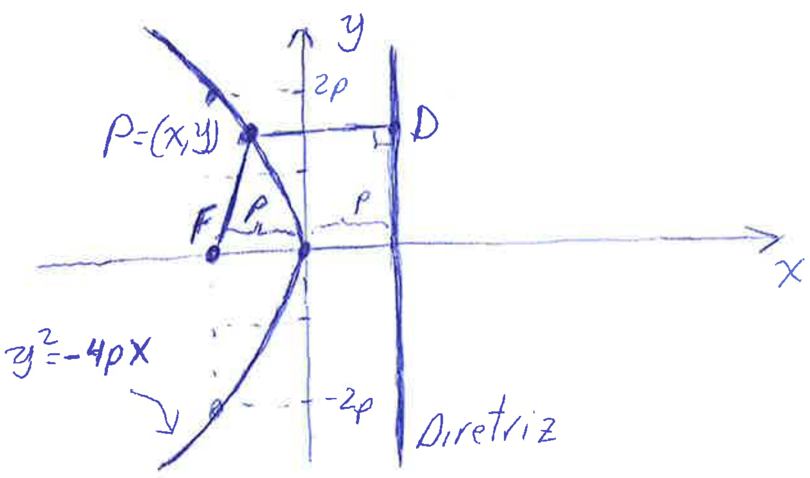
$$\frac{\cos(2\theta)}{\operatorname{sen}(2\theta)} = \frac{A-C}{B}$$

$\blacksquare$

O ângulo θ deve ser escolhido no intervalo entre zero e $\pi/2$.

Seções Cônicas em Coordenadas Polares

Excentricidade (e): uma constante positiva ou zero

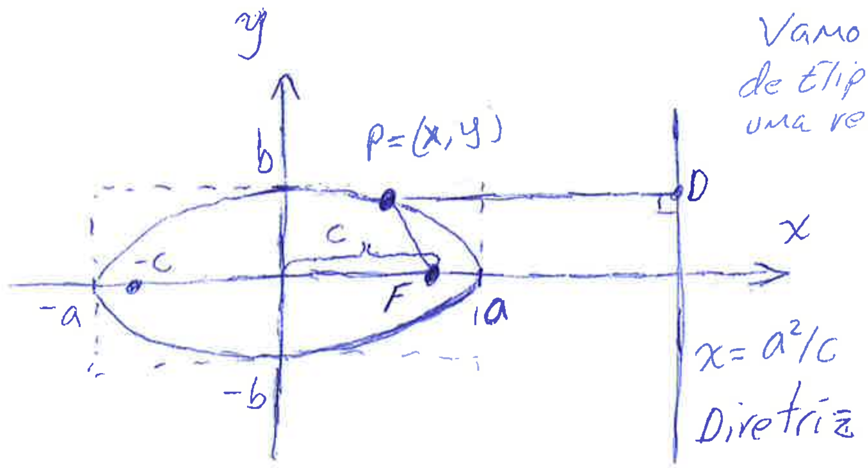


Parábola por Definição

$$|PF| = |PD|$$

$$e = \frac{|PF|}{|PD|} = 1$$

Para uma parábola a excentricidade é 1 sempre.

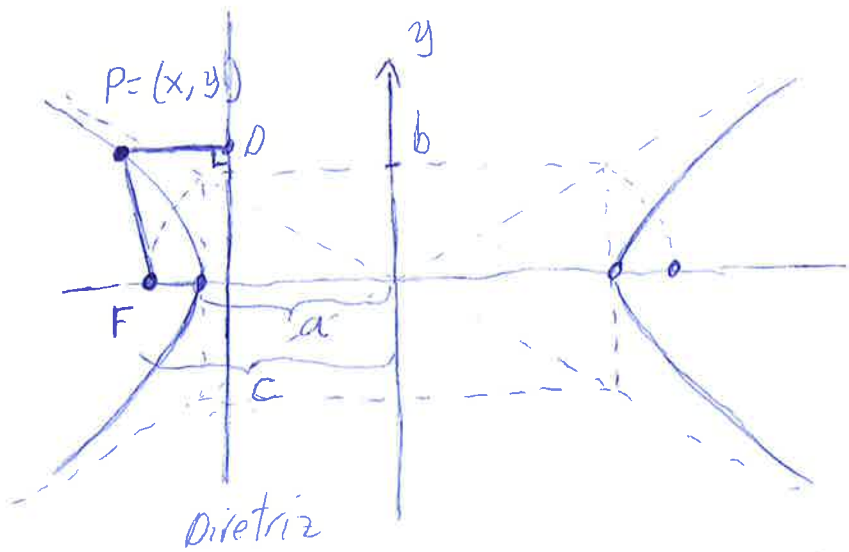


Vamos usar uma definição de Elipse com um único foco e uma reta diretriz.

Para uma Elipse

$$e = \frac{|PF|}{|PD|} < 1$$

$$0 \leq e < 1$$



Também podemos definir uma hipérbole com um único foco e uma reta diretriz de tal forma que para todos os pontos

$$e = \frac{|PF|}{|PD|} > 1$$

Propriedade Foco-Diretriz das Cônicas:

O conjunto de todos os pontos P de um plano tais que a distância a um ponto fixo (FOCO) dividida pela distância a uma reta diretriz é constante define uma seção cônica: ②

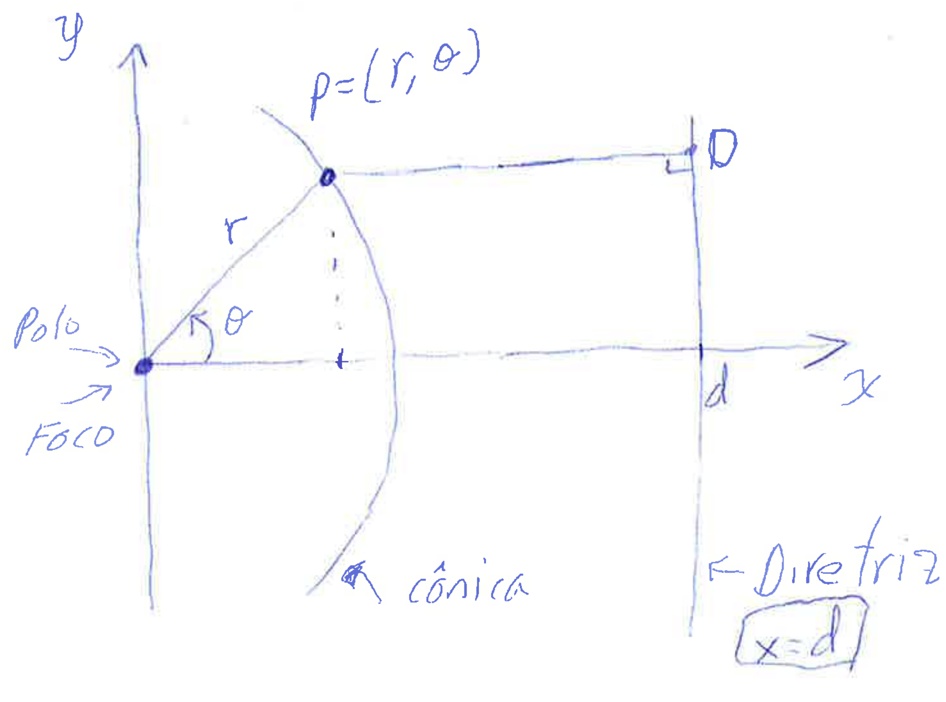
$$\frac{|PF|}{|PD|} = cte = e = \text{excentricidade}$$

$e = 1 \Rightarrow$ Parábola

$0 \leq e < 1 \Rightarrow$ Elipse

$e > 1 \Rightarrow$ Hipérbole.

Agora vamos descrever uma cônica em coordenadas polares colocando o Polo em um foco.



$$\frac{|PF|}{|PD|} = e = cte \rightarrow \text{Definição de Cônica}$$

mas $|PF| = r$ e $|PD| = d - r\cos(\theta)$

logo $\dfrac{r}{d - r\cos(\theta)} = e = cte$

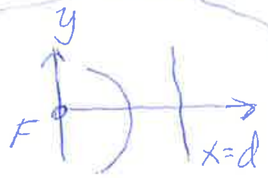
$$r = ed - er\cos(\theta)$$

$$r + er\cos(\theta) = ed$$

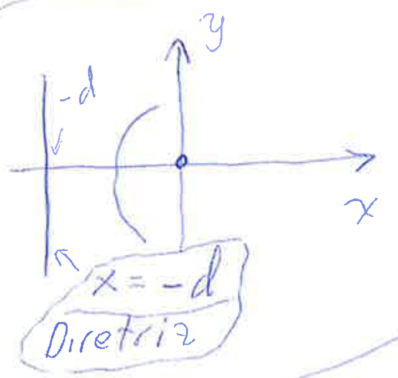
$$r(1 + e\cos(\theta)) = ed$$

$$\boxed{r(\theta) = \frac{ed}{1 + e\cos(\theta)}}$$

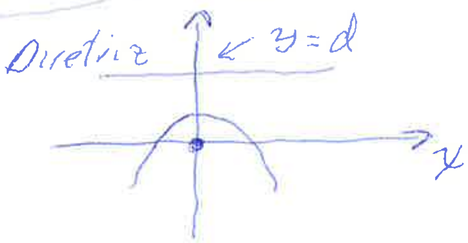
Diretriz em $x = d$



Alternativamente, podemos colocar a reta diretriz em outras três posições

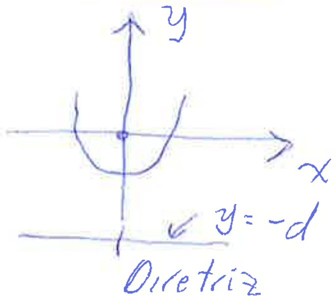


$$\Longrightarrow \boxed{r(\theta) = \frac{ed}{1 - e\cos(\theta)}}$$



$$\Downarrow$$

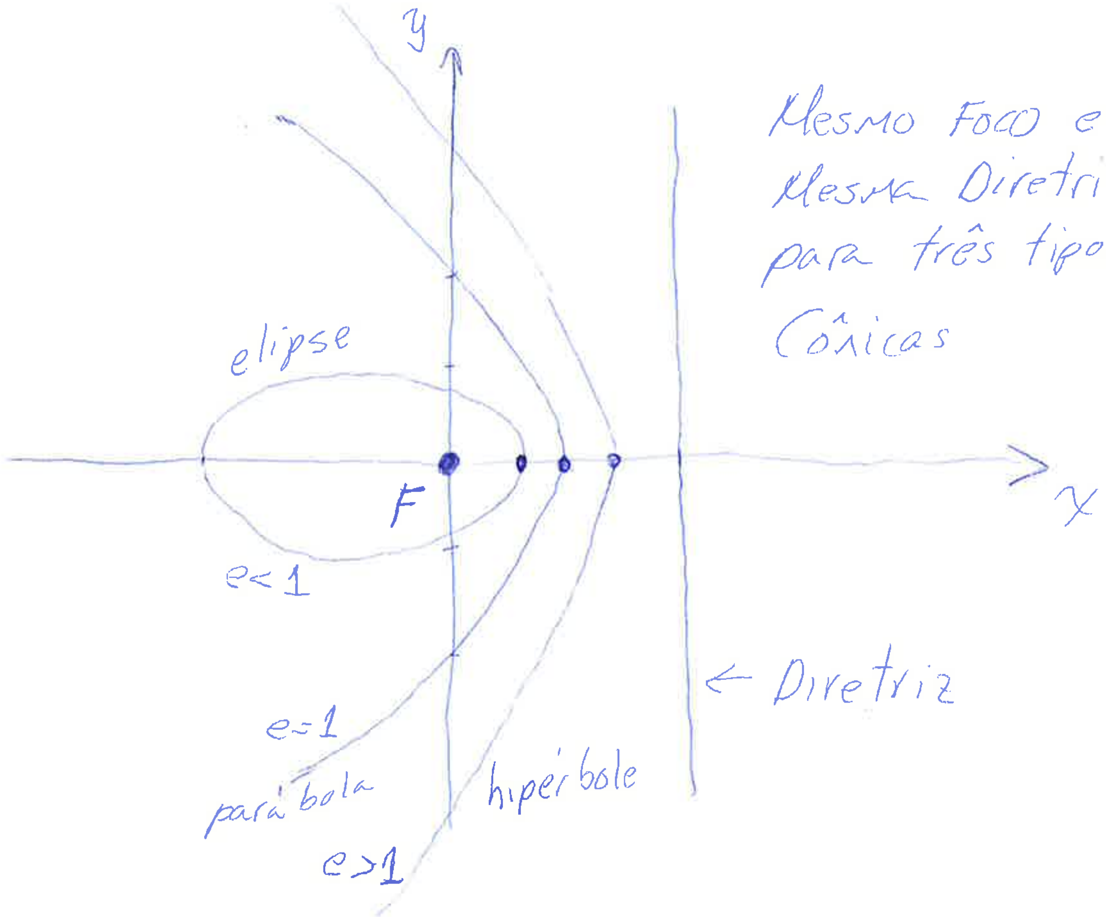
$$\boxed{r(\theta) = \frac{ed}{1 + e\,\text{sen}(\theta)}}$$



$$\Downarrow$$

$$\boxed{r(\theta) = \frac{ed}{1 - e\,\text{sen}(\theta)}}$$

(4)



Mesmo Foco e Mesma Diretriz para três tipos de Cônicas

- Prova que $\boxed{r(\theta) = \frac{ed}{1+e\cos(\theta)}}$ representa a ~~eq~~ a uma elipse ou uma hipérbole.

$$r(1+e\cos(\theta)) = ed$$

$$r + er\cos(\theta) = ed$$

$$r = ed - er\cos(\theta)$$

$$r = e(d - \underbrace{r\cos(\theta)}_{x})$$

$$r = e(d-x)$$

Elevando ao Quadrado

$$r^2 = e^2[d^2 - 2dx + x^2]$$

$$x^2+y^2 = e^2d^2 - 2e^2dx + e^2x^2$$

5

$$\underbrace{x^2 - e^2x^2} + 2e^2dx + y^2 = e^2d^2$$

$$(1-e^2)x^2 + 2e^2dx + y^2 = e^2d^2$$

Vamos supor que $e \neq 1$ (não é uma parábola) e dividir por $1-e^2$ os dois lados da eq. anterior

$$x^2 + \frac{2e^2d}{1-e^2}x + \frac{y^2}{1-e^2} = \frac{e^2d^2}{1-e^2}$$

Agora vamos completar quadrados em x.

$$\underbrace{x^2 + \frac{2e^2d}{1-e^2}x + \left[\frac{e^2d}{1-e^2}\right]^2} \underbrace{ - \left[\frac{e^2d}{1-e^2}\right]^2}_{0} + \frac{y^2}{1-e^2} = \frac{e^2d^2}{1-e^2}$$

$$\left(x + \frac{e^2d}{1-e^2}\right)^2 + \frac{y^2}{1-e^2} = \frac{e^2d^2}{1-e^2} + \left[\frac{e^2d}{1-e^2}\right]^2$$

$$'' \qquad = \frac{e^2d^2}{1-e^2}\left[1 + \frac{e^2}{1-e^2}\right]$$

$$'' \qquad = \frac{e^2d^2}{1-e^2} \cdot \left[\frac{1-e^2+e^2}{1-e^2}\right]$$

$$\left(x + \frac{e^2d}{1-e^2}\right)^2 + \frac{y^2}{1-e^2} = \frac{e^2d^2}{(1-e^2)^2}$$

Dividindo por $\frac{e^2d^2}{(1-e^2)^2}$ os dois lados

$$\frac{\left(x + \frac{e^2d}{1-e^2}\right)^2}{\frac{e^2d^2}{(1-e^2)^2}} + \frac{y^2}{\cancel{(1-e^2)}\frac{e^2d^2}{(1-e^2)^{\cancel{2}}}} = 1$$

$$(I)\quad \frac{\left(x+\frac{e^2d}{1-e^2}\right)^2}{\frac{e^2d^2}{(1-e^2)^2}} + \frac{y^2}{\frac{e^2d^2}{1-e^2}} = 1$$

- Se $e<1 \Rightarrow 1-e^2>0$

$$\boxed{a=\frac{ed}{1-e^2}}\quad \boxed{b=\frac{ed}{\sqrt{1-e^2}}}\quad \boxed{x_0=-\frac{e^2d}{1-e^2}}$$

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \rightarrow$$ Eq. de uma Elipse com centro em $(x_0,0)$ e semieixos a (maior) e b (menor)

- Se $e>1 \Rightarrow 1-e^2<0 \Rightarrow 1-e^2=-(\underbrace{e^2-1}_{>0})$. em (I).

Reescrevemos (I)

$$\frac{\left(x-\frac{e^2d}{e^2-1}\right)^2}{\frac{e^2d^2}{(1-e^2)^2}} - \frac{y^2}{\frac{e^2d^2}{e^2-1}} = 1$$

$$\boxed{a=\frac{ed}{e^2-1}}\quad \boxed{b=\frac{ed}{\sqrt{e^2-1}}}\quad \boxed{x_0=\frac{e^2d}{e^2-1}}$$

$$\left(\frac{x-x_0}{a}\right)^2-\left(\frac{y}{b}\right)^2=1 \rightarrow$$ Eq. de uma Hipérbole com centro em $(x_0,0)$.

Exemplos de Cônicas em Polares

Lembrando que a eq de uma cônica em polares é do tipo

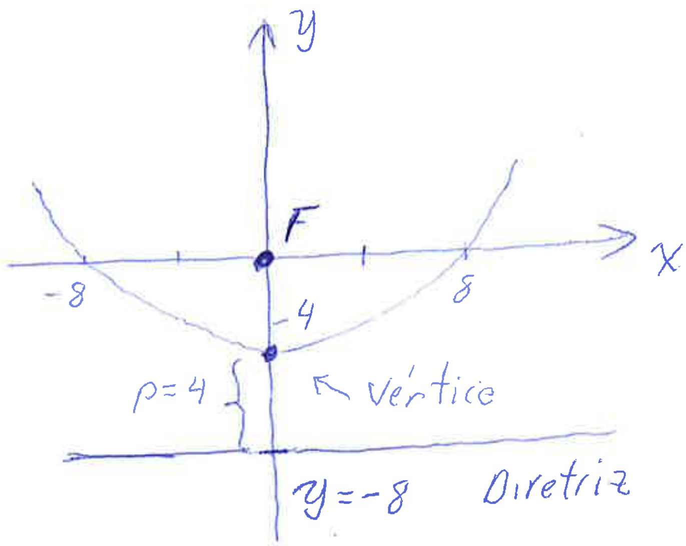
$$\boxed{r(\theta) = \frac{ed}{1 \pm e\cdot\begin{cases}\cos(\theta)\\ \operatorname{sen}(\theta)\end{cases}}}$$

com $\begin{cases}\cos(\theta) \to \text{eixo } x\\ \operatorname{sen}(\theta) \to \text{'' } y.\\ + \to \text{diretriz } +\\ - \to \text{'' } -\end{cases}$

Ex. 1: Esboce o gráfico $r = \dfrac{8}{1-\operatorname{sen}(\theta)}$.

Sol.: $e\cdot d = 8$ e $\underbrace{e=1}_{\text{parábola.}}$, logo $d = 8$,

Como é $\boxed{\text{seno e negativo}}$ significa que a diretriz é $\boxed{y=-8}$

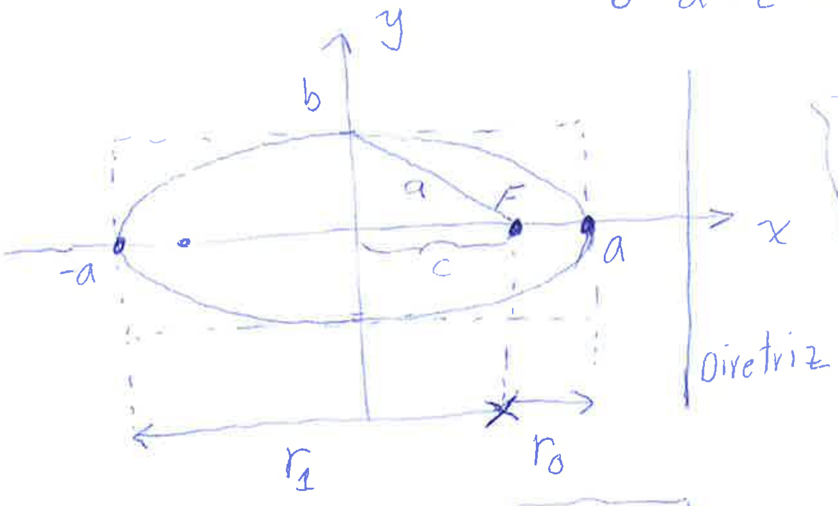


Em Cartesianas $\to$ $(y-y_0) = \frac{1}{4p}(x-x_0)^2$, $y_0 = -4$, $x_0 = 0$.

$$\boxed{(y+4) = \frac{1}{16}x^2}$$

Para uma elipse resumimos as informações fundamentais

$a > c$
$\Downarrow$
$b^2 = a^2 - c^2 \to b^2 + c^2 = a^2$



$r_0 \to$ Perigeu
$r_1 \to$ Apogeu.

com o Sol no foco
$r_0 \to$ periélio
$r_1 \to$ afélio

$\boxed{r_1 = a + c}$ $\boxed{r_0 = a - c}$

Colocando a e c em função de r_0 e r_1.

Média Aritmética $\to$ $\boxed{a = \frac{1}{2}(r_0 + r_1)}$ $\boxed{c = \frac{1}{2}(r_1 - r_0)}$

Adicionalmente, $r_0 \cdot r_1 = (a+c)(a-c) = a^2 - c^2 = b^2$

logo $\boxed{b = \sqrt{r_0 \cdot r_1}}$ Média Geométrica

Ex. 2: Esboce a cônica $r = \dfrac{16}{4 + 3\,\text{sen}(\theta)}$.

Sol.: No lugar do 4 deve aparecer um 1. Logo dividimos numerador e denominador por 4.

$$r = \frac{16/4}{\frac{4}{4} + \frac{3}{4}\text{sen}(\theta)} \longrightarrow r = \frac{4}{1 + 3/4\,\text{sen}(\theta)}$$

$4 \longrightarrow 4 = e \cdot d$

$3/4 \to e = 3/4 < 1 \to$ Elipse

mas $4 = \frac{3}{4} d \longrightarrow \frac{16}{3} = d$

sinal positivo e seno $\longrightarrow$ $\boxed{\text{diretriz} \quad y = \frac{16}{3}}$

$$- \text{Em } \theta = 0 \rightarrow r(0) = \frac{16}{4 + 3\underbrace{\operatorname{sen}(0)}_{0}} = 4$$

$$\theta = \pi \rightarrow r(\pi) = \frac{16}{4 + 3\underbrace{\operatorname{sen}(\pi)}_{0}} = 4$$

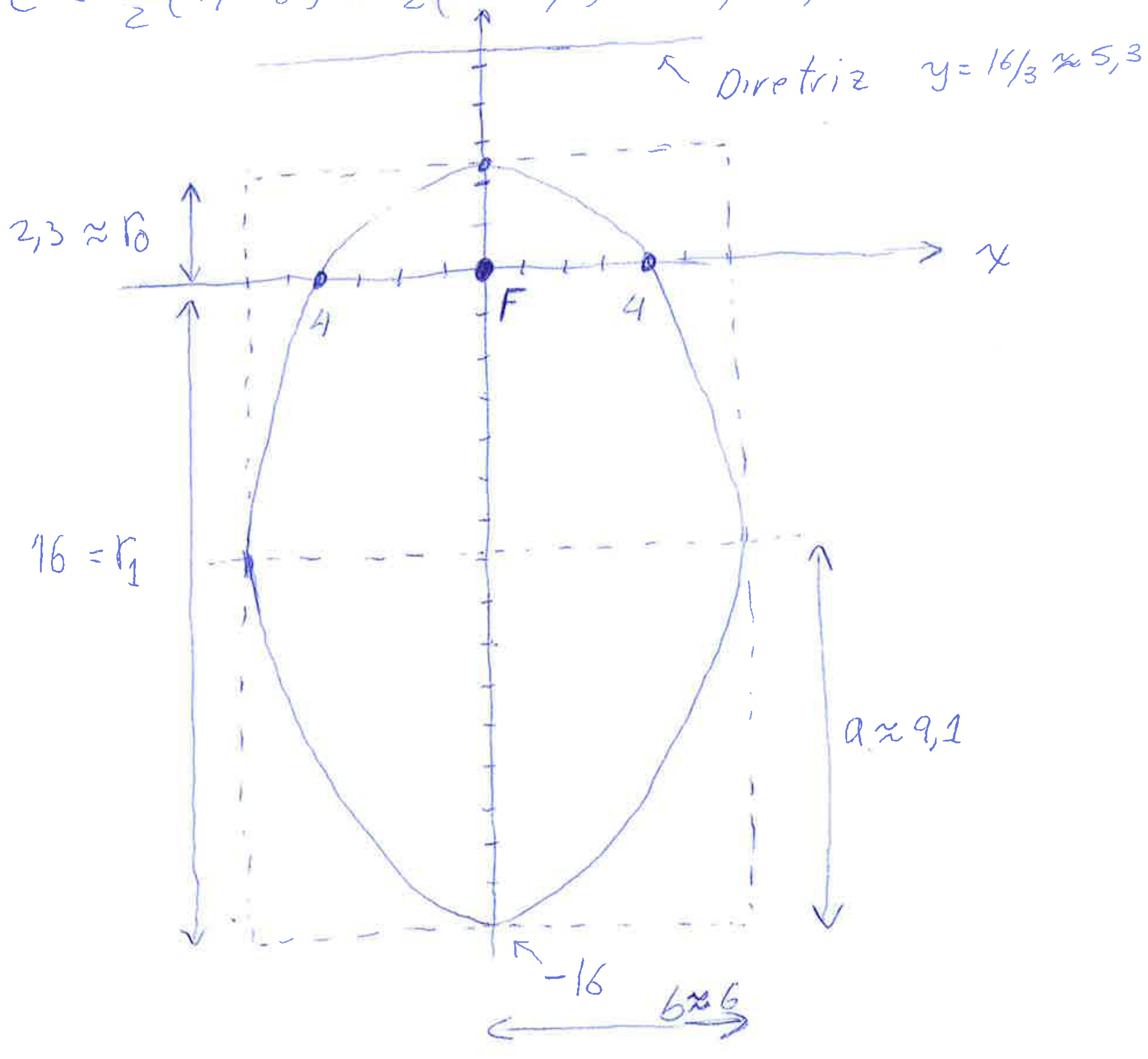
$$\theta = \pi/2 \quad \text{teremos} \quad r_0 = r(\pi/2) = \frac{16}{4 + 3 \cdot \underbrace{\operatorname{sen}(\pi/2)}_{1}} = \frac{16}{7} \approx 2{,}3$$

$$\theta = \frac{3\pi}{2} \quad \text{teremos} \quad r_1 = r(3\pi/2) = \frac{16}{4 + 3\underbrace{\operatorname{sen}(3\pi/2)}_{-1}} = 16$$

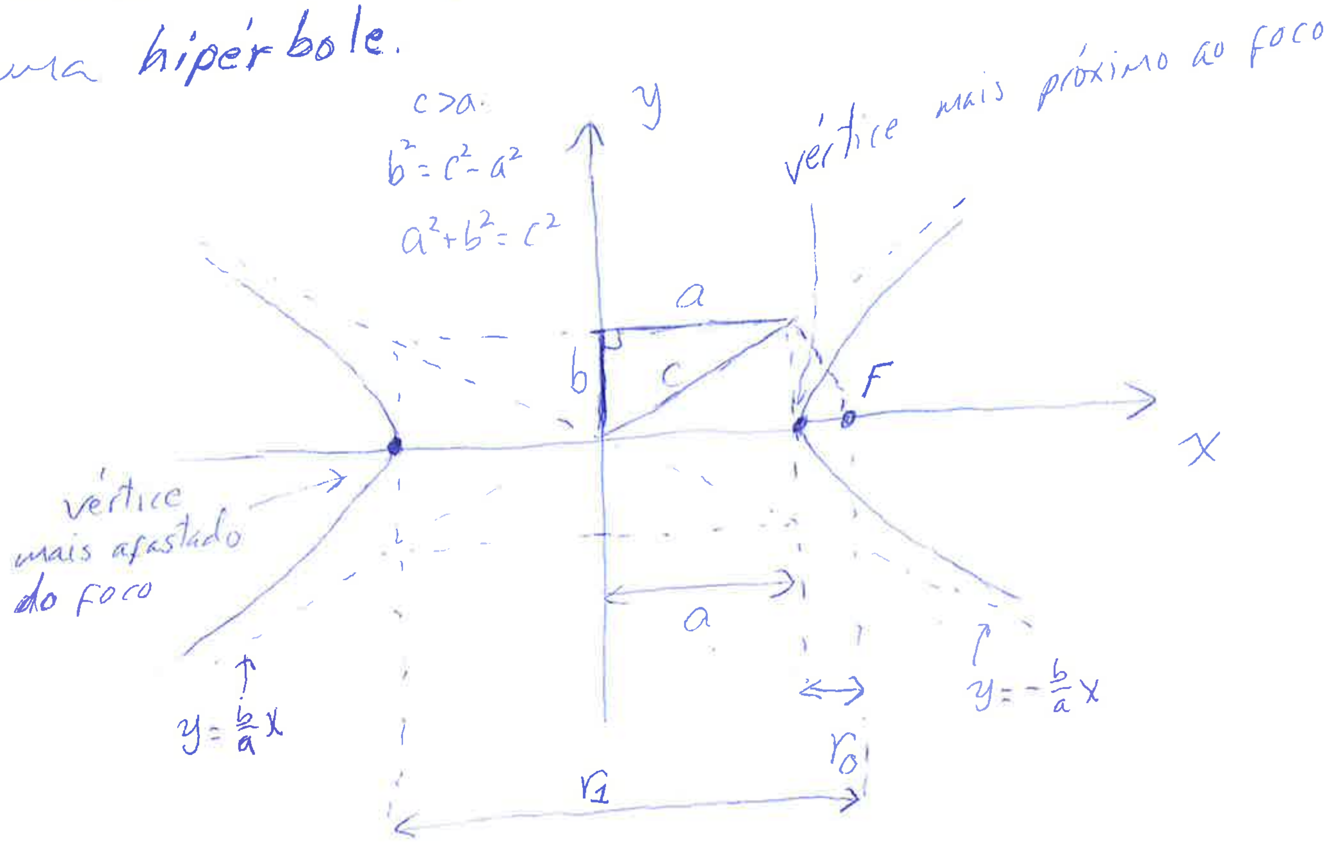
$$a = \frac{1}{2}(r_0 + r_1) = \frac{1}{2}\left(\frac{16}{7} + 16\right) = 8 \cdot \frac{8}{7} = \frac{64}{7} \approx 9{,}1$$

$$b = \sqrt{r_0 r_1} = \sqrt{\frac{16}{7} \cdot 16} = 16\sqrt{\frac{1}{7}} \approx 6{,}0$$

$$c = \frac{1}{2}(r_1 - r_0) = \frac{1}{2}\left(16 - \frac{16}{7}\right) = 8 \cdot \frac{6}{7} = \frac{48}{7} \approx 6{,}9$$



Resumimos as informações importantes para uma **hipérbole**.



$c>a$

$$\begin{cases} r_0 = c-a \quad r_1 = c+a \\ c = \frac{1}{2}(r_0+r_1) \,,\quad a = \frac{1}{2}(r_1-r_0) \,,\quad b=\sqrt{r_0 r_1} \end{cases}$$

; $r_0 r_1 = (c-a)(c+a) = c^2-a^2 =$

Em comparação as eq. correspondentes para a elipse somente troca a com c.

Ex. 3: Esboce a curva $r = \dfrac{4}{2-3\,\mathrm{sen}(\theta)}$.

Sol.: Dividimos por 2

$$r = \frac{2}{1-\frac{3}{2}\,\mathrm{sen}(\theta)} \longrightarrow ed = 2 \,,\quad \frac{3}{2}d = 2 \longrightarrow d = 4/3$$

$e = \frac{3}{2} > 1 \longrightarrow$ Hipérbole

seno e negativo $\longrightarrow$ Diretriz $\boxed{y=-4/3}$

Assíntotas: $1 = \frac{3}{2}\,\mathrm{sen}(\theta) \longrightarrow \mathrm{sen}(\theta) = \frac{2}{3}$

Em $\theta = 0 \longrightarrow r(0) = \dfrac{4}{2 - 3\cancel{\operatorname{sen}(0)}_{0}} = 2$

$\theta = \pi \longrightarrow r(\pi) = \dfrac{4}{2} = 2$

$\theta = \pi/2 \longrightarrow r(\pi/2) = \dfrac{4}{-1} = -4 \rightarrow r_1 = |r(\pi/2)| = 4$ vértice mais longe do foco

$\theta = 3\pi/2 \rightarrow r(3\pi/2) = \dfrac{4}{5} \longrightarrow r_0 = \dfrac{4}{5}$ vértice mais próximo do foco

$c = \frac{1}{2}(r_0 + r_1) = \frac{1}{2}\left(4 + \frac{4}{5}\right) = 2 \cdot \frac{6}{5} = \frac{12}{5} \approx 2{,}4$

$b = \sqrt{r_0 \cdot r_1} = \sqrt{4 \cdot \frac{4}{5}} = 4\sqrt{\frac{1}{5}} \approx 1{,}8$

$\dfrac{b}{a} = \dfrac{4\sqrt{1/5}}{8/5} = \dfrac{5\sqrt{1/5}}{2}$

$a = \frac{1}{2}(r_1 - r_0) = \frac{1}{2}\left(4 - \frac{4}{5}\right) = 2 \cdot \frac{4}{5} = \frac{8}{5} = 1{,}6$