10

Equações Paramétricas e Coordenadas Polares

Copyright © Cengage Learning. Todos os direitos reservados.

10.3 Coordenadas Polares

Copyright © Cengage Learning. Todos os direitos reservados.

Coordenadas Polares

Um sistema de coordenadas representa um ponto no plano por um par ordenado de números chamados coordenadas. Até agora usamos as coordenadas cartesianas, que são distâncias orientadas a partir de dois eixos perpendiculares. Nesta seção descreveremos um sistema de coordenadas introduzido por Newton, denominado **sistema de coordenadas polares**, que é mais conveniente para muitos propósitos.

Escolhemos um ponto no plano chamado **polo** (ou origem) e está rotulado de *O*. Então desenhamos uma meia linha começando em *O* chamada de **eixo polar**. Esse eixo é geralmente desenhado horizontalmente para a direita e corresponde ao eixo *x* positivo nas coordenadas cartesianas.

Coordenadas Polares

Se *P* for qualquer outro ponto no plano, seja *r* a distância de *O* até *P* e seja o ângulo (geralmente medido em radianos) entre o eixo polar e a reta *OP*, como na Figura 1.

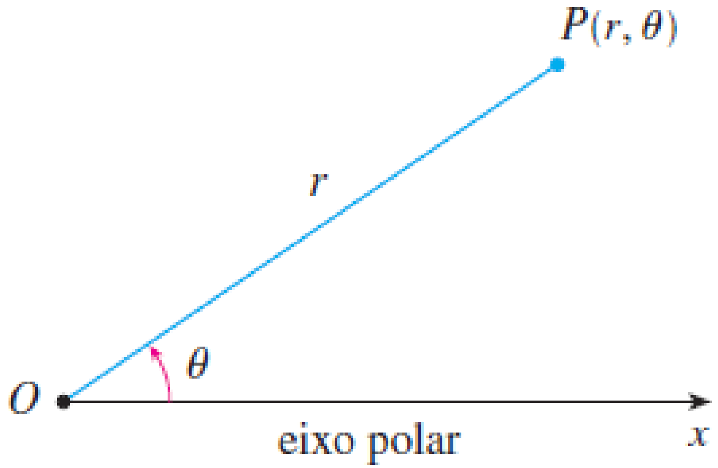


Figura 1

Coordenadas Polares

Assim, o ponto *P* é representado pelo par ordenado (r, θ) e r, θ são chamados **coordenadas polares** *P*. Usamos a convenção de que um ângulo é positivo se for medido no sentido anti-horário a partir do eixo polar e negativo se for medido no sentido horário. Se $P = O$, então $r = 0$, e convencionamos que $(0, \theta)$ representa o polo para qualquer valor de θ.

Coordenadas Polares

Estendemos o significado de coordenadas polares (r, θ) para o caso no qual r é negativo convencionando que, como na Figura 2, os pontos ($-r$, θ) e (r, θ) estão na mesma reta passando por O e estão à mesma distância $|r|$ de O, mas em lados opostos de O.

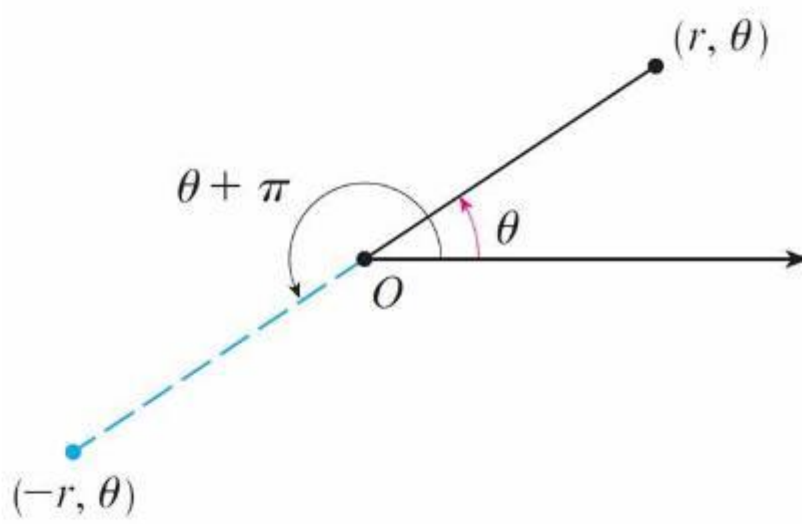


Figura 2

Coordenadas Polares

Se $r > 0$, o ponto (r, θ) está no mesmo quadrante que θ; se $r < 0$, ele está no quadrante do lado oposto do polo. Observe que $(–r, \theta)$ representa o mesmo ponto que $(r, \theta + \pi)$.

Exemplo 1

Marque o ponto cujas coordenadas polares são dadas.

(a) $(1, 5\pi/4)$ (b) $(2, 3\pi)$ (c) $(2, -2\pi/3)$ (d) $(-3, 3\pi/4)$

SOLUÇÃO: Os pontos estão marcados na Figura 3.

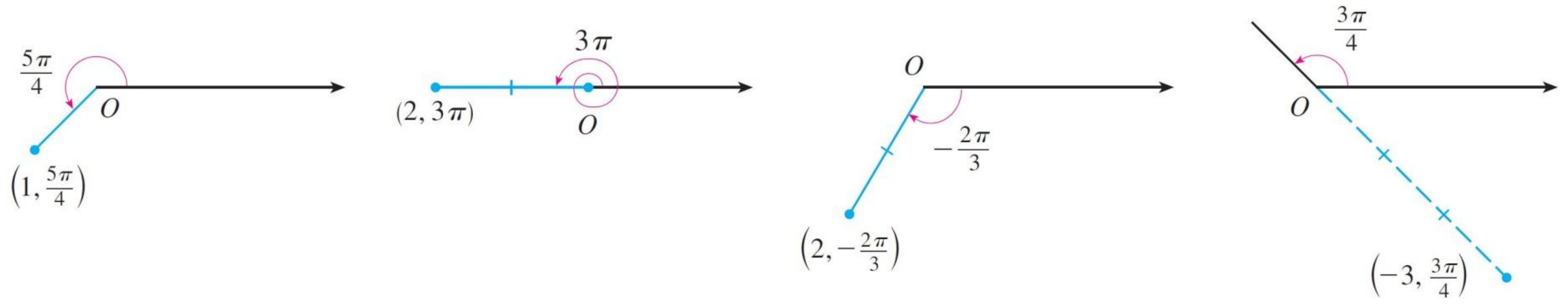


Figura 3

Exemplo 1 – *Solução*

continuação

Na parte (d) o ponto $(-3, 3\pi/4)$ está localizado três unidades a partir do polo no quarto quadrante, porque o ângulo $3\pi/4$ está no segundo quadrante e $r = -3$ é negativo.

Coordenadas Polares

No sistema de coordenadas cartesianas cada ponto tem apenas uma representação, mas no sistema de coordenadas polares cada ponto tem muitas representações. Por exemplo, o ponto $(1, 5\pi/4)$ no Exemplo 1(a) poderia ser escrito como $(1, –3\pi/4)$ ou $(1, 13\pi/4)$ ou $(–1, \pi/4)$. (Veja a Figura 4.)

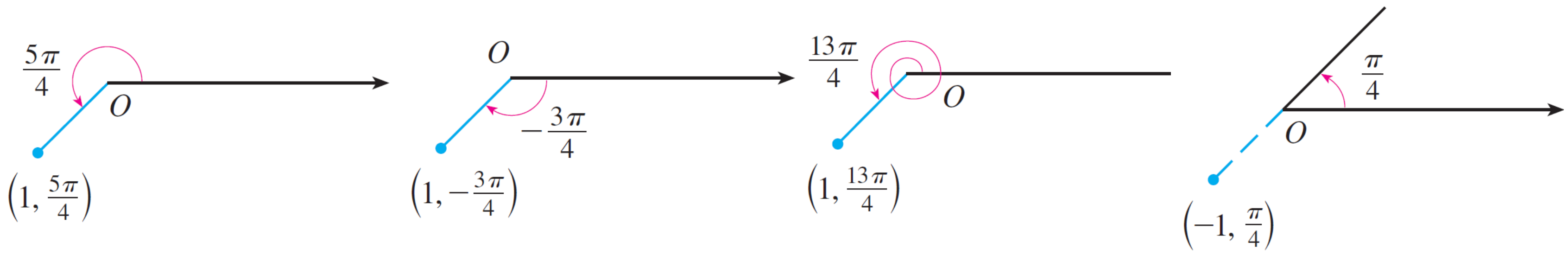


Figura 4

Coordenadas Polares

De fato, como uma rotação completa no sentido anti-horário é dada por um ângulo 2π, o ponto representado pelas coordenadas polares (r, θ) é também representado por

$$(r, \theta + 2n\pi) \quad \text{e} \quad (-r, \theta + (2n + 1)\pi)$$

onde n é qualquer inteiro.

Coordenadas Polares

A relação entre as coordenadas polares e cartesianas pode ser vista a partir da Figura 5, na qual o polo corresponde à origem e o eixo polar coincide com o eixo *x* positivo.

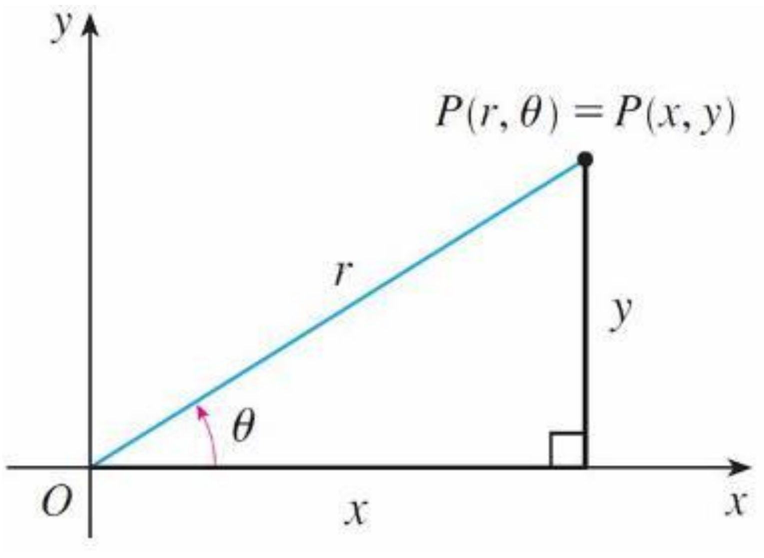


Figura 5

Coordenadas Polares

Se o ponto P tiver coordenadas cartesianas (x, y) e coordenadas polares (r, θ), então, a partir da figura, temos

$$\cos\theta = \frac{x}{r} \qquad\qquad \operatorname{sen}\theta = \frac{y}{r}$$

e também

$$\boxed{1} \qquad \boxed{x = r\cos\theta \qquad\qquad y = r\operatorname{sen}\theta}$$

Embora as Equações 1 tenham sido deduzidas a partir da Figura 5, que ilustra o caso onde $r > 0$ e $0 < \theta < \pi/2$, essas equações ainda são válidas para todos os valores de r e θ.

Coordenadas Polares

As Equações 1 nos permitem encontrar as coordenadas cartesianas de um ponto quando as coordenadas polares são conhecidas. Para encontrarmos *r* e θ quando *x* e *y* são conhecidos, usamos as equações

2
$$r^2 = x^2 + y^2 \qquad \operatorname{tg}\theta = \frac{y}{x}$$

que podem ser deduzidas a partir das Equações 1 ou simplesmente lidas a partir da Figura 5.

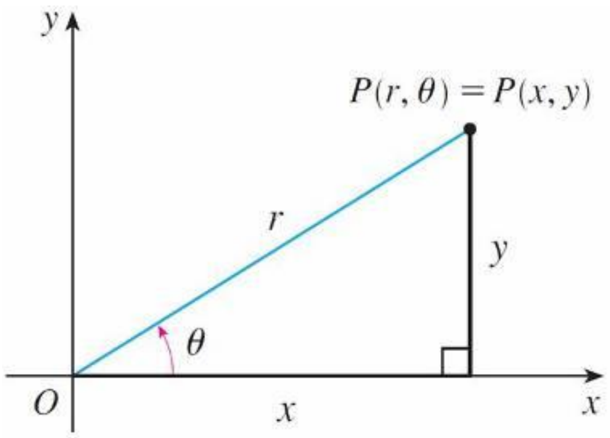


Figura 5

Exemplo 2

Converta o ponto (2, π/3) de coordenadas polares para cartesianas.

SOLUÇÃO: Como r = 2 e $\theta = \pi/3$, as Equações 1 fornecem

$$x = r\cos\theta = 2\cos\frac{\pi}{3} = 2\cdot\frac{1}{2} = 1$$

$$y = r\,\mathrm{sen}\,\theta = 2\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{3} = 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

Portanto, o ponto é $(1, \sqrt{3})$ nas coordenadas cartesianas.

Exemplo 3

Represente o ponto com coordenadas cartesianas(1, –1) em termos de coordenadas polares.

SOLUÇÃO: Se escolhermos *r* positivo, então a Equação 2 fornece

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x} = -1$$

Como o ponto (1, –1) está no quarto quadrante, podemos escolher $\theta = -\pi/4$ ou $\theta = 7\pi/4$. Então uma resposta possível é $(\sqrt{2}, -\pi/4)$; e outra é $(\sqrt{2}, 7\pi/4)$.

Coordenadas Polares

OBSERVAÇÃO As Equações 2 não determinam univocamente θ quando x e y são dados, porque, à medida que θ aumenta no intervalo $0 \leq \theta < 2\pi$, cada valor de tg θ ocorre duas vezes. Portanto, para converter coordenadas cartesianas em coordenadas polares, não é apenas suficiente encontrar r e θ que satisfaçam as Equações 2. Como no Exemplo 3, devemos escolher θ de modo que o ponto (r, θ) esteja no quadrante correto.

Curvas Polares

Curvas Polares

O **gráfico de uma equação** $r = f(\theta)$, ou mais genericamente $F(r, \theta) = 0$, consiste em todos os pontos P que têm pelo menos uma representação (r, θ) cujas coordenadas satisfaçam a equação.

Exemplo 4

Qual curva é representada pela curva polar $r = 2$?

SOLUÇÃO: A curva consiste de todos os pontos (r, θ) com $r = 2$. Como r representa a distância do ponto ao polo, a curva $r = 2$ representa o círculo com centro O e raio 2. Em geral, a equação $r = a$ representa o círculo com centro O e raio $|a|$. (Veja a Figura 6).

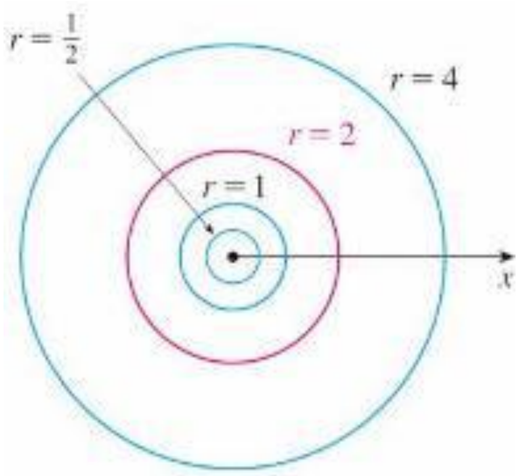
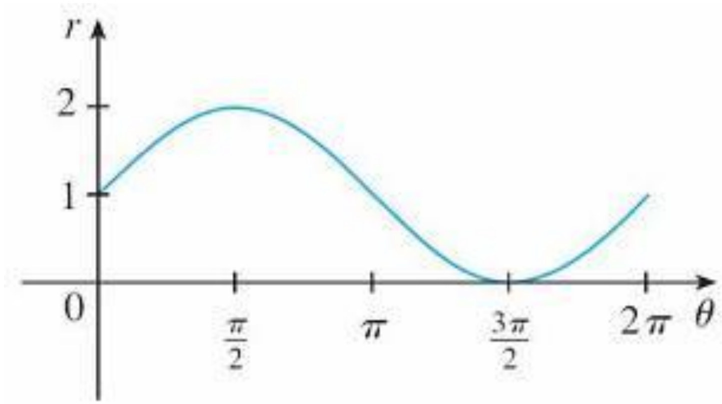


Figura 6

Exemplo 7

Esboce a curva polar $r = 1 + \text{sen } \theta$.

SOLUÇÃO: Primeiro esboçamos o gráfico de $r = 1 + \text{sen } \theta$ em *coordenadas* cartesianas na Figura 10 pelo deslocamento da curva seno uma unidade para cima.



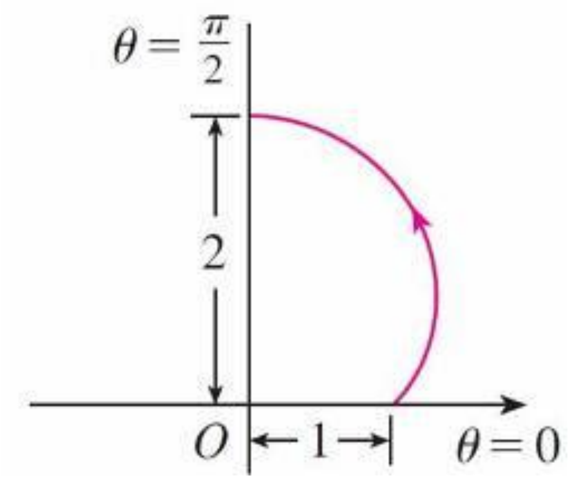
$r = 1 + \text{sen } \theta$ em coordenadas cartesianas, $0 \leq \theta \leq 2\pi$

Figura 10

Exemplo 7 – *Solução*

continuação

Isso nos permite ler de uma vez os valores de *r* que correspondem aos valores crescentes de θ. Por exemplo, vemos que, quando θ aumenta de 0 até $\pi/2$, *r* (a distância a partir de *O*) aumenta de 1 até 2, assim esboçamos a parte correspondente da curva polar na Figura 11(a).



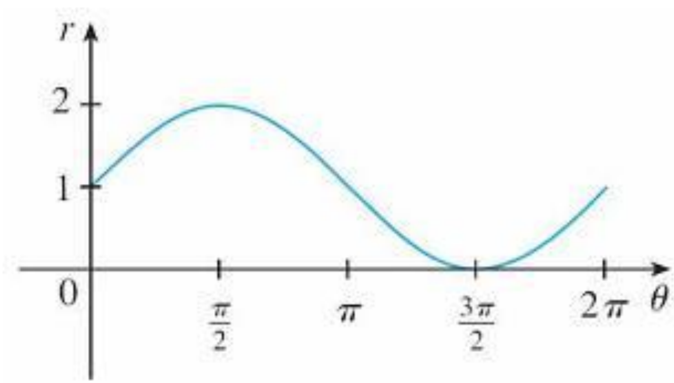
Estágios no esboço da cardioide $r = 1 + \text{sen } \theta$

Figura 11(a)

Exemplo 7 – *Solução*

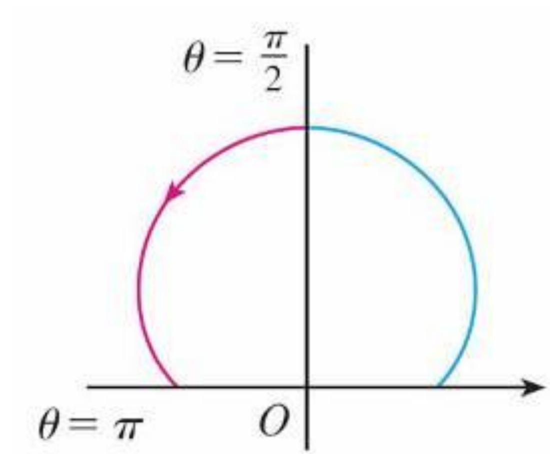
continuação

Quando θ aumenta de $\pi/2$ até π, a Figura 10 mostra que *r* diminui de 2 até 1, e dessa forma esboçamos a próxima parte da curva como na Figura 11(b).



$r = 1 + \text{sen}\ \theta$ em coordenadas cartesianas, $0 \leq \theta \leq 2\pi$

Figura 10



Estágios no esboço da cardioide $r = 1 + \text{sen}\ \theta$

Figura 11(b)

Exemplo 7 – *Solução*

continuação

Quando θ aumenta de π até $3\pi/2$, r diminui de 1 para 0, como apresentado na parte (c). Finalmente, quando θ aumenta de $3\pi/2$ para 2π, r aumenta de 0 para 1, como mostrado na parte (d). Se deixássemos θ aumentar além de 2π ou diminuir além de 0, simplesmente retraçaríamos nossa trajetória.

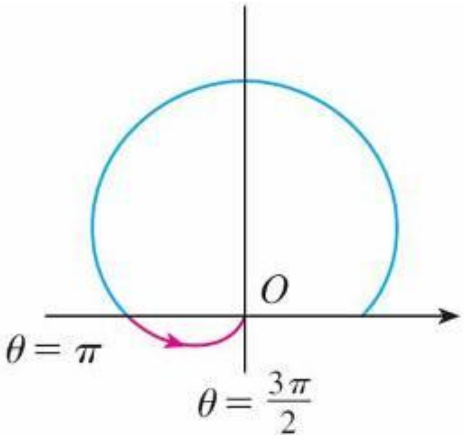


Figura 11(c)

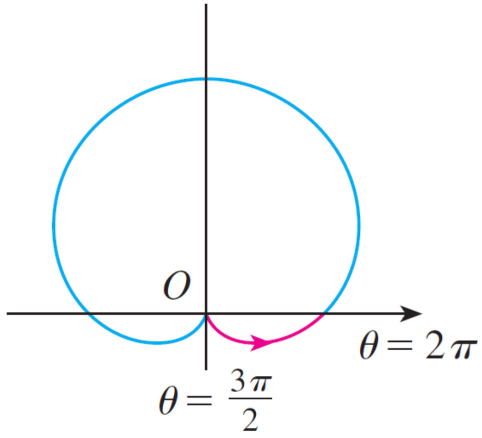


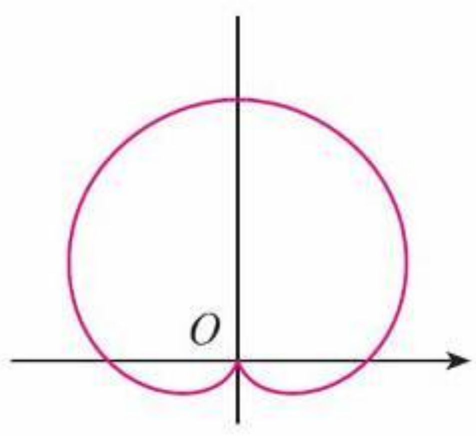
Figura 11(d)

Estágios no esboço da cardioide $r = 1 + \text{sen}\ \theta$

Exemplo 7 – *Solução*

continuação

Juntando as partes da curva nas Figuras 11(a)-(d), esboçamos a curva completa na parte (e). Ela é chamada **cardioide**, porque tem o formato parecido com o de um coração.



Estágios no esboço da cardioide $r = 1 + \text{sen } \theta$

Figura 11(e)

CURVAS POLARES

O restante da curva é desenhado de uma maneira semelhante, com números e setas indicando a ordem na qual as partes são traçadas. A curva resultante tem quatro laços e é denominada **rosácea de quatro pétalas**.

Simetria

Simetria

Ao esboçar curvas polares, lembre-se de que é útil algumas vezes levar em conta a simetria. As três regras seguintes são explicadas pela Figura 14.

(a) Se uma equação polar não mudar quando θ for trocado por $-\theta$, a curva será simétrica em relação ao eixo polar.

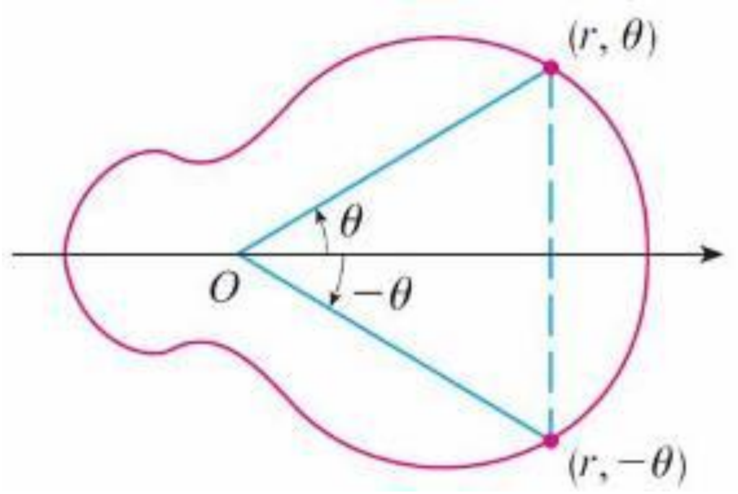


Figura 14(a)

Simetria

(b) Se a equação não mudar quando r for substituído por $-r$, ou quando θ for trocado por $\theta + \pi$, a curva será simétrica em relação ao polo. (Isso significa que a curva permanecerá inalterada se a girarmos 180° em torno da origem.)

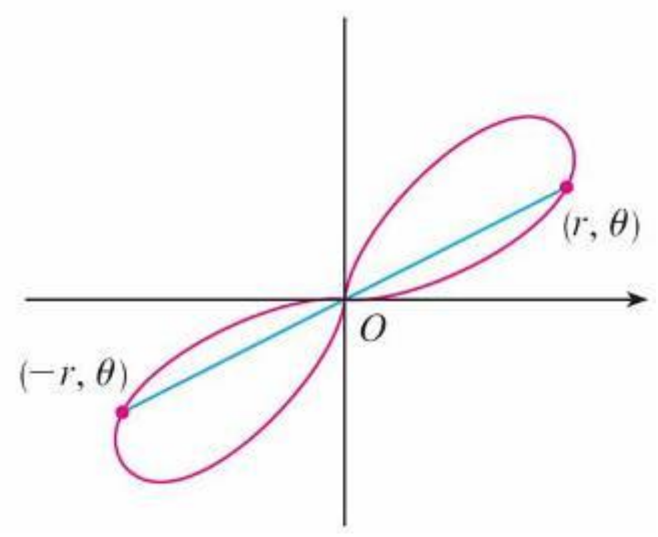


Figura 14(b)

Simetria

(c) Se a equação não mudar quando θ for trocado por $\pi - \theta$, a curva será simétrica em relação à reta vertical $\theta = \pi/2$.

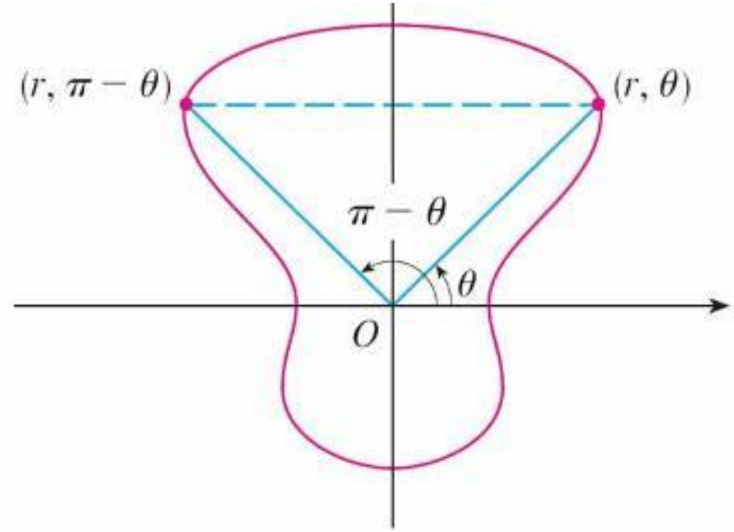


Figura 14(c)

Simetria

As curvas nos Exemplos 6 e 8 são simétricas em relação ao eixo polar, pois $\cos(-\theta) = \cos\theta$. As curvas nos Exemplos 7 e 8 são simétricas em relação à $\theta = \pi/2$ porque $\operatorname{sen}(\pi - \theta) = \operatorname{sen}\theta$ e $\cos 2(\pi - \theta) = \cos 2\theta$. A rosácea de quatro pétalas é também simétrica em relação ao polo. Essas propriedades de simetria poderiam ser usadas para esboçar as curvas.

Tangentes a Curvas Polares

Tangentes a Curvas Polares

Para encontrarmos a reta tangente a uma curva polar $r = f(\theta)$, vamos considerar θ como um parâmetro e escrever suas equações paramétricas como

$$x = r \cos \theta = f(\theta) \cos \theta \qquad y = r \operatorname{sen} \theta = f(\theta) \operatorname{sen} \theta$$

Então, usando o método para encontrar inclinações de curvas parametrizadas e a Regra do Produto, temos

$$\boxed{3} \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{\dfrac{dy}{d\theta}}{\dfrac{dx}{d\theta}} = \frac{\dfrac{dr}{d\theta} \operatorname{sen} \theta + r \cos \theta}{\dfrac{dr}{d\theta} \cos \theta - r \operatorname{sen} \theta}$$

Tangentes a Curvas Polares

Localizamos as tangentes horizontais achando os pontos onde $dy/d\theta = 0$ (desde que $dx/d\theta \neq 0$). Do mesmo modo, localizamos as tangentes verticais nos pontos onde $dx/d\theta = 0$ (desde que $dy/d\theta \neq 0$).

Observe que, se estivermos olhando para as retas tangentes no polo, então $r = 0$ e a Equação 3 é simplificada para

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}\theta \qquad \text{se} \quad \frac{dr}{d\theta} \neq 0$$

Por exemplo, achamos que $r = \cos 2\theta = 0$ quando $\theta = \pi/4$ ou $3\pi/4$. Isso significa que as retas $\theta = \pi/4$ e $\theta = 3\pi/4$ (ou $y = x$ e $y = -x$) são retas tangentes de $r = \cos 2\theta$ na origem.

Exemplo 9

(a) Para a cardioide $r = 1 + \text{sen } \theta$, calcule a inclinação da reta tangente quando $\theta = \pi/3$.

(b) Encontre os pontos na cardioide onde a reta tangente é horizontal ou vertical.

SOLUÇÃO: Usando a Equação 3 com $r = 1 + \text{sen } \theta$, obtemos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dfrac{dr}{d\theta}\,\text{sen}\,\theta + r\cos\theta}{\dfrac{dr}{d\theta}\cos\theta - r\,\text{sen}\,\theta} = \frac{\cos\theta\ \text{sen}\,\theta + (1 + \text{sen}\,\theta)\cos\theta}{\cos\theta\ \cos\theta - (1 + \text{sen}\,\theta)\,\text{sen}\,\theta}$$

$$= \frac{\cos\theta\,(1 + 2\,\text{sen}\,\theta)}{1 - 2\,\text{sen}^2\theta - \text{sen}\,\theta} = \frac{\cos\theta\,(1 + 2\,\text{sen}\,\theta)}{(1 + \text{sen}\,\theta)(1 - 2\,\text{sen}\,\theta)}$$

Exemplo 9 – *Solução*

continuação

(a) A inclinação da tangente no ponto no qual $\theta = \pi/3$ é

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\theta=\pi/3} = \frac{\cos(\pi/3)(1 + 2\,\mathrm{sen}(\pi/3))}{(1 + \mathrm{sen}(\pi/3))(1 - 2\,\mathrm{sen}(\pi/3))} = \frac{\frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{3}\right)}{\left(1 + \sqrt{3}/2\right)\left(1 - \sqrt{3}\right)}$$

$$= \frac{1 + \sqrt{3}}{\left(2 + \sqrt{3}\right)\left(1 - \sqrt{3}\right)} = \frac{1 + \sqrt{3}}{-1 - \sqrt{3}} = -1$$

Exemplo 9 – *Solução*

continuação

(b) Observe que

$$\frac{dy}{d\theta} = \cos\theta\,(1 + 2\operatorname{sen}\theta) = 0 \qquad \text{quando } \theta = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$$

$$\frac{dx}{d\theta} = (1 + \operatorname{sen}\theta)(1 - 2\operatorname{sen}\theta) = 0 \qquad \text{quando } \theta = \frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$$

Exemplo 9 – *Solução*

continuação

Portanto, existem tangentes horizontais nos pontos $(2, \pi/2), \left(\frac{1}{2}, 7\pi/6\right), \left(\frac{1}{2}, 11\pi/6\right)$ e tangentes verticais em $\left(\frac{3}{2}, \pi/6\right)$ e $\left(\frac{3}{2}, 5\pi/6\right)$ Quando $\theta = 3\pi/2$, $dy/d\theta$ e $dx/d\theta$ são 0 e, dessa forma, devemos ser cuidadosos. Usando a Regra de L'Hôspital, temos

$$\lim_{\theta \to (3\pi/2)^-} \frac{dy}{dx} = \left(\lim_{\theta \to (3\pi/2)^-} \frac{1 + 2 \operatorname{sen} \theta}{1 - 2 \operatorname{sen} \theta}\right)\left(\lim_{\theta \to (3\pi/2)^-} \frac{\cos \theta}{1 + \operatorname{sen} \theta}\right)$$

$$= -\frac{1}{3} \lim_{\theta \to (3\pi/2)^-} \frac{\cos \theta}{1 + \operatorname{sen} \theta} = -\frac{1}{3} \lim_{\theta \to (3\pi/2)^-} \frac{-\operatorname{sen} \theta}{\cos \theta} = \infty$$

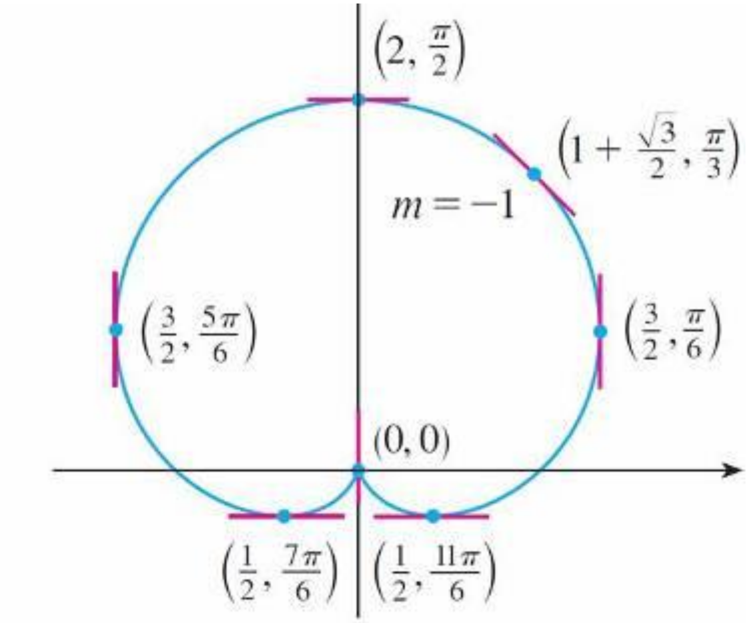
Por simetria,

$$\lim_{\theta \to (3\pi/2)^+} \frac{dy}{dx} = -\infty$$

Exemplo 9 – *Solução*

continuação

Então, existe uma reta tangente vertical no polo (veja a Figura 15).



Retas tangentes para $r = 1 + \operatorname{sen} \theta$

Figura 15

Tangentes a Curvas Polares

OBSERVAÇÃO Em vez de lembrarmos a Equação 3, poderíamos empregar o método usado para deduzi-la. Por exemplo, no Exemplo 9, poderíamos ter escrito

$$x = r\cos\theta = (1 + \text{sen}\,\theta)\cos\theta = \cos\theta + \tfrac{1}{2}\,\text{sen}\,2\theta$$

$$y = r\,\text{sen}\,\theta = (1 + \text{sen}\,\theta)\,\text{sen}\,\theta = \text{sen}\,\theta + \text{sen}^2\theta$$

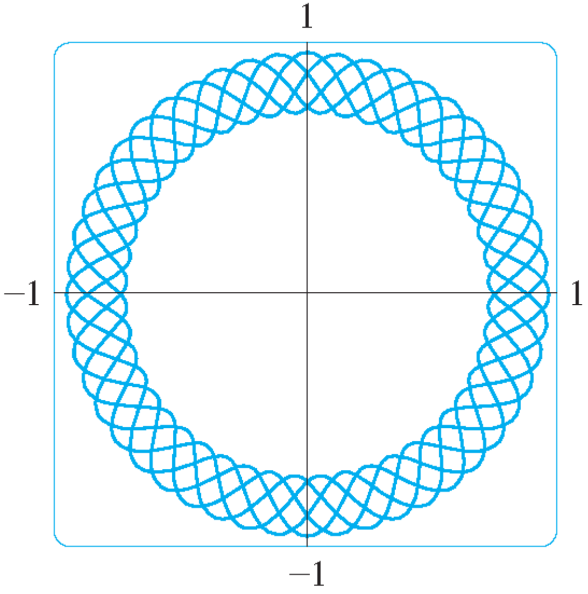
Portanto, temos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/d\theta}{dx/d\theta} = \frac{\cos\theta + 2\,\text{sen}\,\theta\,\cos\theta}{-\text{sen}\,\theta + \cos 2\theta} = \frac{\cos\theta + \text{sen}\,2\theta}{-\text{sen}\,\theta + \cos 2\theta}$$

Traçando Curvas Polares com Ferramentas Gráficas

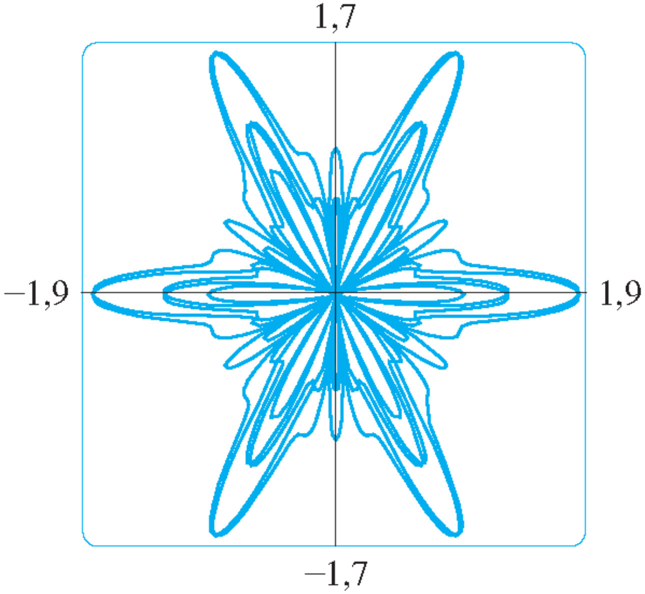
Traçando Curvas Polares com Ferramentas Gráficas

Embora seja útil saber esboçar as curvas polares simples manualmente, precisamos usar uma calculadora gráfica ou um computador quando nos deparamos com curvas complicadas, como as mostradas nas Figuras 16 e 17.



$r = \text{sen}^2(2{,}4\theta) + \cos^4(2{,}4\theta)$

Figura 16



$r = \text{sen}^2(1{,}2\theta) + \cos^3(6\theta)$

Figura 17

Traçando Curvas Polares com Ferramentas Gráficas

Algumas ferramentas gráficas têm comandos que nos permitem traçar curvas polares diretamente.Com outras máquinas precisamos fazer a conversão para curvas parametrizadas primeiro. Neste caso, tomamos a equação polar $r = f(\theta)$ e escrevemos suas equações paramétricas como

$$x = r \cos \theta = f(\theta) \cos \theta \qquad y = r \operatorname{sen} \theta = f(\theta) \operatorname{sen} \theta$$

Algumas máquinas requerem que o parâmetro seja denominado t em vez de θ.

Exemplo 10

Trace a curva r = sen(8θ/5).

SOLUÇÃO: Vamos assumir que nossa ferramenta gráfica não tenha um comando para traçar as curvas polares.

Neste caso, precisamos trabalhar com as equações paramétricas correspondentes, que são

$$x = r \cos \theta = \text{sen}(8\theta / 5) \cos \theta \qquad x = r \,\text{sen}\, \theta = \text{sen}(8\theta / 5)\, \text{sen}\, \theta$$

Exemplo 10 – *Solução*

continuação

Em qualquer caso, precisamos determinar o domínio para θ. Então nos perguntamos: quantas rotações completas são necessárias até que a curva comece a se repetir? Se a resposta for n,

$$\operatorname{sen}\frac{8(\theta + 2n\pi)}{5} = \operatorname{sen}\left(\frac{8\theta}{5} + \frac{16n\pi}{5}\right) = \operatorname{sen}\frac{8\theta}{5}$$

e assim precisamos que $16n\pi/5$ seja um múltiplo par de π. Isso ocorrerá quando $n = 5$. Portanto, vamos esboçar a curva inteira se especificarmos que $0 \leq \theta \leq 10\pi$.

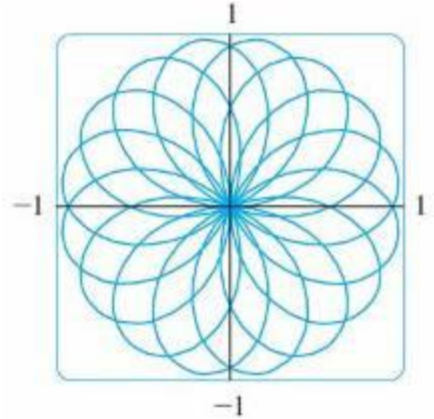
Exemplo 10 – *Solução*

continuação

Trocando de θ para t, temos as equações

$$x = \text{sen}(8t/5)\cos t \qquad y = \text{sen}(8t/5)\,\text{sen}\, t \qquad 0 \le t \le 10\pi$$

e a Figura 18 nos mostra a curva resultante. Observe que essa rosácea tem 16 laços.



$r = \text{sen}(8\theta/5)$

Figura 18