MAE0221 - Probabilidade
Sexta Lista de Exercícios

1. Se X e Y são variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuidas com distribuição exponencial. Determine $E[\max\{X, Y\}]$.

2. Sejam $X_1, X_2, ..., X_n$ variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuidas com função densidade de probabilidade $f_X(x) = x^{-2}1_{(1,\infty)}(x)$. Defina $Y = \min\{x_1, X_2, ..., X_n\}$. Determine $E[X_1]$, se existir. Determine $E[Y]$, se existir.

3. Projéteis são lançados no plano cartesiano e o ponto atigido é um vetor aleatório (X, Y) onde X e Y são independentes e identicamente distribuidas com distribuição normal padrão. Dois projéteis são lançados independentemente atingindo os pontos (X_1, Y_1) e (X_2, Y_2). Seja Z a distância entre eles. Encontre a distribuição de Z^2.

4. Sejam X e Y variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuidas com distribuição normal padrão. Encontre a função geradora de momentos de $Z = X.Y$.

5. Sejam X_1 e X_2 variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuidas com distribuição normal padrão. Determine a função densidade de probabilidade conjunta de $Y_1 = \frac{X_1+X_2}{\sqrt{2}}$ e $Y_2 = \frac{X_2-X_1}{\sqrt{2}}$.

   Verificar se $2X_1X_2$ e $X_2^2 - X_1^2$ tem a mesma distribuição.

   OBS: $X_2^2 - X_1^2 = 2Y_1Y_2$.

6. Se $X_1, X_2, ..., X_n$ são variáveis aleatórias independentes, onde X_i tem distribuição gama de parâmetros λ e $r_i, i = 1, 2, ..., n$. Qual a distribuição de $X_1 + X_2 + ... + X_n$?

7. Se X tem distribuição uniforme no intervalo $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, determine a distribuição de $Y = \tan(X)$.

8. Sejam X e Y variáveis aleatórias independentes com funções densidades de probabilidades $f_X(x) = 2x1_{(0,1)}$ e $f_Y(y) = 2(1-y)1_{(0,1)}(y)$. Encontre a distribuição de $X + Y$.

9. Se (X, Y) tem função densidade de probabilidade conjunta

$$f_{(X,Y)}(x, y) = 2e^{-(x+y)}1_{(0,y)}(x)1_{(0,\infty)}(y),$$

   determine a função densidade de probabilidade conjunta de X e $X + Y$. Encontre as funções densidades marginais de X e $X + Y$

10. Sejam X e Y variáveis aleatórias independentes com distribuição exponencial de parâmetro λ. Determine a distribui cão conjunta de (Y_1, Y_2) onde $Y_1 = \frac{X_1}{X_2}$ e $Y_2 = X_1 + X_2$ e suas marginais.

11. Seja

$$f_{(X,Y)}(x, y) = K(x + y)1_{(0,1)}(x)1_{(0,1)}(y)1_{(0,1)}(x + y).$$

   A) Determine $f_X(x)$.

   B) Determine a distribuição conjunta de $X + Y$ e $Y - X$ e suas marginais.

12. Determie a distribuiçãoconjunta de X^2 e Y^2 quando

$$f_{(X,Y)}(x, y) = 4xy1_{(0,1)}(x)1_{(0,1)}(y)$$

13. Sejam $X_1, ..., X_n$ e $Y_1, ..., Y_m$ dois conjuntos de variáveis aleatórias e $a_1, ..., a_n$ e $b_1, ..., b_m$ dois conjuntos de constantes. Prove que

$$Cov(\Sigma_{i=1}^n a_i X_i, \Sigma_{j=1}^m b_j Y_j) = \Sigma_{i=1}^n \Sigma_{j=1}^m a_i b_j Cov(X_i, Y_j).$$

Em particular

$$Var(\Sigma_{i=1}^n a_i X_i) = \Sigma_{i=1}^n \Sigma_{j=1}^m a_i b_j Cov(X_i, X_j) =$$

$$\Sigma_{i=1}^n a_i^2 Var(X_i) + \Sigma_{i=1}^n \Sigma_{j=1, j\neq i}^m Cov(X_i, X_j).$$