**6a. Lista de Exercícios de álgebra 1, 2o) sem 2018**
**Licenciatura em Matemática**
Prof. Eduardo do Nascimento Marcos
Para entregar dia 12 de junho

**1.** Provar que, se $a$ e $b$ são inteiros com $b > 0$, então existe um único par de inteiros $(q, r)$ tal que $a = bq + r$ e $2b \leq r < 3b$

**2.**

- Sejam $a, b, c$ inteiros com $a^2 + b^2 \neq 0$ prove que $mdc(a, b) \mid c$ se e somente se existem $r$ e $s$ inteiros tais que $c = ra + sb$.
- Prove que $9 \mid a$ se e somente se na expansão decimal de a na base 8, ( $a = a_0 + \ldots + \ldots a_n 8^n$), vale que $9 \mid a_0 - a_1 + \ldots + (-1)^n a_n$.

**3.** A Teoria do Biorritmo diz que os estados físicos, mental e emocional de uma pessoa oscilam periodicamente, a partir do dia do nascimento, em ciclos de 23 dias, 29 dias e 33 dias, respectivamente. Dado que os dias mais positivos dos ciclos físico, mental e emocional são, respectivamente, o sexto, o sétimo e o oitavo de cada ciclo, nos primeiros dez anos de vida de uma pessoa, quantas vezes esses trÃªs ciclos estão simultaneamente no ponto máximo?

**4.** Chamamos ideal de $\mathbb{Z}$ a um subconjunto $I$ de $\mathbb{Z}$ tal que:

- $0 \in I$
- $I$ é fechado para a soma.
- Se $x \in I$ e $y \in \mathbb{Z}$ então $xy \in I$

Mostre que para todo ideal $I$ de $\mathbb{Z}$ existe um número $a$ em $I$ tal que $I = \{ta : t \in \mathbb{Z}\}$. Sugestão:Se $I \neq \{0\}$ considere o menor elemento positivo de $I$.

**5.** Seja $\phi : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ a função de Euler. (Lembre que esta função associa a cada inteiro positivo $n$ o número de inteiros positivos primos com $n$ e menores que $n$)

- Seja $p$ un número primo , $r > 0$ inteiro mostre que $\phi(p^r) = p^{r-1}(p - 1)$.
- Mostre que se $m$ e $n$ são inteiros maiores que zero que são primos entre si, então $\phi(mn) = \phi(m)\phi(n)$.
- Prove que se $m = p_1^{r_1} \ldots . p_t^{r_t}$ é a decomposição de $m$ em fatores primos então $\phi(m) = m(1 - \frac{1}{p_1}) \ldots . (1 - \frac{1}{p_r})$

**6.** Mostre que não existe um corpo ordenado finito.

**7.** Um inteiro entre 1 e 1200 tem restos 1, 2 e 6 quando dividido por 9, 11 e 13 respectivamente. Determine esse número.

**8.** Uma pessoa ao receber um cheque no banco,percebeu que havia recebido o número de reais e centavos trocados. Em seguida gastou 68 centavos e percebeu que tinha o dobro da quantia original do cheque. Determinar o menor valor possível no qual o cheque pode ter sido preenchido.

**9.** Um pescador tenta pescar um cardume jogando diversas redes na água. Sabe-se que se cair exatamente um peixe em cada rede sobram $n$ peixes no cardume. Se caírem $n$ peixes em cada rede que não ficar vazia, sobram $n$ redes vazias, e todos os peixes

são pescados.
Quantas são as redes e quantos são os peixes?
**10.** Sejam $a$ e $b$ inteiros positivos primos entre si. Prove que existem infinitos pares $(x, y)$ tais que $ax + by = 1$, e que quaisquer um desses pares são primos entre si.
**11.**

- Prove que a função $f : \frac{\boldsymbol{Z}}{42\boldsymbol{Z}} \to \frac{\boldsymbol{Z}}{42\boldsymbol{Z}}$ definida por $f(x) = x^7 - x$ é constante. Quanto vale essa constante?

- Prove que a função $f : \frac{\boldsymbol{Z}}{15\boldsymbol{Z}} \to \frac{\boldsymbol{Z}}{15\boldsymbol{Z}}$ definida por $f(x) = x^{21} - x$ é constante é constante.

- Seja $p$ um inteiro primo positivo impar. Prove que $1^p + \cdots (p-1)^p$ é constante igual a 0 em $\frac{\boldsymbol{Z}}{p\boldsymbol{Z}}$

**12.**

- Sejam $a, m$ naturais positivos com $m > 1$ ; Mostre que se $n_1 \cong n_2 \bmod \phi(m)$ então $a^{n_1} \cong a^{n_2} \bmod m$.

- Sejam $a \in I\!\!N$ e $n, r \in I\!\!N^*$ com $r$ e $n$ primos entre si. Mostre que no conjunto

$$\{a, a+r, \cdots, a+(n-1)r\}$$

  há exatamente $\phi(n)$ números primos com $n$.

**13.** Mostre que o número primo $p$ é o menor inteiro maior que 1 que divide o numero $(p-1)! + 1$.
**14.** Seja $p$ um primo positivo. Mostre que $a^p + (p-1)!a$ e $(p-1)a^p + a$ são constantes iguais a 0 em $\frac{\boldsymbol{Z}}{p\boldsymbol{Z}}$