

Linearização via Realimentação de Estado

Profa. Vilma A. Oliveira
USP São Carlos
Abril 2018

Índice

1. Introdução	1
2. Realimentação de estado para sistemas lineares	1
2.1 Posicionamento de polos	2
Caso SISO	2
3. Linearização por realimentação de estado	4
3.1 Condições de existência da transformação	5
3.2 Procedimento de linearização por realimentação.....	5
3.2 Controladores de seguimento de referência.....	7
Problema proposto.....	7
4. Regulador linear quadrático	8
4.1 Formulação do problema do regulador quadrático.....	8
Problema de horizonte finito: Equação matricial de Riccati	10
Problema LQR de estado estacionário.....	10
4.2 Exercício resolvido.....	11
Controle pêndulo invertido sobre um carrinho	11

1. Introdução

Um problema de interesse e importância em controle é modificar um dado sistema visando melhorar o seu comportamento dinâmico. A representação espaço de estado de sistemas introduziu o conceito de estado interno ao sistema e permitiu o desenvolvimento de técnicas de controle multivariável no domínio do tempo. A técnica de controle que utiliza realimentação de estado pode ser utilizada para atingir as características de desempenho desejadas. O problema mais básico da teoria de controle no domínio do tempo é a seleção da lei de controle a realimentação de estado que minimize um índice quadrático de desempenho para sistemas lineares. Este é chamado regulador quadrático linear (LQR, do inglês).

Referências utilizadas:

C. T. Chen (1999). *Linear System Theory and Design*. Oxford University Press, New York.
Peter Dorato (1995). *Linear-Quadratic Control: An Introduction*. Prentice Hall, Englewood Cliffs.
J. J. E. Slotine, W. Lie (1991). *Applied Nonlinear Control*. Prentice Hall, Englewood Cliffs.
R. Marino , P. Tomei (1995). *Nonlinear Control Design*. Prentice Hall Europe, Hemel Hempstead.

2. Realimentação de estado para sistemas lineares

Seja a representação espaço de estado de um sistema monovariável:

$$\dot{x} = Fx + gu, \quad x \in R^n, \quad u \in R$$

com $F \in R^{n \times n}$, $g \in R$ e (F, g) controlável. O polinômio característico de F é $\Delta(s) := \det(sI - F) = s^n + \alpha_n s^{n-1} + \dots + \alpha_1$, com α_i real.

Considere a lei de realimentação:

$$u = -Kx + v$$

onde

$K \in R^{1 \times n}$ e $v \in R$, a matriz de realimentação e v a nova entrada do sistema.

2.1 Posicionamento de polos

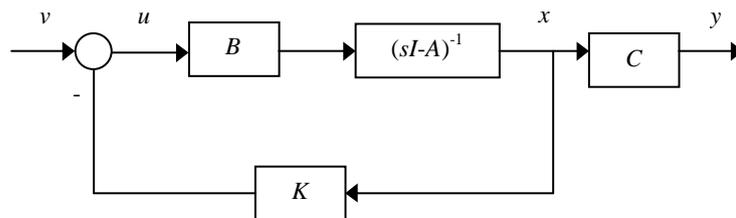
Problema: Obter K tal que o polinômio característico do sistema realimentado tenha as raízes desejadas.

As equações do sistema realimentado podem ser obtidas substituindo a lei de controle no sistema a malha aberta:

$$\dot{x} = (F - gK)x + gv$$

A matriz $F - gK$ gera o polinômio característico do sistema realimentado.

Pode-se mostrar que para qualquer polinômio mônico $\Delta(s)$ existe uma matriz de realimentação de estado K se e só se (F, g) for controlável. O sistema de controle com $u = -Kx + v$ é mostrado abaixo na forma de diagrama de blocos.



Caso SISO

Teorema: Considere a representação espaço de estado de um sistema monovariável:

$$\dot{x} = Fx + gu, \quad x \in R^n, \quad u \in R$$

Dado $\nu \leq n/2$ pares arbitrários de números complexos conjugados $\gamma_i \pm j\omega_i$, $1 \leq i \leq \nu$ e $n - 2\nu$ números reais arbitrários λ_j , $2\nu + 1 \leq j \leq n$, existe uma transformação de equivalência $z = Tx$, $z \in R^n$, T não singular e uma realimentação de estado $u = -Kx + v$ tal que o sistema a malha fechada $\dot{x} = (F - gK)x + gv$ na coordenada $-z$ é $\dot{z} = T(F - gK)T^{-1}z + Tgv$ com

$$T(F - gK)T^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} & -a_n \end{bmatrix} := A$$

$$Tg = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} := b$$

$$\det(sI - A) = s^n + a_n s^{n-1} + \dots + a_1 = \prod_{i=1}^{\nu} (s - \gamma_i - j\omega_i)(s - \gamma_i + j\omega_i) \prod_{k=2\nu+1}^n (s - \lambda_k)$$

se e só se a condição de controlabilidade

espaço gerado $\{g \ Fg \ F^2g \ \dots \ F^{n-1}g\} = R^n$ for satisfeita.

Verificação. Suficiência. Usando a suposição de controlabilidade a matriz $R = [g \ Fg \ F^2g \ \dots \ F^{n-1}g]$ é não singular e portanto existe um vetor linha h o qual é solução da seguinte equação linear

$$hR = h[g \ Fg \ F^2g \ \dots \ F^{n-1}g] = [hg \ hFg, \dots, hF^{n-1}g] = [0 \ \dots \ 0 \ 1]$$

que é

$$h = [0 \ \dots \ 0 \ 1]R^{-1}.$$

Seja

$\det(sI - F) = s^n + \alpha_n s^{n-1} + \dots + \alpha_1$ o polinômio característico da matriz F . Do Teorema de Cayley-

Hamilton que diz que $F^n + \alpha_n F^{n-1} + \dots + \alpha_2 F + \alpha_1 I = 0$ tem-se que

$F^n = -\alpha_n F^{n-1} - \dots - \alpha_2 F - \alpha_1 I$. Defina uma matriz não singular T

$$T = \begin{bmatrix} h \\ hF \\ \vdots \\ hF^{n-1} \end{bmatrix}. \text{ Para mostrar que } T \text{ é não singular verifique que } N = TR \text{ abaixo é não singular.}$$

$$N = TR = \begin{bmatrix} h \\ hF \\ \vdots \\ hF^{n-1} \end{bmatrix} [g \ Fg \ F^2g \ \dots \ F^{n-1}g] = \begin{bmatrix} hg & hFg & \dots & hF^{n-1}g \\ hFg & hF^2g & \dots & hF^n g \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ hF^{n-1}g & hF^n g & \dots & hF^{2n-2}g \end{bmatrix} \text{ desde que pela}$$

definição de h tem-se

$$hF^i g = 0, \quad 0 \leq i \leq n-2$$

$$hF^{n-i} g = 1$$

Uma vez que R é não singular por suposição, $T = NR^{-1}$ é também não singular e $z = Tx, z \in R^n$ é uma mudança de coordenadas. Na coordenada z temos

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= h\dot{x} = hFx + hgu = hFx = z_2 \\ &\vdots \\ \dot{z}_{n-1} &= hF^{n-2}\dot{x} = hF^{n-1}x + hF^{n-2}gu = hF^{n-1}x = z_n \\ \dot{z}_n &= hF^n x + hF^{n-1}gu = hF^n x + u = h(-a_n F^{n-1} - \dots - a_2 F - a_1 I)x + u \\ &= -a_n z_n - \dots - a_2 z_2 - a_1 z_1 + u \end{aligned}$$

E então, chega-se à forma canônica facilmente. A necessidade pode ser mostrada por contradição e não será apresentada.

Comandos ilustrativos do Matlab:

% testando a controlabilidade

C=ctrb(A,B);

Rank(C)

O=obsv(A,C);

Rank(O)

% Posicionamento de pólos: obtenção de matriz de ganho K. P é o vetor de autovalores desejados

Kc=place(A,B,P)

Kc=acker(A,B,P)

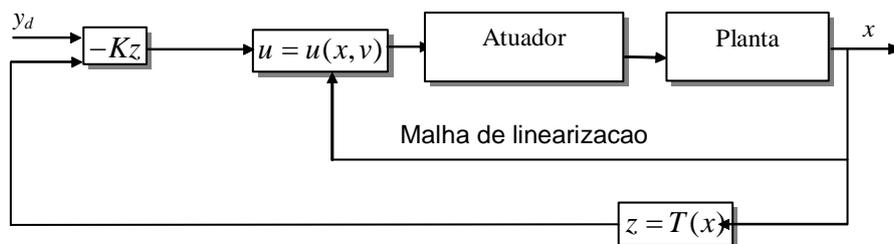
% Observador de estado via posicionamento de pólos
 Kf=acker(A',C',P)
 Kf=place(A',C',P):

3. Linearização por realimentação de estado

Recentemente, muito interesse tem-se devotado à técnica de controle linearização por realimentação de estado. A idéia central da técnica é transformar algebricamente um sistema não linear em linear para então aplicar as técnicas de projeto disponíveis para sistemas lineares. Assim, esta técnica pode ser empregada no projeto de controladores robustos não lineares e adaptativos. Linearização por realimentação de estado tem sido utilizada em muitos problemas de engenharia, tais como, controle de helicópteros, aeronaves, robôs e dispositivos biomédicos. Porém, existem ainda muitas deficiências e limitações associadas ao projeto de controle por realimentação de estado (Slotine, 1991).

Considere agora o sistema não linear $\dot{x} = f(x) + g(x)u$, $x \in R^n$, $u \in R$. Pode-se generalizar a noção de transformação linear considerando

- uma mudança local de coordenadas $z = T(x)$, $T(0) = 0$ com $T : U_0 \rightarrow R^n$ um difeomorfismo em U_0 , uma vizinhança da origem.
- uma realimentação de estado $u = \alpha(x) + \beta(x)v$ com $\alpha(0) = 0, \beta(0) \neq 0, \alpha : U_0 \rightarrow R, \beta : U_0 \rightarrow R$ funções suaves de forma a obter o sistema linear equivalente $\dot{z} = Az + bv$.



Exemplo 1: Seja o sistema não-linear com ponto de equilíbrio em (0,0)

$$\dot{x}_1 = -2x_1 + ax_2 + \text{sen } x_1$$

$$\dot{x}_2 = -x_2 \cos x_1 + u \cos 2x_1$$

Existe uma não linearidade em x_1 que não pode ser cancelada diretamente pela lei de controle u . Porém, se definirmos o novo sistema:

$$z_1 = x_1$$

$$z_2 = ax_2 + \text{sen } x_1$$

tem-se

$$\dot{z}_1 = -2z_1 + z_2$$

$$\dot{z}_2 = -2z_1 \cos z_1 + \cos z_1 \text{sen } z_1 + au \cos 2z_1$$

E agora, tomando $a=1$, se $u = \frac{1}{\cos 2z_1} (v - \cos z_1 \text{sen } z_1 + 2z_1 \cos z_1)$ com v a nova entrada equivalente a ser projetada obtém-se o novo sistema

$$\dot{z}_1 = -2z_1 + z_2$$

$$\dot{z}_2 = v$$

Uma vez que o novo sistema é controlável pode-se obter $K = [K_1 \ K_2]$ tal que o sistema a realimentado tenha pólos arbitrários com $v = -K_1 z_1 - K_2 z_2$. Por exemplo, escolhendo-se os pólos em $-2, -2$ obtém-se $v = -2z_2$ o que fornece

$$\dot{z}_1 = -2z_1 + z_2$$

$$\dot{z}_2 = -2z_2$$

A lei de controle $u(x)$ obtida é da forma

$u = \frac{1}{a \cos 2x_1} (-2x_2 - 2\text{sen}x_1 - \cos x_1 \text{sen} x_1 + 2x_1 \cos x_1)$. Finalmente o estado x pode ser

reconstruído a partir de z :

$$x_1 = z_1$$

$$x_2 = (z_2 - \text{sen} z_1) / a$$

Questões a serem abordadas a seguir .

1. Qual classe de sistemas lineares pode ser transformada em sistemas lineares por meio de realimentação de estado;
2. Como obter a transformação de estado $z = T(x)$ quando existir.

3.1 Condições de existência da transformação

Teorema. O sistema não linear $\dot{x} = f(x) + g(x)u$, $x \in R^n$, $u \in R$ é linearizável através de realimentação de estado se e só se existe uma região Ω onde as seguintes condições são satisfeitas

1. Os vetores $[g, ad_f^1 g, \dots, ad_f^{n-2} ad_f^{n-1} g]$ são linearmente independentes em Ω
2. O conjunto $\{g, ad_f g, \dots, ad_f^{n-2} g\}$ é involutivo.

com $ad_f g = [f, g] = \nabla gf - \nabla fg$ *colchete de Lie*

$$ad_f^0 g = g$$

$$ad_f^i g = [f, ad_f^{i-1} g]$$

Observação. A condição de involutividade está relacionada à existência de solução de um conjunto de equações diferenciais parciais envolvendo a obtenção da transformação $T(x)$.

Definição. Um conjunto $\{f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x)\}$ é dito ser involutivo se

$\text{posto}[f_1(x)f_2(x)\dots f_m(x)] = \text{posto}[f_1(x)f_2(x)\dots f_m(x)[f_i(x), f_j(x)]]$ para todo x e todo i, j .

3.2 Procedimento de linearização por realimentação

1. Construir os vetores $g, ad_f g, \dots, ad_f^{n-1} g$
2. Verificar se as condições de controlabilidade e involutividade são satisfeitas
3. Encontrar o primeiro estado z_1 usando

$$\nabla_{z_1} ad_f^i g = 0, \quad i = 0, \dots, n-2$$

$$\nabla_{z_1} ad_f^{n-1} g \neq 0$$

onde

$$\nabla_{z_1} = \frac{\partial z_1}{\partial x} \quad \text{é o Jacobiano}$$

$$ad_f g = [f, g] = \nabla gf - \nabla fg \quad \text{colchete de Lie}$$

$$ad_f^0 g = g$$

$$ad_f^i g = [f, ad_f^{i-1} g]$$

A desigualdade acima $\nabla_{z_1} ad_f^{n-1} g \neq 0$ pode ser substituída pela equação normalizada

$\nabla_{z_1} ad_f^{n-1} g = 1$ sem afetar a linearização. Esta equação e $\nabla_{z_1} ad_f^i g = 0, \quad i = 0, \dots, n-2$ constituem as n equações

$$[ad_f^0 g, ad_f^1 g, \dots, ad_f^{n-2} ad_f^{n-1} g]^T \begin{bmatrix} \partial z_1 / \partial x_1 \\ \partial z_1 / \partial x_2 \\ \vdots \\ \partial z_1 / \partial x_{n-1} \\ \partial z_1 / \partial x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Dada a condição de independência dos vetores $[ad_f^0 g, ad_f^1 g, \dots, ad_f^{n-2} ad_f^{n-1} g]$ as derivadas parciais $\partial z_1 / \partial x_1, \dots, \partial z_1 / \partial x_n$ podem ser computadas unicamente a partir das equações acima. A variável de estado z_1 pode ser então encontrada, em princípio, integrando-se as derivadas parciais. Observe que, analiticamente pode não ser trivial resolver o conjunto de equações diferenciais parciais, embora soluções numéricas são relativamente fáceis de encontrar por causa da natureza recursiva das equações.

4. Obter a transformação $z = T(x) = [z_1 \ L_f z_1 \dots L_f^{n-1} z_1]^T$ e a entrada $u(x) = \alpha(x) + \beta(x)v$

$$\alpha(x) = -\frac{L_f^n z_1}{L_g L_f^{n-1} z_1}$$

$$\beta(x) = \frac{1}{L_g L_f^{n-1} z_1}$$

onde

$\frac{\partial z_1}{\partial x} f = L_f z_1$ é a derivada direcional de z_1 ao longo da direção de f . Tem-se

$$L_f^i z_1 = L_f (L_f^{i-1} z_1) = \nabla(L_f^{i-1} z_1) f$$

$$L_g L_f z_1 = \nabla(L_f z_1) g.$$

Utilizando a notação ∇ , pode-se escrever $u(x)$ da seguinte forma

$$u(x) = \frac{v - \nabla z_n f}{\nabla z_n g}$$

com $\nabla z_n f = L_f z_n = L_f (L_f^{n-1} z_1) = L_f^n z_1$ e $\nabla z_n g = L_g z_n = L_g L_f^{n-1} z_1$.

Pode-se verificar que o procedimento acima com $z := T(x) = [z_1 \ L_f z_1 \dots L_f^{n-1} z_1]^T$ leva ao seguinte sistema linear na forma canônica

$$\dot{z}_1 = z_2$$

$$\dot{z}_2 = z_3$$

\vdots

$$\dot{z}_n = v$$

onde $\dot{z}_n = L_f^n z_1 + L_g L_f^{n-1} z_1 u$ com

$$u(x) = \frac{v - \nabla z_n f}{\nabla z_n g}$$

e

$\nabla z_n f = L_f z_n = L_f (L_f^{n-1} z_1)$ usando o fato de que $z = T(x)$

$$\nabla z_n g = L_g z_n = L_g L_f^{n-1} z_1.$$

Obtenção de $u(x)$ via forma canônica acima

Utiliza-se $\dot{z}_n = v$. Tem-se que $\dot{z}_n = \frac{\partial z_n}{\partial x} \frac{dx}{dt} = \nabla_{z_n} \dot{x}$ e então

$$\dot{z}_n = \nabla_{z_n} (f(x) + g(x)u) = L_f z_n + L_g z_n u = v. \text{ Fornecendo } u(x) = \frac{v - L_f z_n}{L_g z_n}.$$

Exemplo 1. Mostrar que o sistema abaixo não é linearizável por realimentação de estado

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 - x_1^2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 + 2x_1x_2 - 2x_1^3 + 2x_3u \\ \dot{x}_3 &= u\end{aligned}$$

Exemplo 2. Mostrar que o sistema abaixo é linearizável por realimentação de estado e computar a transformação $z = T(x)$, $T(0) = 0$.

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 - x_1^2 u \\ \dot{x}_2 &= u\end{aligned}$$

3.2 Controladores de seguimento de referência

Pode-se também projetar controladores de seguimento via controle sistema equivalente se a trajetória desejada puder ser expressa em termos do primeiro estado linearizante z_1 .

Considere o sistema linear equivalente com dinâmica expressa como

$$\dot{z}_1^{(n)} = v$$

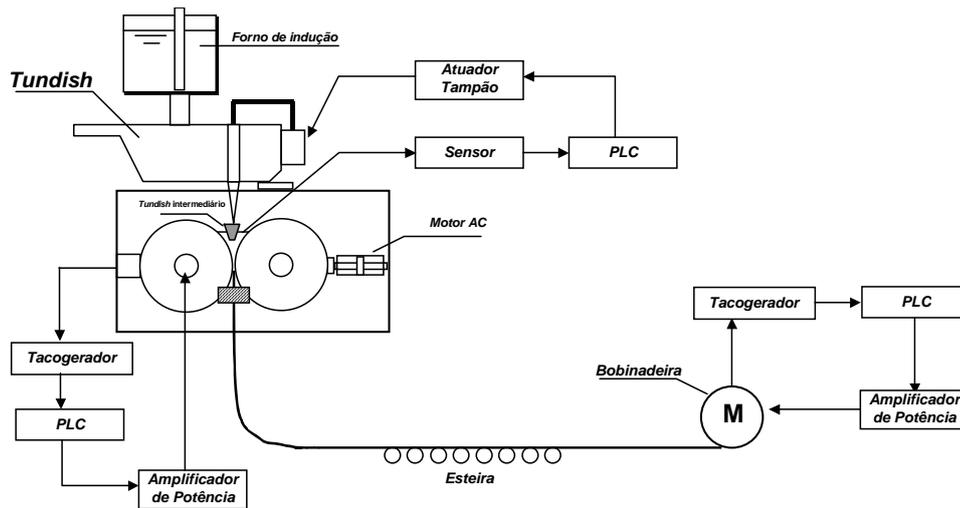
Suponha uma trajetória $z_{d1}(t)$ pré-especificada. A lei de controle $v = \dot{z}_{d1}^{(n)} - a_{n-1}\tilde{z}_1^{(n-1)} - a_{n-2}\tilde{z}_1^{(n-2)} - \dots - a_1\dot{\tilde{z}}_1 - a_0\tilde{z}_1$ com $\tilde{z}_1 = z_1 - z_{d1}$ leva à seguinte dinâmica de erro

$$\dot{\tilde{z}}_1^{(n)} + a_{n-1}\tilde{z}_1^{(n-1)} + a_{n-2}\tilde{z}_1^{(n-2)} + \dots + a_1\dot{\tilde{z}}_1 + a_0\tilde{z}_1 = 0.$$

A dinâmica acima é estável se as constantes a_i forem escolhidas apropriadamente.

Problema proposto

Sistema de controle de nível processo de lingotamento de tiras.



Equações do processo. Para $x_1 = h_1, x_2 = h_2$ tem-se

$$\dot{x} = f(x) + Bu$$

$$\text{onde } \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-K\sqrt{x_1}}{A_T} \\ \frac{[K\sqrt{x_1} - Q_{o_2}]}{M(x_2)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ A_T \\ 0 \end{bmatrix} u \text{ com } M(x_2) = [x_g + 2R - 2\sqrt{R^2 - x_2^2}]L.$$

Obter a lei de controle de linearização para regular o nível em .13m.

Table 1: Parâmetros do processo

A_T	6.75E-3m ²	c_f	3.5E-2m ³ /s
K	0.13E-2m ³ s ^{-1/2}	R, L	3.75E-1m
x_g	2E-3m	n_f	6
A_f	6.75E-3m ²	g	9.8 m/s ²
r	4E-3m		

4. Regulador linear quadrático

A teoria de controle linear quadrático fornece uma ferramenta analítica para o projeto de controladores multivariáveis. O problema foi primeiro tratado por Wiener nos anos 40 com trabalhos em filtragem pelo método da média quadrática, referenciado como problema de controle de média quadrática. O nome regulador quadrático linear (LQR, do inglês) só aparece na literatura no final da década de 50 com Kalman. O problema básico envolvido é a obtenção de uma lei de controle de realimentação de estado que minimize uma função custo.

4.1 Formulação do problema do regulador quadrático

Seja o sistema linear invariante no tempo (A,B,I,0)

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad x(0) = x_0 \quad (4)$$

com $x \in R^n$, $u \in R^m$ e (A,B) estabilizável e a lei de realimentação de estado:

$$u = -Kx \quad (5)$$

onde $K \in R^{m \times n}$ é a chamada matriz de realimentação de estado. Substituindo a lei de realimentação de estado no sistema (A,B,C) tem-se

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (A - BK)x \\ y &= Cx \end{aligned} \quad (6)$$

Problema: Obter $u(\cdot)$, uma função contínua por partes em R , que minimiza a função de custo quadrática $J(x_0, u)$ associada ao sistema (A,B,I,0):

$$J(x_0, u) = \int_0^T (x^T Qx + u^T Ru) dt + x^T(T) Mx(T) \quad (7)$$

onde $Q = Q^T \geq 0$, $M \geq 0$, $R = R^T > 0$ são matrizes de ponderação e $x(\cdot)$ solução de (A,B,I,0) em resposta à lei de controle $u(\cdot)$ e condição inicial x_0 ; T é fixo e $x(T)$ livre.

Solução:

Utiliza-se o princípio de otimalidade e equações de Hamilton-Jacobi.

Princípio de otimalidade: Se $u^*(\tau)$ é ótimo no intervalo $[t, T]$, iniciando em $x(t)$, então $u^*(\tau)$ é necessariamente ótimo no subintervalo $[t + \delta t, T]$ para qualquer δt tal que $T - \delta t \geq t > 0$

Seja

$$J^*(x, t) = \min_{u[t, T]} \left\{ \int_t^T (x^T Qx + u^T Ru) d\tau + x^T(T) Mx(T) \right\} \text{ custo mínimo para } x_0=x \text{ e } t_0=t$$

onde $*$ denota valor ótimo e $u[t, T]$ o sinal de controle no intervalo $[t, T]$.

Usando a propriedade de adição de integrais e o princípio de otimalidade temos

$$J^*(x, t) = \min_{u[t, t+\delta t]} \left\{ \int_t^{t+\delta t} (x^T Qx + u^T Ru) d\tau + J^*(x(t+\delta t), t+\delta t) \right\} \quad (8)$$

Note que para escrever a equação acima usamos o fato que o valor mínimo de J iniciando no estado $x(t+\delta t)$ no tempo $t+\delta t$ é dado por $J^*(x(t+\delta t), t+\delta t)$.

Note também que pelo princípio de otimalidade, o problema de obter um controle ótimo no intervalo $[t, T]$ foi reduzido ao problema de obter um controle ótimo no intervalo reduzido $[t, t+\delta t]$.

Aproximando a última integral por $(x^T Qx + u^T Ru)\delta t$ e fazendo uma expansão por série de Taylor de $J^*(x(t+\delta t), t+\delta t)$ no ponto $(x(t), t)$ com $x(t+\delta t) - x(t)$ aproximada por $(Ax + bu)\delta t$, obtemos

$$J^*(x, t) = \min_{u(t)} \left\{ (x^T Qx + u^T Ru)\delta t + J^*(x, t) + \left[\frac{\partial J^*}{\partial t} \right]^T \delta t + \left[\frac{\partial J^*}{\partial x} \right]^T (Ax + Bu)\delta t \right\}. \text{ No limite quando } \delta t \rightarrow 0,$$

com

$$J^*(x(t), T) = x^T(T) Mx(T) \text{ obtém-se a equação de Hamilton-Jacobi}$$

$$-\frac{\partial J^*}{\partial t} = \min_{u(t)} \{x^T Qx + u^T Ru + \left[\frac{\partial J^*}{\partial x} \right]^T (Ax + Bu)\} \quad (9)$$

$$J^*(x, T) = x^T Mx, \forall x \text{ condição de contorno}$$

Problema de horizonte finito: Equação matricial de Riccati

A minimização pode ser feita fazendo-se o gradiente em relação a u de

$$x^T Qx + u^T Ru + \left[\frac{\partial J^*}{\partial x} \right]^T (Ax + Bu) \text{ igual a zero}$$

e resolvendo para u , o que fornece

$$u^* = -\frac{1}{2} R^{-1} B^T \frac{\partial J^*}{\partial x} \quad (10)$$

$$\text{Utilizou-se aqui } \frac{\partial}{\partial u} [(u^T Ru) + B^T \frac{\partial J^*}{\partial x} u] = 2Ru + B^T \frac{\partial J^*}{\partial x}.$$

Há necessidade aqui de conhecer a forma de $J^*(x, t)$. Sabe-se que a integral de uma forma quadrática para um sistema linear é quadrática na condição inicial. Assim, é razoável considerar a seguinte forma para $J^*(x, t)$

$$J^*(x, t) = x^T P(t)x; P(t) \text{ simétrica.}$$

O gradiente de $J^*(x, t)$ é então $2P(t)x$. Substituindo o gradiente de $J^*(x, t)$ na equação de Hamilton-Jacobi obtém-se

$$-\frac{\partial J^*}{\partial t} = \min_{u(t)} \{x^T Qx + u^T Ru + \left[\frac{\partial J^*}{\partial x} \right]^T (Ax + Bu)\}.$$

$$\text{Usando } u^* = -\frac{1}{2} R^{-1} B^T \frac{\partial J^*}{\partial x} \text{ fornece}$$

$$-x^T \dot{P}(t)x = x^T (A^T P + PA - PBR^{-1}B^T P + Q)x \text{ (usando a identidade } 2x^T PAx = x^T (A^T P + PA)x).$$

A condição de contorno é dada por:

$$J^*(x, T) = x^T P(T)x = x^T Mx$$

Então, obtém-se a equação de Riccati e a condição de contorno:

$$\dot{P}(t) = A^T P + PA - PBR^{-1}B^T P + Q$$

$$P(T) = M$$

E, finalmente obtém-se a lei de controle ótimo em função de $P(t)$

$$u^* = -K(t)x$$

$$\text{com } K(t) = R^{-1}B^T P(t)$$

Problema LQR de estado estacionário

$$0 = A^T P + PA - PBR^{-1}B^T P + Q$$

$$u^* = -Kx$$

$$\text{com } K = R^{-1}B^T P$$

A solução do problema LQR de estado estacionário é geralmente dada em duas partes. Primeiro estabelece-se condições de existência de uma solução única positiva definida da equação de Riccati tal que $A - BR^{-1}B^T$ seja estável e então o problema LQR é solucionado pela lei de realimentação ótima $u = -R^{-1}B^T Px$.

Teorema: Considere o problema LQR. Suponha (A,B) estabilizável e (A,D) detetável com $Q = D^T D$. Então, existe P única definida positiva e simétrica satisfazendo

$$A^T P + PA - PBR^{-1}B^T P + Q = 0 \quad (11)$$

e a lei de controle dada por $u = -R^{-1}B^T Px$ é ótima e estabiliza o sistema realimentado com o custo para condição inicial x_0 dado por

$$J(x_0, u^*) = x_0^T P x_0$$

Prova. Usando a seguinte candidata de função de Lyapunov $V(x) = x^T Px$ mostraremos que

$\dot{V}(x) = \frac{d}{dt} x^T Px < 0$ para $x \neq 0$. Calculando a derivada de $V(x)$ e usando (11) obtém-se

$\dot{V}(x) = -x^T (Q + PBR^{-1}B^T P)x$ a qual pode ser escrita como $\dot{V}(x) = -x^T (Q + (R^{-1}B^T P)^T R (R^{-1}B^T P))x$,

$\dot{V}(x) = 0$ implica $Dx = 0$ e $R^{-1}B^T Px = 0$ usando a condição de detetabilidade tem-se que $Dx = 0$ só para $x = 0$ e então segue que $\dot{V}(x) < 0$ e $\dot{V}(x) = 0$ para $x = 0$ e o sistema é assintoticamente estável.

Para verificar que a lei $u = -R^{-1}B^T Px$ é ótima, em (10) substituir o gradiente de $J^*(x, t) = x^T Px$. Finalmente, o custo total pode ser calculado verificando-se que

$$\begin{aligned} J(x, u^*) &= \int_0^\infty \dot{V}(x) dt = V(x) \Big|_0^\infty = -V(x_0) \\ &= -x_0^T P x_0 \end{aligned}$$

Observação: A solução do LQR padrão reduz-se ao problema de obter a solução positiva definida da equação de Riccati.

Comandos Matlab:

O módulo *Control System* contém subrotinas para o cálculo do ganho de realimentação K e da solução da equação de Riccati.

Comandos Matlab

$[K, P] = lqr(A, B, Q, R)$

$[K, P] = lqr2(A, B, Q, R)$ Solução da ARE via matriz Hamiltoniana do sistema:

$$H = \begin{bmatrix} A & -BR^{-1}B^T \\ -Q & -A^T \end{bmatrix}$$

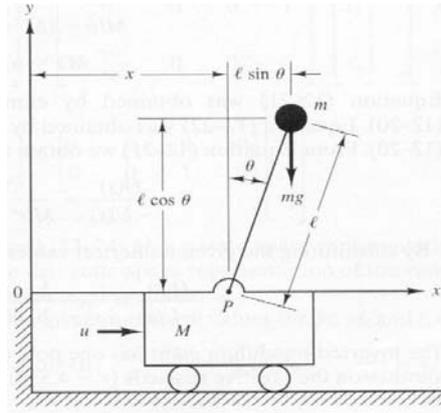
Outras rotinas:

reg; are; ric

4.2 Exercício resolvido

Controle pêndulo invertido sobre um carrinho

Considere o sistema de pêndulo invertido mostrado na figura apresentada a seguir.



Projetar um sistema de controle para manter o pêndulo invertido na posição vertical na presença de distúrbios aplicados ao ângulo θ e /ou na velocidade angular $\dot{\theta}$. É desejado que o sistema de controle retorne o carrinho à posição de referência ao final do processo de controle. (Não há entrada de referência para o carrinho). Considere os valores numéricos para M, m, ℓ, I :

$$M = 2\text{kg}, \quad m = 0.1\text{kg}, \quad \ell = 0.5\text{m}, \quad I = 0.$$

As equações do pêndulo invertido no sistema do carrinho são apresentadas a seguir.

Sejam H e V as forças vertical e horizontal exercidas pelo carrinho sobre o pêndulo. Utilizando a lei de Newton ao movimento linear tem-se:

$$\begin{aligned} M\ddot{x} &= u - H \\ H &= m \frac{d^2}{dt^2}(x + \ell \sin \theta) \\ &= m\ddot{x} + m\ell\ddot{\theta} \cos \theta - m\ell(\dot{\theta})^2 \sin \theta \\ V - mg &= m \frac{d^2}{dt^2}(\ell \cos \theta) \\ &= m\ell[-\ddot{\theta} \sin \theta - (\dot{\theta})^2 \cos \theta] \end{aligned}$$

A aplicação da lei de Newton ao movimento rotacional fornece:

$$I\ddot{\theta} = V\ell \sin \theta - H\ell \cos \theta$$

As equações do sistema podem ser resumidas em

$$\begin{aligned} M\ddot{x} &= u - m\ddot{x} - m\ell\ddot{\theta} \cos \theta + m\ell(\dot{\theta})^2 \sin \theta \\ I\ddot{\theta} &= mg\ell \sin \theta - \ell \sin \theta [m\ell\ddot{\theta} \sin \theta + m\ell(\dot{\theta})^2 \cos \theta] - \ell \cos \theta [m\ddot{x} + m\ell\ddot{\theta} \cos \theta - m\ell(\dot{\theta})^2 \sin \theta] \end{aligned}$$

Linearizando em torno de $\theta = 0$ e desprezando os termos $\theta^2, (\dot{\theta})^2, \theta\dot{\theta}$ tem-se:

$$\begin{aligned} (M + m)\ddot{x} + m\ell\ddot{\theta} &= u \\ (I + m\ell^2)\ddot{\theta} + m\ell\ddot{x} &= mg\ell\theta \end{aligned}$$

Agora, definindo as variáveis de estado como $x_1 = \theta, x_2 = \dot{\theta}, x_3 = x, x_4 = \dot{x}$ podemos escrever a equação de espaço de estado:

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

onde

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 20.601 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -0.4905 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0.5 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \\ x \\ \dot{x} \end{bmatrix}.$$

Pede-se usar o esquema de controle de realimentação de estado da forma

$$u = -Kx.$$

Usando MATLAB, determine a matriz ganho da realimentação de estado $K=[k_1 \ k_2 \ k_3 \ k_4]$ tal que o seguinte índice J de desempenho seja minimizado:

$$J = \int_0^{\infty} (x^* Q x + u^* R u) dt$$

onde:

$$Q = \begin{bmatrix} 100 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad R = 1.$$

Então, obter a resposta do sistema para a seguinte condição inicial:

$$\begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \\ x_4(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Utilizar na simulação as equações do sistema linearizado e para validar o projeto para o sistema não-linear utilizar as equações do sistema não-linear. Para o último caso utilizar no ambiente MATLAB a função ODE45 ou no ambiente SIMULINK uma função não-linear.

Finalmente, plotar para os dois casos, as curvas da resposta θ versus t , $\dot{\theta}$ versus t , x versus t e \dot{x} versus t . Apresentar o diagrama em blocos do sistema controlado.

Solução do problema usando a função ODE45 do Matlab

São necessários dois programas: um principal (**Arquivo1**) e outro secundário (**Arquivo2**).

```

Arquivo1:

% Controle de um pêndulo invertido sobre um carrinho

global M m l I g a K

% Variáveis
M = 2.0; % Kg
m = 0.1; % Kg
l = 0.5; % m
I = 0; % Kg*m^2
g = 9.8; % m/s^2
a = 1/(M+m);

% Sistema Linearizado em torno de teta = 0
A = [0 1 0 0; 20.601 0 0 0; 0 0 0 1; -0.4905 0 0 0];
B = [0; -1; 0; 0.5];

% Projeto do Controlador
Q = [100 0 0 0; 0 1 0 0; 0 0 1 0; 0 0 0 1];
R = 1;

[K,S,E] = lqr(A,B,Q,R) % Calcula a matriz de ganho ótima K

tempo = [0 10]; % Intervalo de tempo
x0=[0.1 0 0 0]'; % Condições iniciais

[t,x]=ode45('arquivo2',tempo,x0); % Obtenção do vetor de estados do sistema
% arquivo2 é uma função

% Sinal de controle u=-kx
for i=1:length(x)
    u(i) = -K*x(i,:);
end

% Plotagem dos resultados
figure
subplot(211); plot(t,x(:,1)); ylabel('x1') % x1
subplot(212); plot(t,x(:,2)); ylabel('x2') % x2

figure
subplot(211); plot(t,x(:,3)); ylabel('x3') % x3
subplot(212); plot(t,x(:,4)); ylabel('x4') % x4

figure
plot(t,u); ylabel('u(t)')

```

O programa principal (**Arquivo1**) é o que contém a função ODE45. Nele podemos incluir todos os outros comandos necessários para obtenção dos resultados, como plotagens e demais cálculos.

Arquivo2:

```

function xponto = arquivo2(t,x)

global M m l I g a K

% Sistema não-linear realimentado

xponto = [x(2);...
          ((m*g*I)*sin(x(1))-0.5*(m*I)^2*a*x(2)^2*sin(2*x(1)))...
          /(I+(m*I)^2-(m*I)^2*a*(cos(x(1)))^2);...
          x(4);...
          ((m*a*I)*(I+(m*I)^2)*x(2)^2*sin(x(1))...
          -0.5*(m*I)^2*(a*g)*sin(2*x(1)))/(I+(m*I)^2-(m*I)^2*a*(cos(x(1)))^2)]...
+ [0;...
   -(m*a*I)*cos(x(1))...
   /(I+(m*I)^2-(m*I)^2*a*(cos(x(1)))^2);...
   0;
   ((I+(m*I)^2)*a)/(I+(m*I)^2-(m*I)^2*a*(cos(x(1)))^2)]*(-K*x);

```

O programa secundário (**Arquivo2**) deve conter obrigatoriamente na primeira linha a sintaxe:

```
function xponto = arquivo2(t,x)
```

onde **xponto** é a vetor de derivadas no tempo do vetor das variáveis de estado **x**. No restante, este programa deve conter a representação espaço de estado do sistema não-linear com realimentação de estado.

Observe que este programa faz uso apenas das variáveis **t** e **x** declaradas internamente. Devendo, portanto, as demais, serem repassadas como variáveis globais tanto no programa principal quanto no programa secundário (neste caso, abaixo da primeira linha e antes da utilização das variáveis pelo programa).