Física para Engenharia II

4320196 (antiga FEP2196)

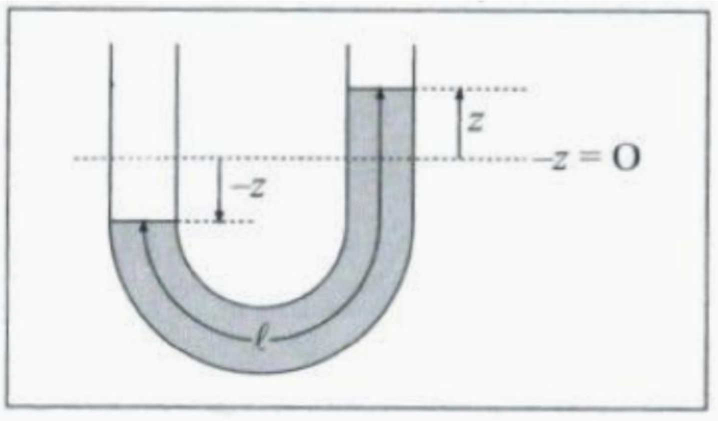
Turma 09 – Sala C2-09   3as – 13h10 / 5as – 9h20.
Turma 10 – Sala C2-10   3as – 15h00 / 5as – 7h30.

Profa. Márcia Regina Dias Rodrigues
Depto. Física Nuclear – IF – USP
Ed. Oscar Sala, sala 222
marciadr@if.usp.br

Página do curso (Stoa -> Cursos -> IF -> 432 -> 4320196)
http://disciplinas.stoa.usp.br/course/view.php?id=80

Aplicações do MHS

Oscilação de um líquido em um tubo



Líquido de densidade ρ
Tubo em U de secção transversal A

$$U(z) = \underbrace{\rho A z}_{\text{Massa elevada}} \cdot gz = \rho A g z^2$$

$$K = \frac{1}{2}\underbrace{\rho A l}_{M}\left(\frac{dz}{dt}\right)^2$$

$$E = \frac{1}{2}\rho A l\left(\frac{dz}{dt}\right)^2 + \rho A g z^2$$

$$\ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x$$

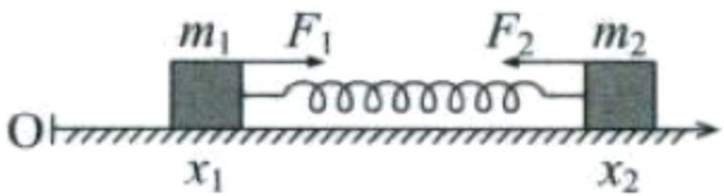
$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$U(t) = \frac{1}{2}kz^2 \rightarrow \frac{1}{2}k = \rho A g \rightarrow k = 2\rho A g$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{2\rho A g}{\rho A l}} = \sqrt{\frac{2g}{l}}$$

Aplicações do MHS

Oscilação de duas partícula



l é o comprimento de equilíbrio

Deformação da mola

$$x = (x_2 - x_1) - l$$

Forças Restauradoras $x>0$

$$F_1 = kx = -F_2$$

Equação do movimento:

$$\begin{cases} m_1\ddot{x}_1 = kx \\ m_2\ddot{x}_2 = -kx \end{cases}$$

Coordenadas do CM

$$X = \frac{m_1x_1 + m_2x_2}{M} \qquad M = m_1 + m_2$$

$$\dot{X} = V = const \qquad \ddot{X} = 0$$

$$\begin{cases} m_2m_1\ddot{x}_1 = m_2kx \\ m_1m_2\ddot{x}_2 = -m_1kx \end{cases}$$

$$m_1m_2(\ddot{x}_2 - \ddot{x}_1) = -(m_1 + m_2)kx$$

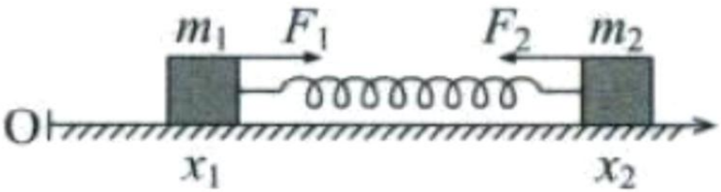
$$\mu = \frac{m_1m_2}{(m_1 + m_2)}$$

$$\frac{m_1m_2}{(m_1 + m_2)}(\ddot{x}_2 - \ddot{x}_1) = -kx$$

$$\ddot{x} = \ddot{x}_2 - \ddot{x}_1$$

Aplicações do MHS

Oscilação de duas partícula



$$E_{total} = E_{int} + E_{cm}$$

$$\boxed{E_{cm} = K_{cm} = \frac{1}{2}MV^2}$$

$$\mu\ddot{x} = -kx$$

$$K_{int} = \frac{1}{2}(m_1 v_1'^2 + m_2 v_2'^2)$$

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2)}$$

Velocidades relativas ao cm $\quad v_1' = -\frac{m_2}{M}\dot{x} \qquad v_2' = \frac{m_1}{M}\dot{x}$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{\mu}}$$

$$K_{int} = \frac{1}{2}\left(\frac{m_1 m_2{}^2 + m_2 m_1{}^2}{M^2}\right)\dot{x}^2 = \frac{1}{2}\mu\dot{x}^2$$

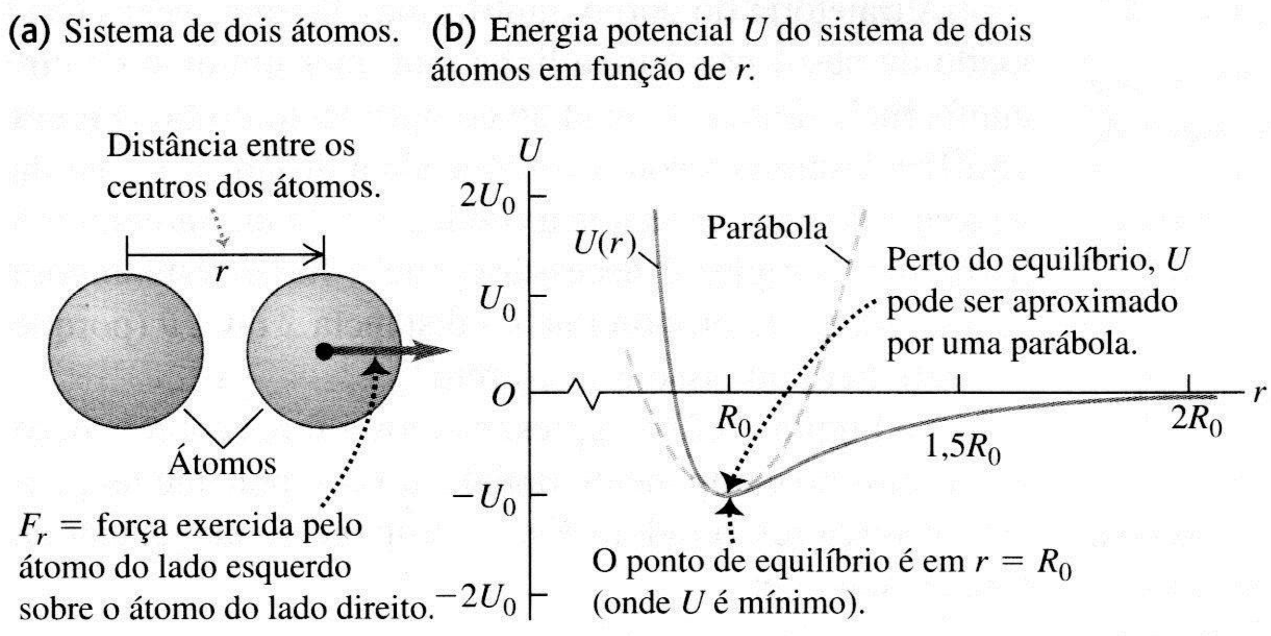
$$\boxed{E_{int} = \frac{1}{2}\mu\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2}$$

Energia de um oscilador harmônico simples de massa μ

A energia do cm e a energia interna se conservam separadamente. A translação do cm não afeta a oscilação

Aplicações do MHS

Molécula Diatômica

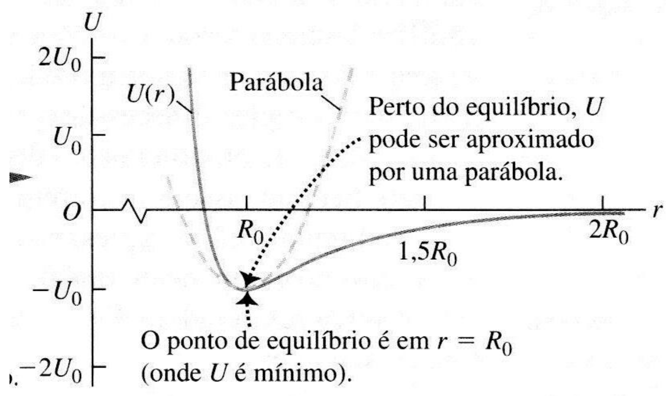


$$U(r) = U_0\left[\left(\frac{R_0}{r}\right)^{12} - 2\left(\frac{R_0}{r}\right)^{6}\right]$$

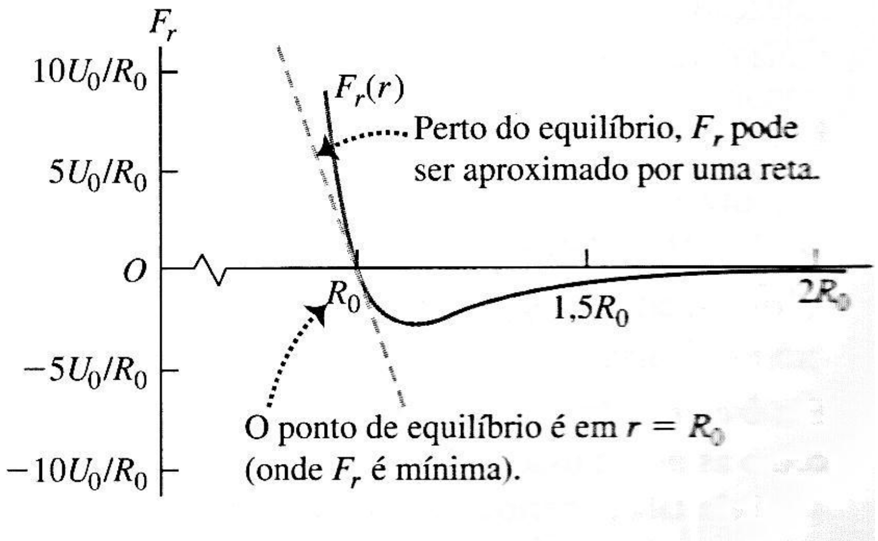
Aplicações do MHS

Molécula Diatômica

(b) Energia potencial U do sistema de dois átomos em função de r.



(c) A força F_r em função de r.



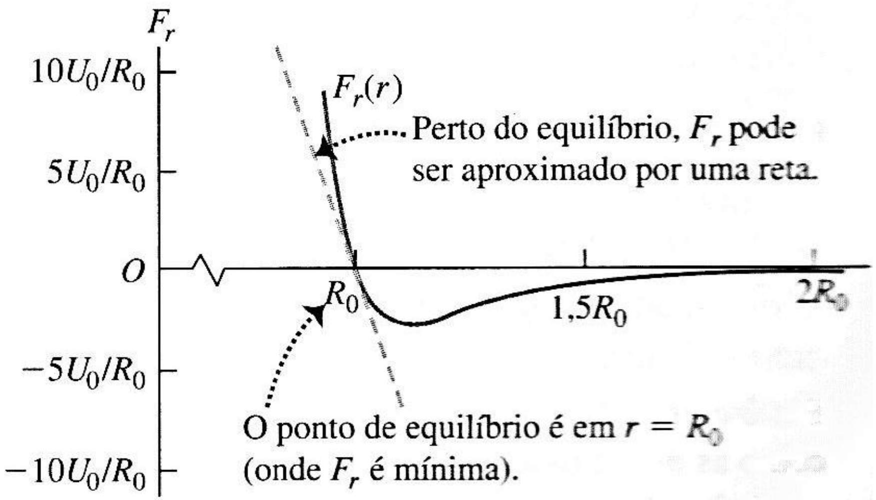
$$F_r = -\frac{dU}{dr} = U_0\left[\frac{12{R_0}^{12}}{r^{13}} - 2\,\frac{6{R_0}^{6}}{r^{7}}\right]$$

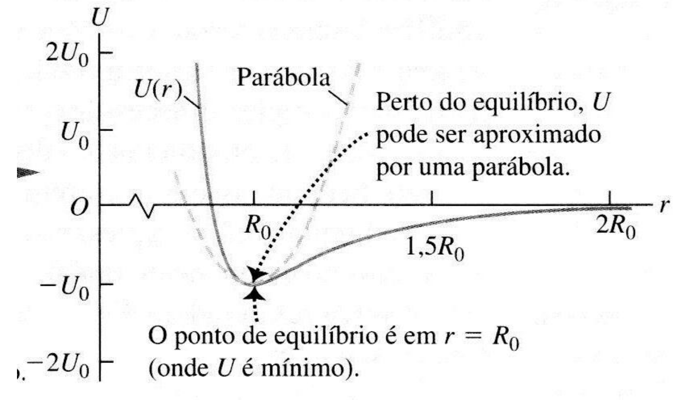
$$F_r = 12\,\frac{U_0}{R_0}\left[\left(\frac{R_0}{r}\right)^{13} - \left(\frac{R_0}{r}\right)^{7}\right]$$

$$x = r - R_0 \rightarrow r = R_0 + x$$

Aplicações do MHS

Molécula Diatômica





$$F_r = -\frac{dU}{dr} = U_0\left[\frac{12{R_0}^{12}}{r^{13}} - 2\frac{6{R_0}^{6}}{r^{7}}\right]$$

$$F_r = 12\frac{U_0}{R_0}\left[\left(\frac{R_0}{r}\right)^{13} - \left(\frac{R_0}{r}\right)^{7}\right]$$

$$x = r - R_0 \rightarrow r = R_0 + x$$

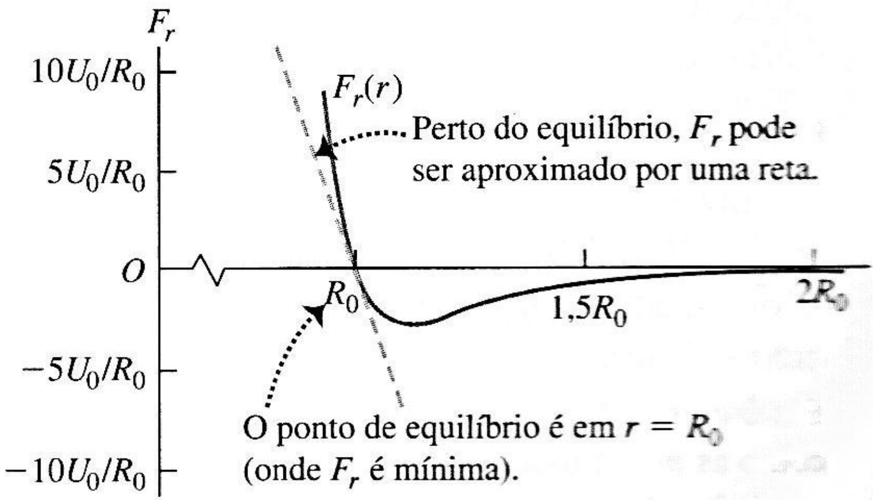
$$F_r = 12\frac{U_0}{R_0}\left[\left(\frac{R_0}{R_0+x}\right)^{13} - \left(\frac{R_0}{R_0+x}\right)^{7}\right]$$

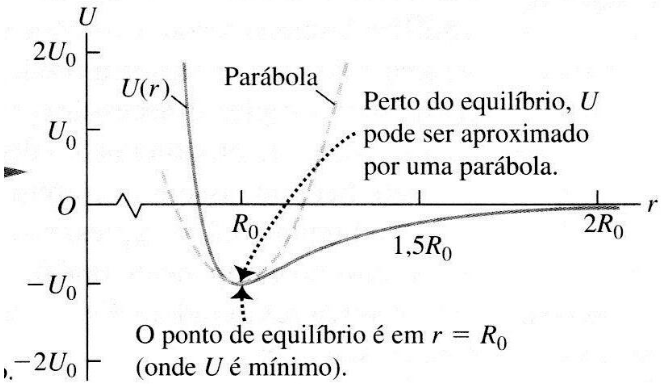
$$= 12\frac{U_0}{R_0}\left[\frac{1}{\left(1+\frac{x}{R_0}\right)^{13}} - \frac{1}{\left(1+\frac{x}{R_0}\right)^{7}}\right]$$

Para pequenos deslocamentos da posição $\mathrm{r} = R_0$

Aplicações do MHS

Molécula Diatômica





Para pequenos deslocamentos da posição $r = R_0$

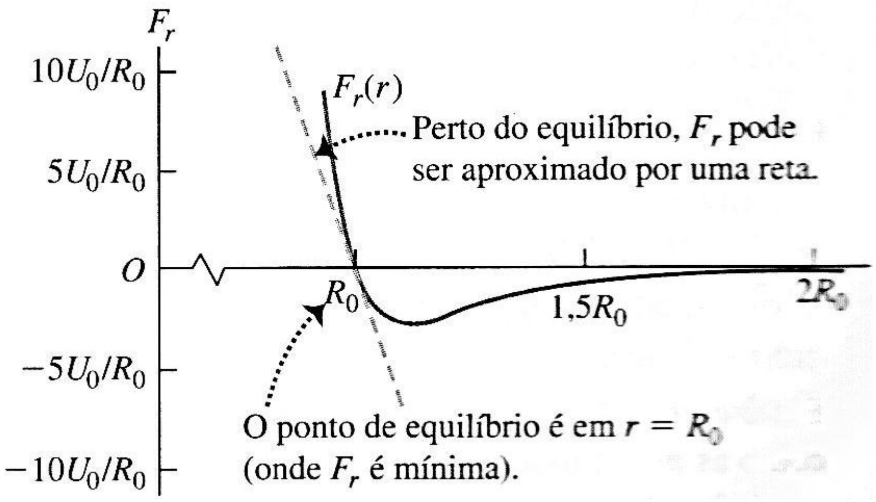
$$(1+u)^n = 1 + nu + \frac{n(n-1)}{2!}u^2 + \cdots$$

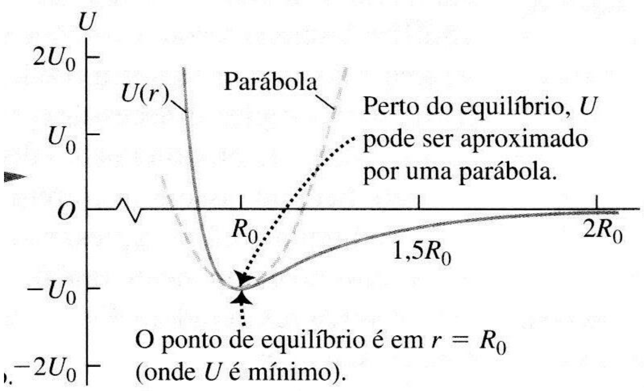
$$\frac{1}{\left(1+\frac{x}{R_0}\right)^{13}} = \left(1+\frac{x}{R_0}\right)^{-13} \approx 1 + (-13)\frac{x}{R_0}$$

$$\frac{1}{\left(1+\frac{x}{R_0}\right)^{7}} = \left(1+\frac{x}{R_0}\right)^{-7} \approx 1 + (-7)\frac{x}{R_0}$$

Aplicações do MHS

Molécula Diatômica





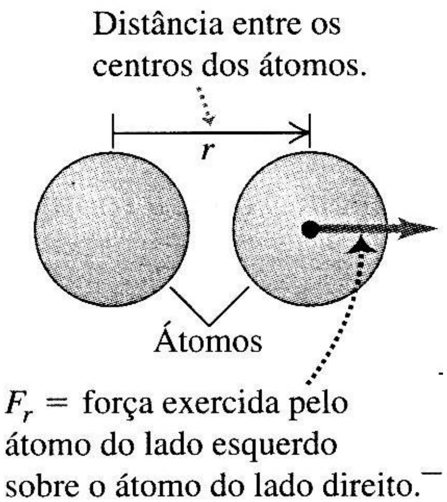
Para pequenos deslocamentos da posição $\mathrm{r} = R_0$

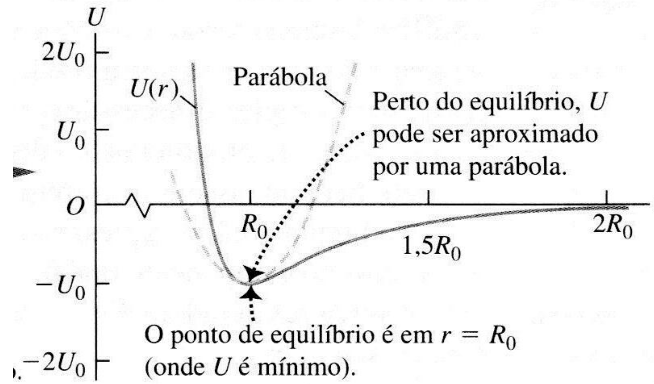
$$F_r \approx 12\frac{U_0}{R_0}\left[\left(1 + (-13)\frac{x}{R_0}\right) - \left(1 + (-7)\frac{x}{R_0}\right)\right] = -\left(\frac{72U_0}{{R_0}^2}\right)x$$

$$k = \left(\frac{72U_0}{{R_0}^2}\right) \qquad U \approx \frac{1}{2}kx^2 - U_0$$

Aplicações do MHS

Molécula Diatômica





Para pequenos deslocamentos da posição $r = R_0$

$$U \approx \frac{1}{2}kx^2 - U_0 \qquad k = \left(\frac{72U_0}{{R_0}^2}\right)$$

$$\mu\ddot{x} = -kx \qquad \mu = \frac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2)}$$

Portanto, a molécula oscila em relação ao centro de massa, com frequência

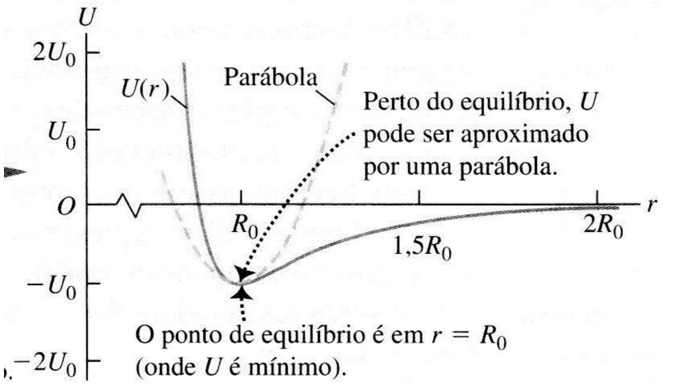
$$\omega = \sqrt{\frac{k}{\mu}}$$

Aplicações do MHS

Molécula Diatômica

$$\mu\ddot{x} = -kx \qquad \mu = \frac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2)}$$

$$k = \left(\frac{72U_0}{{R_0}^2}\right) \qquad \omega = \sqrt{\frac{k}{\mu}}$$



Para pequenos deslocamentos da posição $\mathrm{r} = R_0$

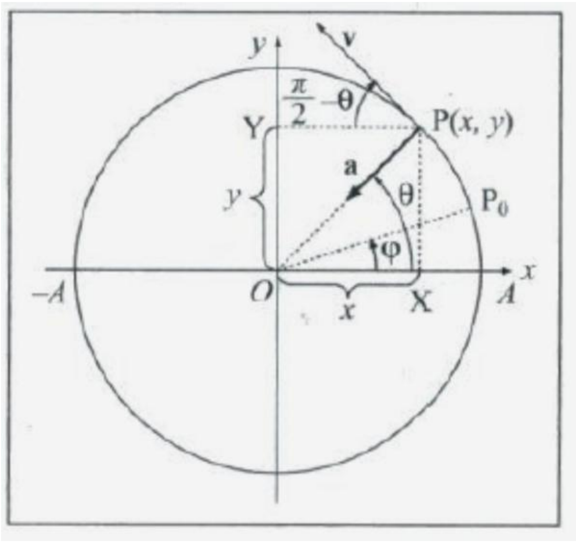
Para uma molécula de CO, R_0 ~1,1x10^{-10}m e a energia de dissociação é U_0 =10 eV m(C)= 2x10^{-26}kg e m(O)=2,7x10^{-26}kg.

$$k \approx 9{,}5 \times 10^3 N/m \rightarrow \nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{\mu}} \approx 1{,}4 \times 10^{14}\mathrm{Hz}$$

$$\lambda = \frac{c}{\nu} \approx 2 \times 10^{-6} m = 2\mu m$$

Região do infravermelho

MHS e MCU



MCU

$$\theta = \omega t + \varphi$$

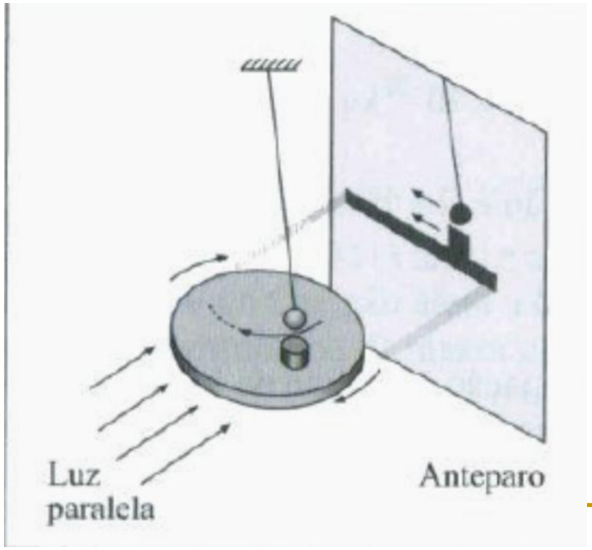
$$\overline{OX} = x = A\,cos\theta = A\cos(\omega t + \varphi)$$

Deslocamento instantâneo da partícula em MHS.

$$v_x = -\omega A\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = -\omega A se\,n(\omega t + \varphi) = \dot{x}$$

$$a_x = -\omega^2 A\cos\theta = -\omega^2 x = \ddot{x}$$

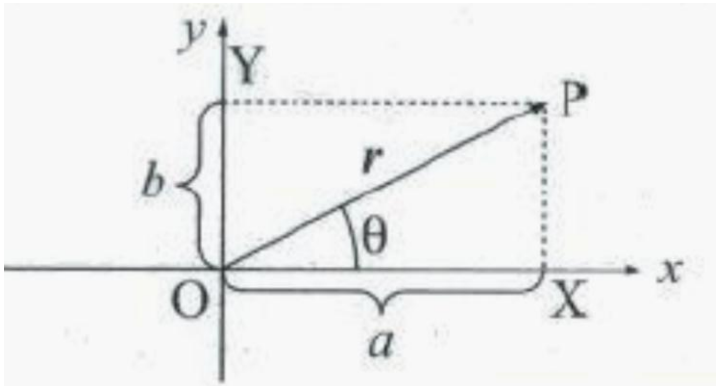
Coincide com MHS



Pêndulo simples e um disco

$$\overline{OY} = y = A\,sen\theta = A se\,n(\omega t + \varphi)$$
$$= A\,cos\left(\omega t + \varphi + {}^{\pi}/_{2}\right)$$

MHS e MCU



Vetor girante $\overrightarrow{OP}$ e o círculo de referência

$$\overrightarrow{OP} = a\hat{\imath} + b\hat{\jmath}$$

Número complexo

$$\hat{\imath} \rightarrow 1$$
$$\hat{\jmath} \rightarrow i$$

$$z = a + ib$$

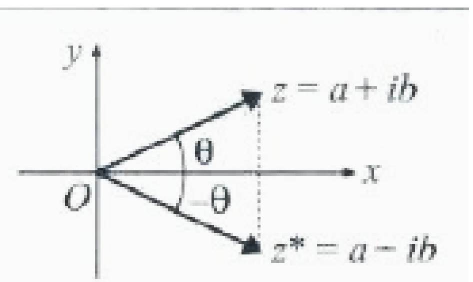
$$i \equiv rotação\ de + \frac{\pi}{2}\ no\ plano\ xy$$

$$i^2 = -1 \rightarrow i = \sqrt{-1}$$

$$z = a + ib \rightarrow \begin{cases} a \equiv Rez \\ b \equiv Imz \end{cases}$$

Complexo conjugado

$$z^* = (a + bi)^* = a - bi$$

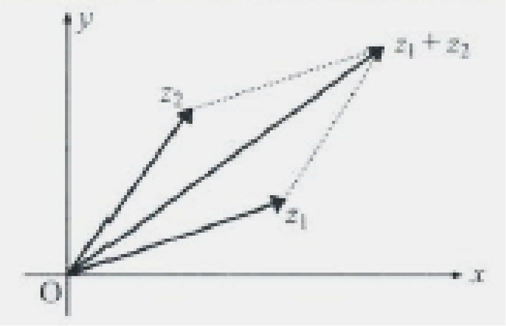


MHS e MCU

Número complexo

soma

$$(a + ib) + (c + id) = (a + c) + i(b + d)$$



produto

$$(a + ib)(c + id) = (ac - bd) + i(ad + bc)$$

Módulo de um complexo

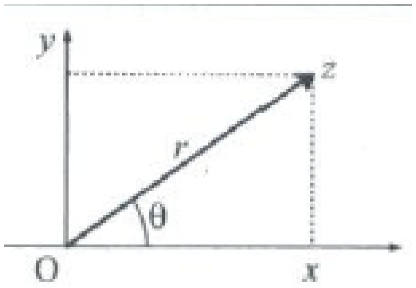
$$|z^2| = zz^* = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2$$

Quociente

$$\frac{(c + id)}{(a + ib)} = \frac{(c + id)(a - ib)}{(a + ib)(a - ib)} = \frac{ac + bd}{a^2 + b^2} + i\,\frac{ad + bc}{a^2 + b^2}$$

MHS e MCU

Número complexo



A fórmula de Euler (1748)

$$e^{ix} = cosx + isenx$$

Coordenadas polares

$$\begin{cases} x = rcos\theta \\ y = rsen\theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} Rez = \frac{1}{2}(z + z^*) \\ Imz = \frac{1}{2i}(z - z^*) \end{cases}$$

$$z = x + iy = r(cos\theta + isen\theta) = re^{i\theta}$$

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\begin{cases} cosx = Re\left(e^{ix}\right) = \frac{1}{2}\left(e^{ix} + e^{-ix}\right) \\ senx = Im\left(e^{ix}\right) = \frac{1}{2i}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right) \end{cases}$$

$$\theta = Argz = arctg\left({}^{y}/_{x}\right)$$

$$e^{\pm i\pi} = -1$$

MHS e MCU

Aplicação no MHS

$$\frac{d^2z}{dt^2} + \omega^2 z = 0$$

$$z(t) = \ e^{pt}$$ p complexo

$$\frac{dz}{dt} = pe^{pt} = pz$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = p\frac{dz}{dt} = p^2 z$$

$$p^2 = -\omega^2 \rightarrow p_{\pm} = \pm i\omega$$

$$p = i\omega$$

C constante complexa

$$z(t) = Ce^{i\omega t}$$

$$C = Ae^{i\varphi}$$

$$z(t) = Ae^{i(\omega t+\varphi)}$$

$$x(t) = Rez(t) = Re[Ae^{i(\omega t+\varphi)}] = Acos(\omega t + \varphi)$$

$$\frac{dz}{dt} = +\mathrm{i}\omega Ae^{i(\omega t+\varphi)}$$

$$\frac{dx}{dt} = Re\left(\frac{dz}{dt}\right) = -\omega Asen(\omega t + \varphi)$$