1. AULA 6

Vetores aleatórios contínuos.

Neste capítulo atribuimos a um ponto amostral valores de várias variáveis aleatórias e analisamos a sua distribuição conjunta. Por praticidade desenvolvemos a teoria para vetores de variáveis aleatórias bidimensionais mas os resultados estendem-se para o caso multidimensional de dimensão finita.

1.1. **Distribuições conjuntas contínuas.** Como no caso das distribuições contínuas unidimensionais para definirmos a probabilidade induzida pelo vetor aleatório $(X, Y) : \Omega \to \Re^2$ devemos considerar $\beta^2 = \beta X \beta$, a classe de subconjuntos de $\Re^2$ obtida através das operações de reunião, intersecção, complementar, em número finito ou infinito de subconjuntos na forma $(-\infty, s] \cap (-\infty, t], \forall s, t \in \Re$, isto é, a σ-álgebra de Borel no plano .

Definição 1.1. Seja $(\Omega, \Im, P)$ um espaço de probabilidade e (X, Y) uma aplicação de Ω em $\Re^2$. (X, Y) é um vetor aleatório contínuo se $X^{-1}((0, s]) \cap Y^{-1}((0, t]) \in \Im, \ \ \forall s, t \in \Re$. Denominamos $(\Re^2, \beta^2, P_{(X,Y)})$ como o espaço de probabilidade induzido por (X, Y).

A medida de probabilidade induzida pelo vetor aleatório

$$(X, Y) : \Omega \to \Re^2.$$

é definida por

$$P_{(X,Y)}(B_1 X B_2) = P(X^{-1}(B_1) \cap Y^{-1}(B_2)), \quad \forall B_1 X B_2 \in \beta^2.$$

Observe que $P_{(X,Y)}$ esta bem definida e

$$P_{(X,Y)}((-\infty, s] \cap (-\infty, t]) = P(X^{-1}((-\infty, s]) \cap Y^{-1}((-\infty, \{t])) =$$
$$P(\{w : X(w) \in (-\infty, t]\} \cap \{w : X(w) \in (-\infty, t]) =$$
$$P(X \leq s, Y \leq t).$$

Definição 1.2. Se (X, Y) é uma variável aleatória bidimencional, a função de distribuição de (X, Y), do plano real, $\Re^2$ em $[0, 1]$ é definida por

$$F_{(X,Y)} : \Re^2 \to [0, 1]$$
$$(x, y) \mapsto F_{(X,Y)}(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y).$$

Teorema 1.3. Propriedades da função de distribuição

Se (X, Y) *é uma variável aleatória bidimencional com função de distribuição* $F_{(X,Y)}(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y)$*. Então*

A) A função de distribuição é uma função não decrescente em cada variável.

B) $\lim_{x \to a^+} F_{(X,Y)}(x, y) = F_{(X,Y)}(a, y)$ *e* $\lim_{y \to a^+} F_{(X,Y)}(x, y) = F_{(X,Y)}(x, a)$*,*$\forall a \in \Re$*, isto é,* $F_{(X,Y)}(x, y)$ *é contínua à direita,em cada variável.*

C) $\lim_{x \to -\infty} F_{(X,Y)}(x, y) = 0$*,* $\lim_{x \to -\infty} F_{(X,Y)}(x, y) = 0$ *e* $\lim_{x,y \to \infty} F_{(X,Y)}(x, y) = 1$*.*

D) A função de distribuição tem a propriedade

$$P(x_1 \leq X \leq x_2, y_1 \leq Y \leq y_2) = F(x_2, y_2) - F(x_1, y_2) - F(x_2, y_1) + F(x_1, y_1) \geq 0.$$

Prova

A) Se x_1 *e* x_2 *são dois números reais com* $x_1 \leq x_2$*, temos* $(-\infty, x_1] \cap (-\infty, y] \subseteq (-\infty, x_2] \cap (-\infty, y]$ *e*

$$F_{(X,Y)}(x_1, y) = P_{((X,Y)}((-\infty, x_1] \cap (-\infty, y]) \leq$$
$$P_{((X,Y)}((-\infty, x_2] \cap (-\infty, y]) = F_{(X,Y)}(x_2, y).$$

Para a variável y *o argumento é análogo.*

B) Para todo número real a*,* $((-\infty, a + \frac{1}{n}] \cap (-\infty, y])_{n \geq 1}$ *é uma sequência decrescente*

$$(-\infty, a] \cap (-\infty, y] = \cap_{n=1}^{\infty} (-\infty, a + \frac{1}{n}] \cap (-\infty, y]]$$

. Portanto

$$F_{(X,Y)}(a, y) = P_{((X,Y)}((-\infty, a] \cap (-\infty, y]) = P_{((X,Y)}(\cap_{n=1}^{\infty} (-\infty, a + \frac{1}{n}] \cap (-\infty, y]) =$$
$$P_{((X,Y)}(\lim_{n \to \infty} (-\infty, a + \frac{1}{n}] \cap (-\infty, y]) =$$
$$\lim_{n \to \infty} P_{((X,Y)}((-\infty, a + \frac{1}{n}] \cap (-\infty, y]) = \lim_{n \to \infty} F_{(X,Y)}(a + \frac{1}{n}], y).$$

Equivalentemente, a sequência $((-\infty, a + \frac{1}{n}] \cap (-\infty, y])_{n \geq 1}$ *pode ser substituida por qualquer outra sequência decrescente* $((-\infty, a_n] \cap (-\infty, y])_{n \geq 1}$*, com* $(a_n)_{n \geq 1}$ *decrescente,* $\lim_{n \to \infty} a_n = a$ *e* $\lim_{n \to \infty} F_{(X,Y)}(a_n, y) = F_{(X,Y)}(a, y)$*, isto é,* $F_{(X,Y)}(x, y)$ *é contínua pela direita em* x*. Com o mesmo raciocínio prova-se que* $F_{(X,Y)}(x, y)$ *é contínua pela direita em* y*.*

C) Observe que

$$\lim_{n\to\infty} F_{(X,Y)}(-n,y) = \lim_{n\to\infty} P_{((X,Y)}((-\infty,-n]\cap(-\infty,y]) =$$

$$P_{((X,Y)}(\lim_{n\to\infty}(-\infty,-n]\cap(-\infty,y]) = P_{((X,Y)}(\cap_{n=1}^{\infty}(-\infty,-n]\cap(-\infty,y]) = P_{((X,Y)}(\emptyset) = 0$$

Da mesma forma a sequência $(-n)_{n\geq 1}$ pode ser substituida por qualquer outra sequência $(a_n)_{n\geq 1}$ que converge para $-\infty$ e concluimos que $\lim_{x\to-\infty} F_{(X,Y)}(x,y) = 0$. *De mesma maneira concluimos que* $\lim_{y\to-\infty} F_{(X,Y)}(x,y) = 0$.

Por outro lado

$$\lim_{n\to\infty} F_{(X,Y)}(n,n) = \lim_{n\to\infty} P_{((X,Y)}((-\infty,n]\cap(-\infty,n]) =$$

$$P_{((X,Y)}(\lim_{n\to\infty}(-\infty,n]\cap(-\infty,n]) = P_{((X,Y)}(\cup_{n=1}^{\infty}(-\infty,n]\cap(-\infty,n]) = P_X(\Re^2) = 1$$

e podemos substituir a sequência $(n)_{n\geq 1}$ por qualquer outra sequência $(a_n)_{n\geq 1}$ que converge para ∞ e concluimos que $\lim_{x,y\to\infty} F_{(X,Y)}(x,y) = 1$.

D)

$$\begin{gathered} P(x_1 \leq X \leq x_2, y_1 \leq Y \leq y_2) = \\ P(x_1 \leq X \leq x_2, Y \leq y_2) - P(x_1 \leq X \leq x_2, Y \leq y_1) = \\ [P(X \leq x_2, Y \leq y_2) - P(X \leq x_1, Y \leq y_2)] \\ -[P(X \leq x_2, Y \leq y_1) - P(X \leq x_1, Y \leq y_1)] \geq 0. \end{gathered}$$

Observação 1.4. As distribuições marginais de $F_{(X,Y)}(x,y)$ podem ser obtidas com o argumento:

$$\begin{gathered} \lim_{n\to\infty} F_{(X,Y)}(n,y) = \lim_{n\to\infty} P_{((X,Y)}((-\infty,n]\cap(-\infty,y]) = \\ P_{((X,Y)}(\lim_{n\to\infty}(-\infty,n]\cap(-\infty,y]) = P_{((X,Y)}(\cup_{n=1}^{\infty}(-\infty,n]\cap(-\infty,y]) = \\ P_{((X,Y)}(\Re\cap(-\infty,y]) = P(X^{-1}(\Re)\cap Y^{-1}((-\infty,y])) = \\ P(\Omega\cap Y^{-1}((-\infty,y])) = P(Y^{-1}((-\infty,y])) = P_Y((-\infty,y]) = F_Y(y). \end{gathered}$$

Se a função de distribuição de (X,Y), for diferenciável em cada variável com $\frac{\delta^2 F_{(X,Y)}(s,t)}{\delta_s\delta_t} = f_{(X,Y)}(s,t)$, *definimos*

Definição 1.5. Se (X,Y) é uma vetor aleatório contínuo com função de distribuição

$$F_{X,Y)}(s,t) = \int_{-\infty}^{s}\int_{-\infty}^{t} f_{(X,Y)}(x,y)dydx,$$

dizemos que $f_{(X,Y)}(s,t)$ é a função densidade de probabilidade de (X,Y) e que a função de distribuição é absolutamente contínua.

Observação 1.6. É evidente que a função densidade de probabilidade é positiva, isto é, $f_{(X,Y)}(s,t) \geq 0, \forall s,t$ em seu domínio de definição e que
$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{(X,Y)}(x,y)dydx = P(-\infty \leq X \leq \infty, -\infty \leq Y \leq \infty) = 1.$$
Tambem calculamos
$$P(a < X \leq b, c < Y \leq d) = \int_a^b \int_c^d f_{(X,Y)}(x,y)dydx.$$

Exemplo 1.7. Se (X,Y) é uma variável aleatória bidimencional com função de distribuição absolutamente contínua e função densidade de probabilidade
$$f(x,y) = (x+y)1_{(0,1)}(x)1_{(0,1)}(y).$$
A sua função de distribuição é: $F_{(X,Y)}(x,y) = 0$ se $x < 0$ ou $y < 0$;

Se $0 \leq x < 1$ e $0 \leq y < 1$ temos
$$F_{(X,Y)}(x,y) = \int_0^x \int_0^y (u+v)dvdu = \int_0^x \int_0^y udvdu + \int_0^x \int_0^y vdvdu =$$
$$\int_0^x u \int_0^y dvdu + \int_0^x (\frac{v^2}{2}|_0^y)du =$$
$$\int_0^x u(v|_0^y)du + \int_0^x \frac{y^2}{2}du = \int_0^x yudu + \frac{y^2}{2}x = \frac{x^2}{2}y + \frac{y^2}{2}x.$$
Se $0 \leq x < 1$ e $Y > 1$ temos
$$F_{(X,Y)}(x,y) = \int_0^x \int_0^1 (u+v)dvdu = \int_0^x \int_0^1 udvdu + \int_0^x \int_0^1 vdvdu =$$
$$\int_0^x u \int_0^1 dvdu + \int_0^x (\frac{v^2}{2}|_0^1)du =$$
$$\int_0^x u(v|_0^1)du + \int_0^x \frac{1}{2}du = \int_0^x 1udu + \frac{1}{2}x = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}x.$$
Se $x > 1$ e $0 \leq y < 1$ temos
$$F_{(X,Y)}(x,y) = \int_0^1 \int_0^y (u+v)dvdu = \int_0^1 \int_0^y udvdu + \int_0^1 \int_0^y vdvdu =$$
$$\int_0^1 u \int_0^y dvdu + \int_0^1 (\frac{v^2}{2}|_0^y)du =$$
$$\int_0^1 u(v|_0^y)du + \int_0^1 \frac{y^2}{2}du = \int_0^1 yudu + \frac{y^2}{2} = \frac{1}{2}y + \frac{y^2}{2}.$$
Se $x > 1$ e $y > 1$ temos $F_{(X,Y)}(x,y) = 1$.

Exemplo 1.8. Considere que o tempo entre acidentes e o custo do sinistro correspondente são modelados pelo vetor aleatório (X, Y) com função densidade de probabilidade conjunta

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & : \quad x < 0 \\ c.\exp[-(x+y)] & : \quad 0 \leq x < y < \infty \end{cases}.$$

onde c é um número real positivo. Qual o valor da constante c?

Para que $f(x, y)$ seja uma função densidade de probabilidade conjunta devemos ter:

a) $f(x, y) \geq 0$ e

b) $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{(X,Y)}(x, y) dydx = 1$.

Como $\exp[-(x + y)] > 0$ o item a) é obvio se $c > 0$.

Contudo, para que o item b seja verdadeiro devemos ter

$$c.\int_0^{\infty}\int_x^{\infty} \exp[-(x+y)]dydx = c.\int_0^{\infty} \exp[-x]\int_x^{\infty} \exp[-y]dydx =$$

$$\int_0^{\infty} \exp[-2x]dx = \frac{c}{2} = 1$$

e concluimos que $c = 2$. Para calcular $P(-\infty < X \leq 3, 2 < Y \leq 5)$

procedemos com

$$P(-\infty < X \leq 3, 2 < Y \leq 5) = 2.\int_0^{3}\int_{\max\{x,2\}}^{5} \exp[-(x+y)]dydx =$$

$$2.\int_0^{2} \exp[-x]\int_2^{5} \exp[-y]dydx + 2.\int_2^{3} \exp[-x]\int_x^{5} \exp[-y]dydx =$$

$$2.(\exp[-2]-\exp[-5])\int_0^{2} \exp[-x]dx + 2.\int_2^{3} \exp[-x](\exp[-x]-\exp[-5])dx =$$

$$2.(\exp[-2] - \exp[-5]).(1 - \exp[-2] + (\exp[-4]-$$
$$\exp[-6]) - 2.\exp[-5].(\exp[-2] - \exp[-3]).$$

Como no caso discreto podemos definir as funçõe densidades de probabilidades marginais de X e de Y:

Definição 1.9. Se (X,Y) é um vetor aleatório, as funções densidades de probabilidades marginais de X, $f_X(x)$, e de Y, $f_Y(y)$ são definidas, para x e y fixados, por

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{(X,Y)}(x,y)dy$$

e

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{(X,Y)}(x,y)dx,$$

respectivamente.

Observação 1.10. Observe que

$$F_X(x) = \lim_{n\to\infty} F_{(X,Y)}(x,n) =$$

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{x} [\int_{-\infty}^{n} f_{(X,Y)}(x,y)dy]dx =$$

$$\int_{-\infty}^{x} [\int_{-\infty}^{\infty} f_{(X,Y)}(x,y)dy]dx$$

identifica uma versão da função densidade de probabilidade para a variável aleatória X.

Em continuação ao exemplo acima temos

Exemplo 1.11. Se

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & : \quad x < 0 \\ 2.\exp[-(x+y)] & : \quad 0 \le x < y < \infty \end{cases}$$

temos que, para x fixado

$$f_X(x) = \int_{x}^{\infty} 2.\exp[-(x+y)]dy = 2.\exp[-2x], \quad 0 \le x < \infty,$$

a função densidade de probabilidade de uma variável aleatória exponencial de parâmetro 2.

Para y fixado

$$f_Y(y) = 2.\int_{0}^{y} .\exp[-(x+y)]dx = 2.\exp[-y].(1-\exp[-y]),\ \ 0 \le y < \infty.$$

Para o cálculo da esperança de uma transformação do vetor aleatório (X,Y) utilizamos um teorema análogo ao Teorema para o caso bivaria do discreto.

Teorema 1.12. *Se (X, Y) é um vetor aleatório e com função densidade de probabilidade $f_{(X,Y)}(x, y)$ e se $g(x, y)$ é uma função a valores reais, limitada, então*

$$E[g(X, Y)] = \int_{\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x, y) dy dx,$$

se existir.

Em continuação ao exemplo acima temos

Exemplo 1.13. Se

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & : \quad x < 0 \\ 2. \exp[-(x + y)] & : \quad 0 \leq x < y < \infty \end{cases}$$

A transformação $X.Y$ tem média

$$E[X.Y] = \int_0^{\infty} \int_x^{\infty} x.y 2. \exp[-(x+y)] dy dx = \int_0^{\infty} 2.x \exp[-x] \int_x^{\infty} y. \exp[-y] dy dx =$$

$$\int_0^{\infty} 2.x \exp[-x](x + 1) \exp[-x] dx = 1.$$

Como X é uma variável aleatória exponencial de parâmetro 2, $E[X] = \frac{1}{2}$ e $Var(X) = \frac{1}{4}$.

Com respeito à variável Y temos

$$E[Y] = \int_0^{\infty} 2.y. \exp[-y](1 - \exp[-y]) dy = \frac{3}{2}$$

$$E[Y^2] = \int_0^{\infty} 2.y^2. \exp[-y](1 - \exp[-y]) dy = \frac{7}{2}$$

e $Var(Y) = \frac{5}{4}$.

Portanto $Cov(X, Y) = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$ e $\rho(X, Y) = \frac{\frac{1}{4}}{\sqrt{\frac{1}{4} \cdot \frac{5}{4}}} = 0,45$.

Como no caso discreto podemos definir as probabilidades condicionais de um evento do espaço amostral induzido por X, condicionado a um valor particular y de Y. Devemos ser cuidadosos pois sabemos que, como a variável Y é contínua, $P(Y = y) = 0$. Tais probabilidades são calculadas através das densidades de probabilidades condicionais:

Observação 1.14. A expressão $P(X \leq x | Y = y) = \int_{-\infty}^{x} \frac{f_{(X,Y)}(x,y)}{f_Y(y)} dx$, satisfaz a equação definidora de uma versão da probabilidade condicional:

$$P(X \leq x, Y \leq y) = \int_{-\infty}^{y} [\int_{-\infty}^{x} f_{(X,Y)}(x, y) dx] dy =$$

$$\int_{-\infty}^{y} [\int_{-\infty}^{x} \frac{f_{(X,Y)}(x,y)}{f_Y(y)} dx] f_Y(y) dy$$

para $y \in \Re$ (isto é $\forall(-\infty, y \in \beta)$. Este fato enseja a definição que segue

Definição 1.15. Se (X, Y) é um vetor aleatório com função densidade de probabilidade conjunta $f_{(X,Y)}(x, y)$, a densidade condicional de X, dado que $Y = y$ é definida por

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{(X,Y)}(x,y)}{f_Y(y)}, \quad f_Y(y) > 0,$$

e densidade condicional de Y, dado que $X = x$ é definida por

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f_{(X,Y)}(x,y)}{f_X(x)}, \quad f_X(x) > 0.$$

Em continuação ao exemplo acima temos

Exemplo 1.16. Se

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & : \quad x < 0 \\ 2.\exp[-(x+y)] & : \quad 0 \le x < y < \infty \end{cases}$$

temos

$f_X(x) = 2.\exp[-2x], \quad 0 \le x < \infty$ e

$f_Y(y) = 2.\exp[-y].(1 - \exp[-y]), \quad 0 \le y < \infty.$

Portanto

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{2.\exp[-(x+y)]}{2.\exp[-y].(1-\exp[-y])} = \frac{\exp[-x]}{1-\exp[-y]}, \quad 0 \le x < y.$$

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{2.\exp[-(x+y)]}{2.\exp[-2x]} = \frac{\exp[-y]}{\exp[-x]}, \quad x \le y < \infty.$$

e podemos calcular

$$E[X|Y=y] = \int_0^y x.\frac{\exp[-x]}{1-\exp[-y]} dx = \frac{1}{1-\exp[-y]}[1 - \exp[-y] - y\exp[-y]] = \varphi(y).$$

Assim $\varphi(Y)$ é uma variável aleatória, com média

$$E[\varphi(Y)] = E\{E[X|Y]\} =$$

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{1-\exp[-y]}[1 - \exp[-y] - y\exp[-y]].2.\exp[-y].(1 - \exp[-y]) dy =$$

$$\int_0^{\infty} (2.\exp[-y] - 2.\exp[-2y] - 2.y.\exp[-2y]) dy = \frac{1}{2} = E[X].$$

Fato é que, como no caso discreto, as propriedades

$$E[X] = E\{E[X|Y]\}$$
$$Var(X) = E[Var(X|Y)] + Var(E[Y|X])$$

são verdadeiras.

Quando a função de densidade condicional é igual à densidade marginal dizemos que as variáveis são independentes. Alternativamente,

Definição 1.17. As variáveis aleatórias X e Y do vetor aleatório (X, Y) são independentes se, e somente se,

$$f_{(X,Y)(x,y)=f_X(x).f_Y(y)}$$

para todo par (x, y) de (X, Y).

Exemplo 1.18. Se

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & : \quad x < 0 \\ \exp[-(x+y)] & : \quad 0 \le x < \infty, 0 \le y < \infty \end{cases}$$

temos

$$f_X(x) = \int_0^\infty \exp[-(x+y)]dy = \exp[-x],$$
$$f_Y(y) = \int_0^\infty \exp[-(x+y)]dx = \exp[-y]$$

de maneira que

$$f_{(X,Y)}(x,y) = \exp[-(x+y)] = \exp[-x].\exp[-y] = f_X(x).f_Y(y)$$

e concluimos que X e Y são independentes.

Observação 1.19. **Distribuição normal bivariada**

Um vetor aleatório bidimensional (X, Y), representando duas características de uma população, tem distribuição normal bivariada, $N(\mu_X, \mu_Y, \sigma_X^2, \sigma_Y^2, \rho_{XY})$, com $E[X] = \mu_X$, $E[Y] = \mu_Y$, $Var(X) = \sigma_X^2$, $Var(Y) = \sigma_Y^2$ e $CORR(X, Y) = \rho_{XY} = \rho$ se, e somente se,

(X, Y) tem função densidade de probabilidade

$$f_{XY}(x,y) = [\frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y\sqrt{1-\rho^2}} \exp\{-K(x,y)\}.$$

onde

$$K(x,y) = \frac{1}{2(1-\rho^2)}[(\frac{x-\mu_X}{\sigma_X})^2 + (\frac{y-\mu_Y}{\sigma_Y})^2 - \frac{2\rho(x-\mu_X)(y-\mu_Y)}{\sigma_X\sigma_Y}].$$

O vetor aleatório bidimensional normal tem algumas propriedades impares, tais como:

As marginais X e Y são independentes se, e somente se, $COV(X,Y) = 0$, pois neste caso a densidade conjunta é o produto de suas marginais as quais tambem tem distribuições normais.

$$f_{XY}(x,y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_X}\exp[(\frac{x-\mu_X}{\sigma_X})^2].\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_Y}\exp[(\frac{y-\mu_Y}{\sigma_Y})^2] = f_X(x).f_Y(y),$$

A distribuição condicional de Y dado X, $(Y|X=x)$ (de X dado Y, $(X|Y=y)$) tambem tem distribuição normal, em particular

$$(Y|X=x) \sim N(\mu_Y + \frac{\rho\sigma_Y}{\sigma_X}(x-\mu_X); \sigma_Y^2(1-\rho^2))$$

Portanto

$$E[Y|X=x] = \mu_Y + \frac{\rho\sigma_Y}{\sigma_X}(x-\mu_X) = (\mu_Y - \frac{\rho\sigma_Y}{\sigma_X}) + \frac{\rho\sigma_Y}{\sigma_X}x$$

é uma função linear de x de parâmetros $\mu_Y - \frac{\rho\sigma_Y}{\sigma_X}$ e $\frac{\rho\sigma_Y}{\sigma_X}$.

Transformações de variáveis aleatórias

Transformações através da função geradora de momentos

Como no caso univariado a função geradora de momentos bivariada caracteriza completamente o modelo probabilístico.

Definição 1.20. A função geradora de momentos de um vetor aleatório (X,Y) é definida por

$$M_{(X,Y)}(t_1,t_2) = E[\exp[t_1.X + t_2.Y].$$

Observação 1.21. Segue da definição e da caracterização da distribuição da variável aleatória pela função geradora de momentos que, se X e Y são variáveis aleatórias independentes se, e somente se,

$$M_{(X,Y)}(t_1,t_2) = E[\exp[t_1.X+t_2.Y] = E[\exp[t_1.X]]E[\exp[t_1.Y]] = M_X(t_1)M_Y(t_2).$$

Se (X,Y) tem função densidade de probabilidade $f_{(X,Y)}(x,y)$,

$$M_{(X,Y)}(t_1,t_2) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \exp[t_1.x + t_2.y].f_{(X,Y)}(x,y)dydx.$$

Exemplo 1.22. Se (X,Y) tem distribuição normal bivariada, $N(\mu_X, \mu_Y, \sigma_X^2, \sigma_Y^2, \rho_{XY})$, então, pode-se provar que a função geradora de momentos bivariada é

$$M_{(X,Y)}(t_1,t_2) = \exp[t_1.\mu_X + t_2.\mu_Y + \frac{1}{2}(t_1^2\sigma_X^2 + 2.\rho.\sigma_X.\sigma_Y + t_2^2\sigma_Y^2].$$

No caso em que $\rho = 0$ temos

$$M_{(X,Y)}(t_1,t_2) = \exp[t_1.\mu_X + t_2.\mu_Y + \frac{1}{2}(t_1^2\sigma_X^2 + t_2^2\sigma_Y^2] =$$
$$\exp[t_1.\mu_X + \frac{1}{2}t_1^2\sigma_X^2]\exp[t_2.\mu_Y + \frac{1}{2}t_1^2\sigma_Y^2] = M_X(t_1)M_Y(t_2),$$

e as variáveis aleatórias X e Y são independentes.

Se consideramos funções reais $g_1(x,y)$ e $g_2(x,y)$ e estamos interessados nas distribuições de $Z_1 = g_1(X,Y)$ e $Z_2 = g_2(X,Y)$ podemos utilizar a técnica da função geradora de momentos, que determina completamente a distribuição de (Z_1, Z_2) Observe que

$$M_{(Z_1,Z_2)}(t_1,t_2) = E[e^{t_1Z_1+t_2Z_2}] = \int\int e^{t_1g_1(x,y)+t_2g_2(x,y)}f_{(X,Y)}(x,y)dxdy.$$

Exemplo 1.23. Sejam X e Y variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuidas com distribuição normal padrão. Considere $Z_1 = g_1(X,Y) = X+Y$ e $g_2(X,Y) = Y-X$. Qual a distribuição de (Z_1,Z_2)?

A função geradora de momentos de (Z_1,Z_2) é

$$M_{(Z_1,Z_2)}(t_1,t_2) = E[e^{t_1Z_1+t_2Z_2}] = E[e^{t_1(X+Y)+t_2(Y-X)}] =$$
$$E[e^{(t_1-t_2)X+(t_1+t_2)Y} = M_X(t_1-t_2).M_Y(t_1+t_2) =$$
$$e^{\frac{(t_1-t_2)^2}{2}}e^{\frac{(t_1+t_2)^2}{2}} = e^{t_1^2+t_2^2} =$$
$$e^{\frac{2t_1^2}{2}}e^{\frac{2t_2^2}{2}} = M_{Z_1}(t_1)M_{Z_2}(t_2).$$

E concluimos que Z_1 e Z_2 são variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuidas com distribuição normal com média 0 e variância 2.

Exemplo 1.24. Sejam X e Y variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuidas com distribuição normal padrão. Encontre a distribuição de $Z = \frac{(Y-X)^2}{2}$.

$$M_Z(t) = E[e^{tZ}] = E[e^{\frac{(Y-X)^2}{2}t}] =$$
$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\pi}e^{[\frac{(y-x)^2}{2}t-\frac{x^2+y^2}{2}]}dxdy =$$
$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{1}{2}[x^2(1-t)+2xyt+y^2(1-t)]}dxdy =$$
$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{1}{2}[y^2(1-t)]}\{\int_{-\infty}^{\infty}e^{[-\frac{1-t}{2}(x^2+\frac{2xyt}{1-t})]}dx\}dy =$$
$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{[-\frac{y^2(1-t)}{2}]}e^{\frac{y^2t^2}{2(1-t)}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-t}}\{\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sqrt{1-t}}{\sqrt{2\pi}}e^{[-\frac{1-t}{2}(x+\frac{yt}{1-t})^2]}dx\}dy =$$
$$\frac{1}{\sqrt{1-t}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{[-\frac{1}{2}(1-t-\frac{t^2}{1-t})y^2]}dy =$$
$$\frac{1}{\sqrt{1-t}}\frac{\sqrt{1-t}}{\sqrt{1-2t}}\frac{\sqrt{1-2t}}{\sqrt{1-t}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{1}{2}(\frac{1-2t}{1-t})y^2)}dy =$$
$$\frac{1}{\sqrt{1-2t}} = (\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}-t})^{\frac{1}{2}}, \quad \forall t < \frac{1}{2}.$$

Concluimos que Z tem distribuição qui-quadrado com um grau de liberdade.

Distribuição do máximo e mínimo de variáveis aleatórias

Seja $\mathbf{X} = (X_1, X_2, ..., X_n)$ um vetor aleatório com função de distribuição $F_{\mathbf{X}}(x_1, ..., x_n)$ e funções de distribuições marginais $F_{X_i}(x_i), \ \ i = 1, 2, ..., n$.

Definição 1.25. Definimos o máximo das variáveis aleatórias $X_1, X_2, ..., X_n$ e denotamos $X_{(n)} = \max\{X_1, X_2, ..., X_n\}$ à variável aleatória que para cada realização $w \in \Omega$,

$$X_{(n)}(w) = x_{(n)} = \max\{X_1(w), X_2(w), ..., X_n(w)\} = \max\{x_1, x_2, ..., x_n\}.$$

Definimos o mínimo das variáveis aleatórias $X_1, X_2, ..., X_n$ e denotamos $X_{(1)} = \min\{X_1, X_2, ..., X_n\}$ à variável aleatória que para cada realização $w \in \Omega$,

$$X_{(1)}(w) = x_{(1)} = \min\{X_1(w), X_2(w), ..., X_n(w)\} = \min\{x_1, x_2, ..., x_n\}.$$

Em resumo, $X_{(n)}$ $(X_{(1)})$ é uma variável aleatória que, para cada realização w, assume o maior (menor) valor entre as realizações de $X_1, X_2, ..., X_n$.

Teorema 1.26. *Se $X_1, X_2, ..., X_n$ são variáveis aleatórias independentes com funções de distribuições $F_{X_i}(x_i), \quad i = 1, 2, ..., n$, a distribuição de $X_{(n)}$ é*

$$F_{X_{(n)}}(x) = \pi_{i=1}^{n} F_{X_i}(x).$$

A distribuição de $X_{(1)}$ é

$$F_{X_{(1)}}(x) = 1 - \pi_{i=1}^{n}(1 - F_{X_i}(x)).$$

Em adição, se $X_1, X_2, ..., X_n$ são variáveis aleatórias identicamente distribuidas com função de distribuição $F_X(x)$, então

$$F_{X_{(n)}}(x) = [F_X(x)]^n.$$

e

$$F_{X_{(1)}}(x) = 1 - [(1 - F_X(x))]^n.$$

Prova

Da equivalência

$$\{\max\{X_1, X_2, ..., X_n\} \leq x\} \Leftrightarrow \{X_1 \leq x, X_2 \leq x, ..., X_n \leq x\}$$

temos

$$F_{X_{(n)}}(x) = P(\max\{X_1, X_2, ..., X_n\} \leq x) = \pi_{i=1}^n F_{X_i}(x).$$

Da equivalência

$$\{\min\{X_1, X_2, ..., X_n\} > x\} \Leftrightarrow \{X_1 > x, X_2 > x, ..., X_n > x\}$$

temos

$$F_{X_{(1)}}(x) = P(\min\{X_1, X_2, ..., X_n\} \leq x) =$$
$$1 - P(\min\{X_1, X_2, ..., X_n\} > x) = 1 - \pi_{i=1}^n (1 - F_{X_i}(x)).$$

No caso em que $X_1, X_2, ..., X_n$ *são variáveis aleatórias identicamente distribuidas com função de distribuição* $F_X(x)$ *, substituimos* $F_{X_i}(x)$ *por* $F_X(x)$ *e obtemos os resultados.*

Corolário 1.27. *Se* $X_1, X_2, ..., X_n$ *são variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuidas com distribuição absolutamente contínua* $F_X(x)$ *e função densidade de probabilidade* $f_X(x)$*, então* $X_{(n)}$ *tem função densidade de probabilidade*

$$f_{X_{(n)}}(x) = n[F_X(x)]^{n-1} f_X(x)$$

e $X_{(1)}$ *tem função densidade de probabilidade*

$$f_{X_{(1)}}(x) = n[[(1 - F_X(x))]^{n-1} f_X(x).$$

Prova *Basta derivar as expressões de* $F_{X_{(n)}}(x)$ *e de* $F_{X_{(1)}}(x)$ *em relação a* x*.*

Exemplo 1.28. Um sistema de engenharia depende de seus componentes através de sua função de estrutura. Um sistema em série, cujos componentes tem tempo de vida $T_1, T_2, ..., T_n$ tem tempo de vida

$$T = \min\{T_1, T_2, ..., T_n\}.$$

Em um sistema com estrutura m paralelo a relação é

$$T = \max\{T_1, T_2, ..., T_n\}.$$

Se os T_i's são variáveis aleatórias positivas, independentes, com distribuições exponenciais de parâmetros λ_i, respectivamente, a confiabilidade de um sistema em série é

$$P(T > t) = P(\min\{T_1, T_2, ..., T_n\} > t) = \pi_{i=1}^{n} P(T_i > t) =$$
$$\pi_{i=1}^{n} e^{-\lambda_i t} = e^{-\sum_{i=1}^{n} \lambda_i}.$$

A confiabilidade de um sistema em série é

$$P(T > t) = P(\max\{T_1, T_2, ..., T_n\} > t) = 1 - P(\max\{T_1, T_2, ..., T_n\} \leq t) =$$
$$1 - \pi_{i=1}^{n} P(T_i \leq t) = 1 - \pi_{i=1}^{n}(1 - e^{-\lambda_i t}).$$

Distribuição da soma e diferença de duas variáveis aleatórias

Teorema 1.29. *Seja (X, Y) um vetor aleatório com função de densidade conjunta $f_{(X,Y)}(x, y)$ e sejam $Z = X + Y$ e $V = X - Y$. Então*

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{(X,Y)}(x, z - x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} f_{(X,Y)}(z - y, y)dy,$$

e

$$f_V(v) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{(X,Y)}(x, x - v)dx = \int_{-\infty}^{\infty} f_{(X,Y)}(v + y, y)dy.$$

Prova

A função de distribuição da variável aleatória $Z = X + Y$ é

$$F_Z(z) = P(Z \leq z) = P(X + Y \leq z) = \int_{-\infty}^{\infty} [\int_{-\infty}^{z-x} f_{(X,Y)}(x, y)dy]dx.$$

Substituindo $y = u - x$ e usando o teorema de Fubini, temos

$$F_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} [\int_{-\infty}^{z} f_{(X,Y)}(x, u-x)du]dx = \int_{-\infty}^{z} [\int_{-\infty}^{\infty} f_{(X,Y)}(x, u-x)dx]du.$$

Portanto

$$f_Z(z) = \frac{dF_Z(z)}{dz} = \int_{-\infty}^{\infty} f_{(X,Y)}(x, z - x)dx.$$

Por outro lado, a função de distribuição da variável aleatória $Z = X - Y$ é

$$F_V(v) = P(V \leq v) = P(X - Y \leq v) = \int_{-\infty}^{\infty} [\int_{x-v}^{\infty} f_{(X,Y)}(x, y)dy]dx.$$

Substituindo $u = x - y$ e usando o teorema de Fubini, temos

$$F_V(v) = \int_{-\infty}^{\infty} [\int_{-\infty}^{v} f_{(X,Y)}(x, x-u)du]dx = \int_{-\infty}^{v} [\int_{-\infty}^{\infty} f_{(X,Y)}(x, x-u)dx]du.$$

Portanto

$$f_V(v) = \frac{dF_V(v)}{dv} = \int_{-\infty}^{\infty} f_{(X,Y)}(x, x-v)dx.$$

Corolário 1.30. *Se X e Y são variáveis aleatórias indendentes com funções densidades de probabilidades $f_X(x)$ e $f_Y(y)$, então*

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) f_Y(z-x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(z-y) f_Y(y)dy,$$

e

$$f_V(v) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) f_Y(x-v)dx = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(v+y) f_Y(y)dy.$$

Prova

$$F_V(v) = P(V \leq v) = P(X-Y \leq v) = \int_{-\infty}^{\infty} P(X-Y \leq v|X=x) f_X(x)dx =$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} P(x-Y \leq v|X=x) f_X(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} P(Y \geq x-v) f_X(x)dx =$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} [\int_{x-v}^{\infty} f_Y(y)dy] f_X(x)dx.$$

Substituindo $u = x - y$ e usando o teorema de Fubini, temos

$$F_V(v) = \int_{-\infty}^{\infty} [\int_{-\infty}^{v} f_X(x) f_Y(x-u)du]dx = \int_{-\infty}^{v} [\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) f_Y(x-u)dx]du.$$

Portanto

$$f_V(v) = \frac{dF_V(v)}{dv} = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) f_Y(x-v)dx.$$

Exemplo 1.31. Sejam X e Y variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuidas com distribuição uniforme no intervalo $(0,1)$. Considere $Z = X + Y$. A função densidade de probabilidade de Z é:

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) f_Y(z-x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} 1_{(0,1)}(x) 1_{(0,1)}(z-x)dx.$$

Observe as restrições

$$0 < x < 1, 0 < z-x < 1 \Rightarrow 0 < x < 1, z-1 < x < z \Rightarrow \max\{z-1, 0\} < x < \min\{1, z\}.$$

Como $0 < z < 2$ temos

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \{1_{(0,z)}(x) 1_{(0,1)}(z) + 1_{(z-1,1)}(x) 1_{(1,2)}(z)\}dx =$$

$$1_{(0,1)}(z) \int_0^z dx + 1_{(1,2)}(z) \int_{z-1}^1 dx = z 1_{(0,1)}(z) + (2-z) 1_{(1,2)}(z).$$

Distribuição do produto e quociente de duas variáveis aleatórias

Teorema 1.32. *Seja* (X, Y) *um vetor aleatório com função de densidade conjunta* $f_{(X,Y)}(x, y)$*. Sejam* $Z = X.Y$ *e* $U = \frac{X}{Y}$*. Então*

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|x|} f_{(X,Y)}(x, \frac{z}{x})dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|y|} f_{(X,Y)}(\frac{z}{y}, y)dy,$$

e

$$f_U(u) = \int_{-\infty}^{\infty} |y| f_{(X,Y)}(uy, y)dy.$$

Prova

A função de distribuição da variável aleatória $Z = X.Y$ *é*

$$F_Z(z) = P(Z \leq z) = PX.Y \leq z) = \int_{-\infty}^{0} [\int_{\frac{z}{x}}^{\infty} f_{(X,Y)}(x, y)dy]dx +$$

$$\int_{0}^{\infty} [\int_{-\infty}^{\frac{z}{x}} f_{(X,Y)}(x, y)dy]dx.$$

Substituindo $u = xy$ *temos*

$$F_Z(z) = \int_{-\infty}^{0} [\int_{z}^{-\infty} f_{(X,Y)}(x, \frac{u}{x})\frac{du}{x}]dx + \int_{0}^{\infty} [\int_{-\infty}^{z} f_{(X,Y)}(x, \frac{u}{x})\frac{du}{x}]dx =$$

$$\int_{-\infty}^{z} [\int_{-\infty}^{0} \frac{-1}{x} f_{(X,Y)}(x, \frac{u}{x})dx]du +$$

$$\int_{-\infty}^{z} [\int_{0}^{\infty} \frac{1}{x} f_{(X,Y)}(x, \frac{u}{x})dx]du = \int_{-\infty}^{z} [\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|x|} f_{(X,Y)}(x, \frac{u}{x})dx]du;$$

Portanto

$$f_Z(z) = \frac{dF_Z(z)}{dz} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|x|} f_{(X,Y)}(x, \frac{z}{x})dx.$$

Corolário 1.33. *Se* X *e* Y *são variáveis aleatórias indendentes com funções densidades de probabilidades* $f_X(x)$ *e* $f_Y(y)$*, então*

$$f_Z(z) = \frac{dF_Z(z)}{dz} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|x|} f_X(x) f_Y(\frac{z}{x})dx.$$

Exemplo 1.34. Sejam X e Y variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuidas com distribuição uniforme no intervalo $(0, 1)$. Sejam $Z = X.Y$ e $U = \frac{X}{Y}$.

A função densidade de probabilidade de Z é:

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|x|} f_X(x) f_Y(\frac{z}{x})dx =$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|x|} 1_{(0,1)}(x) 1_{(0,1)}(\frac{z}{x}) dx.$$

Observe que $0 < z < 1$ e que as restrições

$$0 < x < 1, 0 < \frac{z}{x} < 1 \Rightarrow z < x < 1.$$

Portanto

$$f_Z(z) = 1_{(0,1)}(z) \int_z^1 \frac{1}{x} dx = 1_{(0,1)}(z) - \ln z.$$

A função densidade de probabilidade de U é:

$$f_U(u) = \int_{-\infty}^{\infty} |y| f_X(uy) f_Y(y) dy =$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |y| 1_{(0,1)}(uy) 1_{(0,1)}(y) dy.$$

Observe que $0 < u < \infty$ e que as restrições

$$0 < y < 1, 0 < uy < 1 \Rightarrow 0 < y < \min\{1, \frac{1}{u}\}.$$

Portanto

$$f_U(u) = \int_{-\infty}^{\infty} |y| \{1_{(0,1)}(u) 1_{(0,1)}(y) + 1_{(1,\infty)}(u) 1_{(0,\frac{1}{u})}(y)\} dy =$$

$$1_{(0,1)}(u) \int_0^1 y dy + 1_{(1,\infty)}(u) \int_0^{\frac{1}{u}} y dy = \frac{1}{2} 1_{(0,1)}(u) + \frac{1}{2} \frac{1}{u^2} 1_{(1,\infty)}(u).$$

Teorema 1.35. *Sejam $Z \sim N(0,1)$ uma variável aleatória com distribuição normal padrão e $Y \sim \chi^2_n$ uma variável aleatória com distribuição Qui-quadrado com n graus de liberdade, independentes. Então a variável aleatória*

$$T = \frac{Z}{\sqrt{\frac{Y}{n}}},$$

tem função densidade de probabilidade

$$f(t) = \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})\sqrt{n\pi}} (1 + \frac{t^2}{n})^{-\frac{v+1}{2}}, \quad -\infty < t < \infty.$$

A variável aleatória obtida no teorema anterior tem distribuição de Student com n graus de liberdade e é denoda por T_n. n é o parâmetro da distribuição e pode-se provar que

$$E[T_n] = 0, \quad Var(T_n) = \frac{n}{n-2}, \quad n > 2.$$

Uma tabela da distribuição de Student esta disponível no fim do livro. É importante notar que a distribuição de T_n aproxima-se de uma distribuição normal padrão para n suficientemente grande ($n > 120$).

Teorema 1.36. *Sejam X e Y duas varáveis aleatórias independentes com distribuições qui-quadrado com n e m graus de liberdades, respectivamente. Então a variável aleatória*

$$F = \frac{\frac{X}{n}}{\frac{Y}{m}}$$

tem função densidade de probabilidade

$$f(x) = \frac{\Gamma(\frac{n+m}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})\Gamma(\frac{m}{2})}(\frac{n}{m})^{\frac{n}{2}} \frac{x^{\frac{n-2}{2}}}{(1 + \frac{nx}{m})^{\frac{n+m}{2}}}, \quad x > 0.$$

Diremos que a variável aleatória F, do teorema anterior tem distribuição F com n e m graus de liberdade, nessa ordem, o que denotamos por $F \sim F_{n,m}$. n e m são os parâmetros da distribuição e $F_{n,m}$ é diferente de $F_{m,n}$. Pode-se provar que

$$E[F_{n,m}] = \frac{m}{m-2}, \quad Var(F_{n,m}) = \frac{2m^2(n+m-2)}{n(m-2)^2(m-4)}.$$

Uma tabela da distribuição $F_{n,m}$ esta disponível no fim do livro.

Transformações de variáveis aleatórias bidimensionais

Suponha que desejamos obter a função densidade de probabilidade conjunta de um vetor aleatório (Y_1, Y_2), $f_{(Y_2,Y_2)}(y_1, y_2)$ obtido através de transfomações do vetor aleatório (X_1, X_2), com função densidade de probabilidade conjunta $f_{(X_2,X_2)}(x_1, x_2)$, onde $Y_1 = g_1(X_1, X_2)$ e $Y_2 = g_2(X_1, X_2)$ definem transformações bijetivas de $\Re_{(X_1,X_2)} = \{(x_1, x_2) : f_{(X_1,X_2)}(x_1, x_2) > 0\}$ em $\Re_{(Y_1,Y_2)} = \{(y_1, y_2) : f_{(Y_2,Y_2)}(y_1, y_2) > 0\}$. A solução esta no teorema seguinte que admitiremos sem prova a qual é encontrada em literatura especifica.

Teorema 1.37. *Seja (X_1, X_2) um vetor aleatório com função densidade de probabilidade conjunta $f_{(X_2,X_2)}(x_1, x_2)$. Se*

a) $Y_1 = g_1(X_1, X_2)$ e $Y_2 = g_2(X_1, X_2)$ definem transformações bijetivas e contínuas de $\Re_{(X_1,X_2)}$ em $\Re_{(Y_1,Y_2)}$;

b) as derivadas parciais de $x_1 = g_1^{-1}(y_1, y_2)$ *e* $x_2 = g_2^{-1}(y_1, y_2)$ *são contínuas em* $\Re_{(Y_1,Y_2)}$;

c) O Jacobiano $J = \frac{\delta x_1}{\delta y_1}.\frac{\delta x_2}{\delta y_2} - \frac{\delta x_1}{\delta y_2}.\frac{\delta x_2}{\delta y_1}$ *é diferente de zero,* 0, *em* $\Re_{(Y_1,Y_2)}$,

então a função densidade de probabilidade conjunta de (Y_1, Y_2) *é*

$$f_{(Y_2,Y_2)}(y_1, y_2) = |J|.f_{(X_1,X_2)}(g_1^{-1}(y_1, y_2), g_2^{-1}(y_1, y_2)), \ \ (y_1, y_2) \in \Re_{(Y_1,Y_2)}.$$

Exemplo 1.38. Suponha que X_1 e X_2 são variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuidas com distribuição uniforme no intervalo $[0, 1]$. Então $\Re_{(X_1,X_2)} = \{(x_1, x_2) : 0 \leq x_1 \leq 1, \ \ 0 \leq x_2 \leq 1\}$.

Sejam $Y_1 = g_1(X_1, X_2) = X_1 + X_2$ e e $Y_2 = g_2(X_1, X_2) = X_2 - X_1$. Então $x_1 = g_1^{-1}(y_1, y_2) = \frac{y_1 - y_2}{2}$ e $x_2 = g_2^{-1}(y_1, y_2) = \frac{y_1 + y_2}{2}$ e

$$J = \frac{\delta x_1}{\delta y_1}.\frac{\delta x_2}{\delta y_2} - \frac{\delta x_1}{\delta y_2}.\frac{\delta x_2}{\delta y_1} =$$

$$\frac{1}{2}.\frac{1}{2} + \frac{1}{2}.\frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Os domínios $\Re_{(X_1,X_2)}$ e $\Re_{(Y_1,Y_2)}$ estão na Figura 8.1.

Figura 8.1 -$\Re_{(X_1,X_2)}$ *e* $\Re_{(Y_1,Y_2)}$

A fronteira $\{(x_1, x_2) : x_1 = 0, \ \ 0 \leq x_2 \leq 1\}$ de $\Re_{(X_1,X_2)}$ é transformada na fronteira $\{(y_1, y_2) : 0 \leq y_1 \leq 1, \ \ y_2 = y_1\}$ de $\Re_{(Y_1,Y_2)}$;

A fronteira $\{(x_1, x_2) : 0 \leq x_1 \leq 1, \ \ x_2 = 0\}$ de $\Re_{(X_1,X_2)}$ é transformada na fronteira $\{(y_1, y_2) : 0 \leq y_1 \leq 1, \ \ y_2 = -y_1\}$ de $\Re_{(Y_1,Y_2)}$;

A fronteira $\{(x_1, x_2) : 0 \leq x_1 \leq 1, \quad x_2 = 1\}$ de $\Re_{(X_1,X_2)}$ é transformada na fronteira $\{(y_1, y_2) : 1 \leq y_1 \leq 2, \quad y_2 = 2 - y_1\}$ de $\Re_{(Y_1,Y_2)}$;

A fronteira $\{(x_1, x_2) : x_1 = 1 \;\; 0 \leq x_2 \leq 1\}$ de $\Re_{(X_1,X_2)}$ é transformada na fronteira $\{(y_1, y_2) : 1 \leq y_1 \leq 2, \quad y_2 = y_1 - 2\}$ de $\Re_{(Y_1,Y_2)}$;

A função densidade de probabilidade conjunta de (Y_1, Y_2) é

$$f_{(Y_2,Y_2)}(y_1, y_2) = \frac{1}{2}.1_{[0,1]}(\frac{y_1 - y_2}{2}).1_{[0,1]}(\frac{y_1 + y_2}{2}) = \frac{1}{2}, \;\; (y_1, y_2) \in \Re_{(Y_1,Y_2)}.$$

Se desejamos calcular a densidade marginal de Y_1, por exemplo, devemos integrar a densidade conjunta $f_{(Y_2,Y_2)}(y_1, y_2)$ em relação a y_2 em uma região apropriada:

$$f_{Y_1}(y_1) = \int_{-y_1}^{y_1} \frac{1}{2} dy_2 = \frac{1}{2} y_2|_{-y_1}^{y_1} = y_1 \quad se \quad 0 < y_1 < 1;$$

$$f_{Y_1}(y_1) = \int_{y_1-2}^{2-y_1} \frac{1}{2} dy_2 = \frac{1}{2} y_2|_{y_1-2}^{2-y_1} = 2 - y_1 \quad se \quad 1 \leq y_1 < 2.$$

Exemplo 1.39. Sejam X_1 e X_2 variáveis aleatórias independentes com distribuições gama om parâmetros λ, n_1 e λ, n_2 respectivamente. Desejamos obter a distribuição de $Y_1 = \frac{X_1}{X_1+X_2}$. Para utilizar a técnica bivariada devemos selecionar uma outra transformação conveniente que, para este caso, adotamos $Y_2 = X_1 + X_2$. A densidade conjunta de (X_1, X_2) é

$$f_{(X_1,X_2)}(x_1, x_2) = \frac{1}{\Gamma(n_1)} \lambda^{n_1} x_1^{n_1} e^{-\lambda x_1} . \frac{1}{\Gamma(n_2)} \lambda^{n_2} x_2^{n_2} e^{-\lambda x_2} 1_{(0,\infty)}(x_1) 1_{(0,\infty)}(x_2).$$

As transformações inversas de y_1 e y_2 são $x_1 = y_1 y_2$ e $x_2 = y_2(1 - y_1)$, de forma que

$$J = \frac{\delta x_1}{\delta y_1} . \frac{\delta x_2}{\delta y_2} - \frac{\delta x_1}{\delta y_2} . \frac{\delta x_2}{\delta y_1} = y_2(1 - y_1) + y_1 y_2 = y_2$$

Então $f_{(Y_2,Y_2)}(y_1, y_2) =$

$$y_2 \frac{1}{\Gamma(n_1)} \frac{1}{\Gamma(n_2)} \lambda^{n_1+n_2} (y_1 y_2)^{n_1-1} (y_2 - y_1 y_2)^{n_2-1} e^{-\lambda y_2} 1_{(0,1)}(y_1) 1_{(0,\infty)}(y_2) =$$

$$\frac{\lambda^{n_1+n_2}}{\Gamma(n_1)\Gamma(n_2)} (y_1)^{n_1-1} (1 - y_1)^{n_2-1} (y_2)^{n_1+n_2-1} e^{-\lambda y_2} 1_{(0,1)}(y_1) 1_{(0,\infty)}(y_2) =$$

$$[\frac{1}{B(n_1, n_2)} (y_1)^{n_1-1} (1-y_1)^{n_2-1} 1_{(0,1)}(y_1)][\frac{\lambda^{n_1+n_2}}{\Gamma(n_1 + n_2)} (y_2)^{n_1+n_2-1} e^{-\lambda y_2} 1_{(0,\infty)}(y_2)].$$

Concluimos que Y_1 e Y_2 são variáveis aleatórias independentes , Y_1 tem distribuição beta de parâmetros n_1 e n_2 e Y_2 tem distribuição gama de parâmetros λ e $n_1 + n_2$.

As condições a, b e c do Teorema são de certa forma restritivas. As transformações (Y_1, Y_2) de $\Re_{(X_1,X_2)}$ podem não ser injetoras, mas o domínio $\Re_{(X_1,X_2)}$ pode ser particionado em várias partes, digamos $\Re^1_{(X_1,X_2)}, \Re^2_{(X_1,X_2)}, ...\Re^m_{(X_1,X_2)}$, de maneira que a restrição da transformação (Y_1, Y_2) de $\Re^i_{(X_1,X_2)}$ em $\Re_{(Y_1,Y_2)}$, $1 \leq i \leq m$, seja injetora. Neste caso, definindo $x_1^i = g_1^{i^{-1}}(y_1, y_2)$ e $x_2^i = g_2^{i^{-1}}(y_1, y_2)$ em $\Re^i_{(X_1,X_2)}$ e $J^i = \frac{\delta x_1^i}{\delta y_1}.\frac{\delta x_2^i}{\delta y_2} - \frac{\delta x_1^i}{\delta y_2}.\frac{\delta x_2^i}{\delta y_1}$ podemos aplicar o Teorema em cada domínio da partição e temos:

Corolário 1.40. *Seja (X_1, X_2) um vetor aleatório com função densidade de probabilidade conjunta $f_{(X_2,X_2)}(x_1, x_2)$. Se*

a) $Y_1 = g_1^i(X_1, X_2)$ e $Y_2 = g_2^i(X_1, X_2)$ definem transformações bijetivas e contínuas de $\Re^i_{(X_1,X_2)}$ em $\Re_{(Y_1,Y_2)}$;

b) as derivadas parciais de $x_1^i = g_1^{i^{-1}}(y_1, y_2)$ e $x_2^i = g_2^{i^{-1}}(y_1, y_2)$ são contínuas em $\Re_{(Y_1,Y_2)}$;

c) O Jacobiano J^i é diferente de zero, 0, em $\Re_{(Y_1,Y_2)}$,

então a função densidade de probabilidade conjunta de (Y_1, Y_2) é

$$f_{(Y_1,Y_2)}(y_1, y_2) = |J^i|.f_{(X_1,X_2)}(g_1^{i^{-1}}(y_1, y_2), g_1^{i^{-1}}(y_1, y_2)), \ \ (y_1, y_2) \in \Re_{(Y_1,Y_2)}.$$

Exemplo 1.41. Sejam X_1 e X_2 variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuidas com distribuição normal padrão. Considere as transformações $Y_1 = X_1^2 + X_2^2$ e $Y_2 = X_2$, com transformações inversas $x_1 = \pm\sqrt{y_1 - y_2^2}$ e $x_2 = y_2$ que não são injetoras. O domínio da transformação é

$$\Re_{(X_1,X_2)} = \{(x_1, x_2) : -\infty < x_1 < \infty, -\infty < x_2 < \infty\}$$

e o contra domínio é $\Re_{(Y_1,Y_2)} = \{(y_1, y_2) : 0 \leq y_1 < \infty, -\sqrt{y_1} < y_2 < \sqrt{y_1}\}$.

Se decompomos $\Re_{(X_1,X_2)}$ em

$$\Re^1_{(X_1,X_2)} = \{(x_1, x_2) : 0 < x_1 < \infty, -\infty < x_2 < \infty\}$$

e

$$\Re^2_{(X_1,X_2)} = \{(x_1, x_2) : -\infty < x_1 < 0, -\infty < x_2 < \infty\}$$

a transformação é bijetiva em cada domínio.

Em $\Re^1_{(X_1,X_2)}$ temos $x_1 = \sqrt{y_1 - y_2^2}$ e $x_2 = y_2$ com o jacobiano $J^1 = \frac{1}{2\sqrt{y_1 - y_2^2}}$;

em $\Re^2_{(X_1,X_2)}$ temos $x_1 = -\sqrt{y_1 - y_2^2}$ e $x_2 = y_2$ com o jacobiano $J^2 = -\frac{1}{2\sqrt{y_1 - y_2^2}}$.

Portanto,como

$$f_{(X_1,X_2)}(x_1,x_2) = \frac{1}{2\pi}e^{-(\frac{x_1^2+x_2^2}{2})}$$

temos

$$f_{(Y_1,Y_2)}(y_1,y_2) = |\frac{1}{2\sqrt{y_1-y_2^2}}|\frac{1}{2\pi}e^{-(\frac{(\sqrt{y_1-y_2^2})^2+y_2^2}{2})}+$$
$$|-\frac{1}{2\sqrt{y_1-y_2^2}}|\frac{1}{2\pi}e^{-(\frac{(-\sqrt{y_1-y_2^2})^2+y_2^2}{2})} =$$
$$\frac{1}{\sqrt{y_1-y_2^2}}\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{1}{2}y_1},$$

para $y_1 \geq 0$ e $-\sqrt{y_1} < y_2 < \sqrt{y_1}$.

Se estamos interessados na densidade marginal de Y_1 temos

$$f_{Y_1}(y_1) = \frac{1}{2\pi}e^{-\frac{1}{2}y_1}\int_{-\sqrt{y_1}}^{\sqrt{y_1}}\frac{1}{\sqrt{y_1-y_2^2}}dy_2 =$$
$$\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{1}{2}y_1}[arcsen(\frac{y_2}{\sqrt{y_1}})|_{-\sqrt{y_1}}^{\sqrt{y_1}}] =$$
$$\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{1}{2}y_1}(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}) = \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}y_1},$$

que tem distribuição exponencial.